

Über die beim Magnetisiren erzeugte Wärme.

Von **Anton Wassmuth,**

Universitätsprofessor in Czernowitz.

I. Mittheilung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Jänner 1884.)

In einer der k. Akademie am 13. Juli 1882 vorgelegten Abhandlung [1] habe ich auf Grund der mechanischen Wärmetheorie jene Wärme bestimmt, welche durch die Änderung der magnetisirenden Kraft x in einem Milligramm Eisen erzeugt wird. Ist μ das magnetische Moment, T die absolute Temperatur, S die specifische Wärme des magnetisirten Eisens, die nach meinen Untersuchungen [2] von der des unmagnetischen nur wenig abweicht, so ist die durch die Änderung dx der magnetisirenden Kraft x hervorgebrachte Temperaturerhöhung gegeben durch:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T}{S}\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_x \qquad 1)$$

In dieser Gleichung stellt $\frac{d\mu}{dT}$ die Änderung des Moments μ in Folge der Erwärmung um 1° bei constanter magnetisirender Kraft dar; für die Grösse derselben folgt aus meinen Versuchen [3] der Ausdruck:

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. 86, p. 547; Beiblätt. 7, p. 43. G. Wiedemann Die Elektricität III., pag. 784. An dieser Stelle findet sich ein Druckfehler, indem die specifische Wärme statt durch C_x mit C bezeichnet wurde; da C in anderer Bedeutung in derselben Formel abermals vorkommt, so wurde hier, um Irrthümern gleich in vorhinein zu begegnen, die specifische Wärme mit S bezeichnet.

[2] Sitzb. d. k. Akad. 85, p. 997, Beibl. 7, p. 47. Wiedem. Elekt. III, pag. 782.

[3] Sitzb. d. k. Akad. 82, p. 217 u. 83, p. 332. Beibl. 5, p. 66 u. 5. p. 685. Wiedem. Elekt. III. pag. 745 u. 746.

$$\frac{d\mu}{dT} = C\frac{\mu}{x} - B\mu, \tag{2}$$

worin C und B Constante bedeuten.

Durch Verbindung der Gleichungen 1) und 2) und nachherige Integration zwischen $x = 0$ und x, welchen Zuständen die Temperaturen T_0 und $T_1 = T_0 + \Delta T_0$ entsprechen sollen, erhält man:

$$S \log \frac{T_1}{T_0} = -C\int_0^x \frac{\mu}{x}\,dx + B\int_0^x \mu dx.$$

Da die Temperaturserhöhung ΔT_0 gegen T_0 stets sehr klein ist, so geht diese Formel, wenn noch der Abkürzung wegen,

$$\int_0^x \mu dx = F_1 \tag{3}$$

$$\int_0^x \frac{\mu}{x}\,dx = F_2 \tag{4}$$

gesetzt werden, über in:

$$S\frac{\Delta T_0}{T_0} = BF_1 - CF_2 \tag{5}$$

Durch diese Formel ist also die Temperaturerhöhung ΔT_0 gegeben, welche sich nach mechanischen Principien aus der Änderung der Magnetisirbarkeit mit der Temperatur ergibt. Die Voraussetzung, die bei der Ableitung der Gleichung 5 mit unterläuft, die nämlich, dass die Magnetisirung unter dem Drucke Null, d. i. im luftleeren Raume stattfindet, ist, wie schon am angeführten Orte erwähnt wurde, für die Grösse von ΔT_0 nicht wesentlich.

Die älteren Versuche über die Wärmeentwicklung beim Magnetisiren, nach denen die ganze Temperaturserhöhung proportional x^2, d. i. $\frac{dT}{dx}$ proportional mit x sein soll, stimmen, wie man leicht erkennt, im Allgemeinen mit den obigen Gleichungen überein.

Viele neuere, sonst sorgfältige Versuche, wie z. B. die von Cazin und Trowbridge,[1] können desshalb nicht zum Vergleich

[1] cf. e. g. G. Wiedemann, Elektricität III, p. 777 et seq.

herangezogen werden, weil bei denselben die Wärmeentwicklung in Folge der Inductionsströme stets zu der eventuellen Wärmewirkung der abwechselnden Magnetisirung hinzutrat.

Nur die Versuche von Herwig[1] bieten in dieser Hinsicht eine rühmenswerthe Ausnahme. Bündel von untereinander isolirten Eisendrähten von 160 Mm. Länge und 1·2 Mm. Durchmesser wurden in Glasröhren, die mit Alkohol gefüllt waren und in ein calibrirtes Capillarrohr ausliefen, eingeschlossen und der magnetisirenden Kraft eines starken Elektromagneten ausgesetzt. Zu dem Ende wurden dieselben durch Pappdeckel geschützt, über die Pole des Magneten horizontal gelegt und der magnetisirende Strom in etwa 10 Minuten 7200mal geöffnet und geschlossen. Eines der Eisenbündel war mit einem Messingrohre umgeben und ein anderes Glasrohr enthielt nur ein Messingdrahtbündel. Indem so Herwig die durch die Inductionsströme erzeugte Wärme direct bestimmte, erhielt er (l. c. pag. 186 und 187) für die von aller äusseren Induction freie Wärmeentwicklung W_e die Werthe:

für 19 Drähte	$W_e = 0 \cdot 00170$
38	$W_e = 0 \cdot 00407$
76	$W_e = 0 \cdot 00521$

Calorien (bezogen auf das Kilo Wasser und 1° C.). Nimmt man die specifische Wärme[2] des Eisens gleich 0·105, so erhält man für die einer Magnetisirung (oder Entmagnetisirung) entsprechenden Temperaturerhöhungen die Werthe:

für 19 Drähte	$\Delta T_1 = 89{,}95 \times 10^{-6}$ ° C.
38	$\Delta T_2 = 107{,}7 \times 10^{-6}$
76	$\Delta T_3 = 68{,}9 \times 10^{-6}$

Wenn man auch nicht annehmen kann, dass bei diesen Versuchen die Wirkung der Inductionsströme vollständig eliminirt ist, so wird man doch zugeben müssen, dass dieselben nur mit einem verhältnissmässig geringen Betrag in Rechnung treten; die auf-

[1] G. Wiedemann's Annalen N. F. 4. p. 177 et seq.

[2] Auf den genauen Werth dieser Grösse kommt es beim Vergleich der Theorie mit dem Versuche nicht an, indem sich diese Zahl dabei eliminirt.

gestellten Formeln werden also immerhin einen Vergleich mit Herwig's Versuchen zulassen, sobald nur einmal die Werthe von x, μ und $\frac{d\mu}{dT}$ bestimmt sind. Leider findet sich in dieser Hinsicht bei Herwig (l. c. pag. 180) nur die Bemerkung, dass die benutzte Stromstärke bei allen Versuchen nahezu die gleiche war und 29 absolute elektromagnetische Einheiten (nach Gauss'schem System) betrug.

Ich wandte mich daher an den Nachfolger Herwig's, Herrn Professor Dr. Dorn in Darmstadt, mit der Bitte, mir zur Ermittlung der magnetisirenden Kraft x und des Momentes μ die nöthigen Daten zukommen zu lassen. In bereitwilliger Weise wurde meinem Wunsch entsprochen und hat Herr Dorn zur Bestimmung der von Herwig angewandten Werthe von x und μ die nachfolgenden Versuche durchgeführt.

Um die von Herwig benutzte Glasröhre wurde eine Rolle Draht gewunden und der jeweilige darin auftretende Inductionsstrom gemessen, der — einmal mit, einmal ohne Eisendrähte — durch das Schliessen oder Öffnen des Hauptstromes inducirt wurde; dabei durchlief die Spulen des Elektromagneten ein Strom von nahe 29 absoluten Einheiten. Die Bestimmung der Constante des zum Messen der Inductionsströme verwendeten Galvanometers geschah mit Hilfe eines Erdinductors von bekannten Dimensionen; nachstehend folgen die diesbezüglichen Versuche.

Bestimmung der Galvanometerconstante.

Über den von Meyerstein herrührenden Erdinductor wurden folgende Angaben gemacht: Umfang der Rolle ohne Draht: 391 Mm.; mit Drath:
410, 424, 440, 456, 471, 486, 501·5, 517·5, 532·5 Mm.; Breite der Rolle: 87·5 Mm.; Anzahl der Windungen nebeneinander: 32.

Aus diesen Daten rechnete ich die Fläche für jede Drahtwindung und erhielt für die Fläche S_2 des Erdinductors:

$$S_2 = 4\ 959\ 680 \text{ Mm.}^2$$

Für den Widerstand dieses Inductors (nebst Zuleitung zum Galvanometer) ergab sich aus den mit einem Siemens'schen

Universalgalvanometer durchgeführten Beobachtungen der Werth: 0·837 *S. E.*

Da der Widerstand des Galvanometers: 0·652 *S. E.* betrug, so war der Gesammtwiderstand:

$$w = 1\cdot489 \;\; S.\; E. = 1\cdot489 \times 0\cdot9482 \times 10^{10} \text{Mm. Sec.}^{-1}$$

Es wurde der Strom gemessen, der in Folge der Drehung des Erdinductors um eine verticale Axe durch die Horizontalcomponente $H = 1\cdot940$ in der Leitung inducirt wurde; dabei kamen sowohl die Zurückwerfungs- wie die Multiplicationsmethode zur Anwendung.

a) Die Zurückwerfungsmethode.

Herr Dorn erhielt bei der Scaladistanz 3060Mm. folgende Umkehrpunkte:

s_1	s_2	s_3	s_4
582·4	471·0	417·7	529·3

Berechnete ich hieraus:

$$a = s_1 - s_3 = 164\cdot7 \text{ und } b_0 = s_4 - s_2 = 58\cdot3,$$

so ergab sich der grosse Bogen a aus:

$$a = \frac{a_0 - 0\cdot000\;000\;089 \times a_0^{\;3}}{6120} = 0\cdot02691$$

und der kleine Bogen b aus:

$$b = 0\cdot009526,$$

somit das Dämpfungsverhältniss:

$$k = \frac{a}{b} = 2\cdot825$$

Bezeichnet nun: $E = 2S_2H$ die Grösse der inducirten elektromotorischen Kraft, C den Reductionsfactor des Galvanometers, t die Schwingungsdauer der Nadel, so ist die Stärke J des inducirten Stromes bekanntlich gegeben durch:

$$J = \frac{E}{w} = \left(\frac{Ct}{\pi}\right) {}^1/_2 \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}}\, k^{-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2.3026\,\lambda}{\pi}},$$

wenn $\lambda = \log k$ das logarithmische Decrement vorstellt. Hieraus ergibt sich schliesslich:

$$\frac{Ct}{\pi} = \frac{4S_2 H}{w} \frac{\sqrt{ab}}{a^2+b^2} k + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2 \cdot 3026\, \lambda}{\pi} \tag{6}$$

Ich erhielt so:

$$\frac{Ct}{\pi} = 0 \cdot 05951.$$

b) Die Multiplicationsmethode.

In diesem Falle ist, wenn A den Grenzbogen bezeichnet, die Stromstärke J gegeben durch:

$$J = \left(\frac{Ct}{\pi}\right) \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{2.3026\, \lambda}}. \tag{7}$$

Da hier wiederum $J = \frac{E}{w} = \frac{2S_2 H}{w}$ bekannt war, so konnte aus 7) ebenfalls $\frac{Ct}{\pi}$ berechnet werden; ich erhielt:

$$\frac{Ct}{\pi} = 0 \cdot 05974$$

und somit als Mittelwerth nach beiden Methoden:

$$\frac{Ct}{\pi} = 0 \cdot 0596 \quad mm^{1/2}\ mg^{1/2}. \tag{8}$$

Bei der Berechnung nach der Gleichung 7) wurde für k der oben erhaltene Werth: $k = 2{\cdot}825$ genommen; die Beobachtungen bei offener Leitung hatten einen davon sehr wenig verschiedenen Werth ergeben.

Bestimmung der magnetisirenden Kraft.

Wie schon angedeutet, war um die Glasröhre eine Rolle gewickelt, deren Enden mit dem Galvanometer in Verbindung standen; es wurde am Galvanometer der erste Ausschlag gemessen, den der durch Schliessen oder Öffnen des Hauptstromes erzeugte Inductionsstrom hervorrief. Dabei war der Widerstand der Rolle: 0·531 S. E und der des Galvanometers = 0·652 S. E; mit Hilfe eines Stöpselrheostaten konnte dieser Widerstand $w = 1{\cdot}183$ um eine Anzahl Einheiten vergrössert werden.

Herr Dorn beobachtete am 29. Mai 1883:

1. Gesammtwiderstand nahe $= 21 \cdot 32$

Strom geschlossen	501·4	—	471·7
„ unterbrochen	501·9	—	531·8
schwingt aus.	473·5	—	527·5
	477·4	—	523·7

Der mittlere erste Ausschlag war daher 29·7.

2. Gesammtwiderstand: 51·4

Geschlossen:	501·8	—	488·5
Unterbrochen: .	501·3	—	514·5
schwingt aus:	488·7	—	513·6
	489·6	—	512·7

mittlerer Ausschlag: 13·25.

3. Gesammtwiderstand: 6·29

Geschlossen:	500·9	—	403·6
	576·8	—	440·3
	547·6	—	463·1
Unterbrochen:	500·3	—	595·6
	424·5	—	558·4
	453·5	—	535·6

mittlerer Ausschlag: 96·3.

Das logarithmische Decrement: $\lambda = \log k$ rechnet sich für diese drei Fälle diesbezüglich zu: 0·03341, 0·01630 und 0·10518.

Bedeutet α den in Bogen gemessenen ersten Ausschlag, so berechnete ich die jeweilige inducirte elektromotorische Kraft E_1 nach der bekannten Formel:

$$E_1 = w_1 \left(C \frac{t}{\pi}\right) \alpha \sqrt{k} \tag{9}$$

und die mittlere magnetisirende Kraft X aus der weiter unten zu erörternden Gleichung:

$$E_1 = 0 \cdot 9375 \times X S_1 \tag{10}$$

worin S_1 die Stromfläche der Rolle vorstellt. Nun waren in einer Länge von 147Mm. 76 Windungen eines Drahtes mit einem äusseren Durchmesser von 18·0Mm. auf der Glasröhre, deren Durchmesser im Mittel 14·45Mm. betrug, aufgewickelt; hieraus berechnete ich:

$$\log S_1 = 4 \cdot 19494,$$

so dass:

$$\log X = \log E_1 - 4\cdot16691 \text{ war.}$$

Auf diese Weise erhielt ich:

bei $w_1 = 21\cdot32$	$X = 3966$
$w_2 = 51\cdot4$	4195
$w_3 = 6\cdot29$	4067

so dass sich als Mittel:

$$X = 4076 \,\text{Mm.}^{-1/2}\text{Mg.}^{1/2}\text{Sec.}^{-1} \qquad 11)$$

ergab.

In trefflicher Übereinstimmung damit stehen mehrere Beobachtungen des Herrn Dorn vom 27. Mai 1883; dieselben ergaben einerseits bei gleichen Widerständen wie oben auch sehr nahe gleiche Ausschläge, während anderseits bei dem Widerstande $w = 11\cdot18$, der Ausschlag $56\cdot5$ und das logarithmische Decrement $0\cdot06073$ war. Hieraus erhielt ich für diesen Fall:

$$X = 4095.$$

Nachfolgend möge in Kürze die oben zur Berechnung von X gegebene Formel abgeleitet werden. Sind die magnetisirenden Pole in grosser Entfernung von der Rolle, so ist die durch das Entstehen oder Verschwinden des Magnetismus inducirte elektromotorische Kraft E_1 gegeben durch:

$$E_1 = XS_1 \qquad 12)$$

Einen für den vorliegenden Fall besser passenden Werth erhält man, sobald man die Lage der Pole des Elektromagneten als bekannt annimmt.

Es sei l die Poldistanz und y die verticale Entfernung dieser Linie von der Mitte der Rolle, welch' letztere die Länge L habe; man bestimme zuerst das Potential V eines Kreisquerschnittes — Radius R — für den einen Pol m. Ist O^1 der Fusspunkt des von m auf diese Kreisebene gefällten Perpendikels, $mO^1 = u$, C der Mittelpunkt des Kreises, φ' der Winkel, den die Linie O^1C mit der von O^1 an den Kreis gezogenen Tangente bildet, so erhält man:

$$V = 2\int_0^{\varphi'} \left[\sqrt{r_2^2+u^2} - \sqrt{r_1^2+u^2}\right] d\varphi$$

wenn:

$$r_2 = y\cos\varphi + \sqrt{R^2 - y^2\sin^2\varphi}$$
$$r_1 = y\cos\varphi - \sqrt{R^2 - y^2\sin^2\varphi}$$

gesetzt wird. Berücksichtigt man das Vorwalten des Gliedes: $T^2 = R^2+y^2+u^2$, so liefert eine einfache Reihenentwicklung und nachherige Integration:

$$\frac{V}{R^2\pi} = \frac{1}{T} + \frac{R^2}{4T^3} + \frac{3R^2y^2}{8T^5} + \frac{R^4}{8T^5} +$$

Nun ist nach F. Neumann's Grundgesetz die durch das Entstehen eines Poles m in einem geschlossenen Leiter inducirte elektromotorische Kraft gleich $m\,U$, wenn U den körperlichen Winkel bezeichnet, unter den von m aus gesehen der Leiter erscheint. Wie man sofort sieht, ist:

$$mU = -m\frac{dV}{du}$$

und daher die mittlere elektromotorische Kraft, wenn n die Zahl der Windungen auf der Länge Eins, L, wie erwähnt, die Länge der Rolle vorstellt, gegeben durch:

$$\frac{nm}{L}\int_{1/2(l-L)}^{1/2(l+L)} U\,du = -\frac{nm}{L}\int_{1/2(l-L)}^{1/2(l+L)} \frac{dV}{du}\,du = -\frac{nm}{L}\Big[V\Big]_{u=1/2(l-L)}^{u=1/2(l+L)}$$

durch Multiplication mit L erhält man die durch das Entstehen des einen Poles hervorgerufene elektromotorische Kraft $\frac{E_1}{2}$, so dass also:

$$E_1 = -2mn\Big[V\Big]_{1/2(l-L)}^{1/2(l+L)} \text{ ist.}$$

Nimmt man für V den obigen Werth, führt die Fläche $S_1 = R^2\pi\, n$ ein und setzt:

$$T_1^2 = R^2+y^2+{}^1/_4(l+L)^2$$
$$T_0^2 = R^2+y^2+{}^1/_4(l-L)^2,$$

so ergibt sich schliesslich bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{E_1 L}{2mS_1} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} + \frac{R^2}{4T_0^3} - \frac{R^2}{4T_1^3} \tag{13)}$$

Die mittlere magnetisirende Kraft X für Punkte der Axe der Rolle ergibt sich leicht aus dem Potential v der Pole des Elektromagneten für einen Punkt $+1$ in dieser Axe. Sind ρ_1 und ρ_2 die Entfernungen der Pole $+m$ und $-m$ von diesem Punkte $+1$, also $v = m\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$, so ist die mittlere magnetisirende Kraft X gleich:

$$X = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dv}{dx} dx = \frac{m}{L}\left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

Da nun:

$$\rho_1^2 = y^2 + (x - \frac{l}{2})^2 \qquad \rho_2^2 = y^2 + (x + \frac{l}{2})^2$$

ist, so ergibt sich, wenn man wieder die obigen Werthe für: T_0^2 und T_1^2 einführt:

$$\frac{XL}{2m} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} + \frac{R^2}{2T_0^3} - \frac{R^2}{2T_1^3} \tag{14)}$$

Zieht man von dieser Gleichung den obigen Werth für: $\frac{E_1 L}{2mS_1}$ ab und dividirt dann durch die angenäherte Gleichung:

$$\frac{XL}{2m} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}$$

so ergibt sich:

$$1 - \frac{E_1}{XS_1} = \frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{T_0^2} + \frac{1}{T_0 T_1} + \frac{1}{T_1^2}\right)$$

wofür mit Rücksicht auf die ins Auge gefassten Verhältnisse gesetzt werden kann:

$$\frac{E_1}{XS_1} = 1 - \frac{R^2}{4T_0^2} \tag{15)}$$

Nach den vorliegenden Daten liess sich nun y nahe gleich 12 und $R = 8$ Mm. setzen, wodurch schliesslich:

$$E_1 = \frac{15}{16} XS_1 = 0\cdot 9375 XS_1$$

entsteht.

Bestimmung des magnetischen Momentes.

Es wurden zuerst 19, dann 38 Stäbe aus dem Herwig'schen Eisenmessingrohr — in ein Bündel geschnürt — in die Rolle gelegt und in gleicher Weise, wie vorher, der Inductionsstrom beim Schliessen und Öffnen des Hauptstromes gemessen.

So erhielt Herr Dorn am 29. Mai 1883:

1. Gesammtwiderstand $W_1 = 21\cdot 32$, 19 Stäbe in der Rolle.

Ruhelage (Strom offen)	500·6	505·5	501·0
Stromschluss		501·0 —	366·4
schwingt aus		629·7	386·0
		611·4	403·1

Ruhelage (Strom geschlossen)	502·1	504·4	502·0
Stromesöffnung	504·4 —	640·9	
schwingt aus	375·2	621·2	
	393·6	604·0	

Hieraus ergibt sich der mittlere Ausschlag zu 135·55 und das logarithmische Decrement: $\lambda = 0\cdot 03402$.

Hieraus berechnete ich mit den obigen Daten die gesammte inducirte elektromotorische Kraft: $E_1 + E_2 = 26510 \times 10^4$, wenn E_2 von der Änderung des Magnetismus des Stabbündels und E_1 von der directen Induction des Elektromagnets herrührt. Da nach dem früheren: $E_1 = 5824 \times 10^4$ war, so ergab sich $E_2 = 20686 \times 10^4$; zu demselben Resultate wäre man auch gekommen, wenn man von dem mittleren Ausschlag 135·55 den früher genannten 29·7, der dem stabfreien Zustande entsprach, abgezogen und den Rest als zu E_2 gehörig angesehen hätte.

Bei einem anderen Versuche mit demselben Bündel erhielt Herr Dorn:

Gesammtwiderstand 51·4			
Ruhelage (ohne Strom)	503·6	502·0	503·6
Stromschluss	502.0 —	444·8	
	558·6	449·3	
	554·7	453·3	

Ruhelage (Strom geschlossen)	503·4	502·4	503·2
Stromöffnung	503·2 —	560·7	
	446·6	556·3	
	450·4	552·6	

Hieraus ergibt sich der mittlere auf die Rechnung von E_2 kommende Ausschlag zu: 57·35 — 13·25 = 44.1 und das logarithmische Decrement: $\lambda = \log k = 0·01629$; mit diesen Werthen erhielt ich: $\log E_2 = 8·31185$ d. i. $E_2 = 20504 \times 10^4$.

Mit dem Bündel von 38 Stäben erhielt Herr Dorn:

Gesammtwiderstand: 51·4

Ruhelage (Strom offen)	503·0	501·8	502·9
Stromschluss		501·8	376·7
		623·3	385·6
		614·5	393·9
Ruhelage (Strom geschlossen)		502·0	
Strom unterbrochen		502·0	616·0
		391·6	607·7
		399·5	600·1

Hier sind in Folge des auftretenden permanenten Magnetismus die beiden Ausschläge schon merklich verschieden; es ergibt sich der Werth 125·1 für den Stromesschluss und der von 114·0 für die Stromesöffnung. Unter Berücksichtigung der directen Induction ergeben sich für die beiden Fälle die elektromotorischen Kräfte: $E_2 = 5200 \times 10^5$ und $E_2 = 4684 \times 10^5$

Mit Hilfe der so ermittelten Werthe der inducirten elektromotorischen Kräfte E_2 liessen sich die diesbezüglichen Momente M der Stabbündel auf folgende Weise ermitteln:

1. Nach einer bekannten von F. Neumann herrührenden[1] Formel ist die durch das Entstehen oder Verschwinden eines in der Axe einer Rolle liegenden Magnetes inducirte elektromotorische Kraft E_2 gegeben durch:

$$E_2 = 4\pi \frac{M}{l_1} N \left[\sqrt{1 + \frac{r^2}{L^2}} - \frac{r}{L} \right]$$

[1] cf. e. g. Pogg. Ann. 67 p. 43. An dieser Stelle wird r als Durchmesser bezeichnet, was ein Druckfehler ist.

wenn M das Moment und l_1 die Poldistanz des Magnets, $N = 76$ die Zahl der Windungen der Rolle von der Länge $L = 147$ Mm. und dem Halbmesser $r = 8\cdot 11$ darstellt. Setzt man noch: $l_1 = \varkappa \times 160$, so dass also $\varkappa$ die Poldistanz für die Länge Eins angibt, so wird:

$$E_2 = 5\cdot 647 \times \frac{M}{\varkappa} \tag{16}$$

Der Umstand, dass diese Formel auch die Poldistanz enthält, erschwert wesentlich ihre Benützung. Betreffs $\varkappa$ ist nur bekannt,[1] dass diese Distanz mit steigender Magnetisirung zunimmt und für gesättigte Stabmagnete $\varkappa$ zu $0\cdot 86$ bis $0\cdot 88$ angenommen werden kann. In Übereinstimmung damit stehen einige Versuche, bei denen ich den permanenten Magnetismus des Bündels mit den 38 Stäben in verschiedenen Entfernungen vom Galvandmeter mass; ich erhielt so für dieses Bündel $l_1 = 137$ oder $x = 0\cdot 856$.

2. Obwohl durch das Vorhergehende immerhin einige Anhaltspunkte zur Bestimmung von l_1 gegeben sind, so habe ich doch, da es vor Allem auf die mittleren Momente M ankommt, bei der Berechnung derselben ein etwas anderes Verfahren eingeschlagen. Statt des jeweiligen Stabbündels wurde nämlich ein Rotationsellipsoid von gleicher Länge und gleichem Gewichte substituirt und die Berechnung der inducirten elektromotorischen Kraft E_2 nach einer von Riecke[2] gegebenen Formel durchgeführt. Es ist nämlich:

$$E_2 = 4\pi n.\ \Sigma.\ M,$$

worin M das magnetische Moment des homogen magnetisirt gedachten Ellipsoides und $n = \frac{76}{147} = 0\cdot 5169$ die Zahl der Windungen der Rolle für die Längeneinheit vorstellt; der Factor Σ wird bestimmt durch:

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\prime\prime}} + \frac{\sigma_1}{\sigma_{\prime\prime}}\left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{\prime\prime}^2}\right)\left(\frac{1}{5}\,\frac{1}{\sigma_{\prime\prime}^2} + \frac{3}{35}\,\frac{1}{\sigma_{\prime\prime}^4}\right)$$

---

[1] cf. e. g. A. Reding, Calorimetrische und magnetische Messungen, Zürich 1882, p. 58.

[2] Pogg. 149. p. 446. In der angeführten Formel 8 findet sich hier ein Fehler, indem im letzten Gliede statt $\sigma_{\prime\prime}^2$ richtig $\sigma_{\prime\prime}^4$ stehen soll.

darin bedeuten:

$$\sigma_1 = \frac{l}{\lambda},$$

$\sigma_{\prime\prime} > 1$ die eine Wurzel der quadratischen Gleichung.

$$\frac{l^2}{\lambda^2\sigma^2} + \frac{r^2}{\lambda^2(\sigma^2-1)} = 1,$$

$2l = 147$ Mm. die Länge der Rolle und $r = 8 \cdot 11$ ihren Halbmesser; die Differenz der Quadrate der Halbaxen des Ellipsoides: $c_0^2 - a_0^2$ ist gleich λ^2 gesetzt und wurde für das Bündel mit 38 Stäben die Länge der grossen Halbaxe $c_0 = 80$ Mm. und die der kleinen $a_0 = 4 \cdot 53$ Mm. gefunden. Für das Bündel mit 19 Stäben erhielt ich analog: $c_0 = 80$ Mm. und $a_0 = \frac{4 \cdot 53}{\sqrt{2}}$.

Die Ausrechnung lieferte die Formeln:

Für das Bündel mit 38 Stäben: $E_2 = 6 \cdot 116 \times M$ 17)

und „ „ „ „ 19 „ $E_2 = 6 \cdot 011 \times M$ 18)

woraus sich durch Vergleich mit der oben angeführten Formel 16) ein $\varkappa = 0 \cdot 92$ respective $0 \cdot 94$ ergibt.

Wird das Moment M des Bündels durch sein Gewicht in Milligrammen — es wiegen 76 Stäbe nahe 100 Grm. — dividirt, so erhält man das Moment μ eines Milligramms und fand ich auf diese Art:

für das Bündel mit 19 Stäben

bei dem Widerstande $51 \cdot 4$: $\mu_1 = 1365$ Mm.$^{5/2}$ Mg.$^{1/2}$ Sec.$^{-1}$

„ „ $21 \cdot 32$: $\mu_1 = 1377$

daher im Mittel $\mu_1 = 1371$

für das Bündel mit 38 Stäben ergab sich das mittlere Moment eines Milligramms

beim Schliessen des Stromes: $\mu_2 = 1701$

„ Öffnen „ „ $\mu_2^1 = 1532$

Es muss hier hervorgehoben werden, dass der die Windungen des Elektromagneten durchfliessende Strom sehr constant war und dem von Herwig angewandten nahe kam. Es wurden nämlich an einer nach den Angaben von F. Kohlrausch (Wied. N. F. 15) von Hartmann gelieferten Tangentenboussole bei jeder der vorhin erwähnten zur Bestimmung von x und μ

dienenden Beobachtung die durch diesen Hauptstrom gelieferten Ablenkungen beobachtet und erhielt so z. B. Herr Dorn die Werthe:

179·3, 180·5, 179·4, 180·5, 179·1, 180·6, 179·5 und 180·3, woraus als Mittel sich 179·9 ergibt, was einer absoluten Ablenkung: $\varphi = 25{\cdot}23°$ entspricht.

Da der mittlere Durchmesser des Kupferringes 392·4 Mm. seine Dicke 3·7 Mm. und seine Breite 8·1 Mm. sowie der Polabstand der Nadel 51 Mm. betrug, so ergab sich mit dem oben genannten Werthe der Horizontalcomponente schliesslich:

$$i = 28 \cdot 32 \quad \text{Mm.}^{1/2}\ \text{Mg.}^{1/2}\ \text{Sec.}^{-1}$$

also etwas kleiner wie nach der Angabe Herwig's.

Das Bisherige gipfelt in dem Satze:

Bei Herwig's Versuchen war die angewandte mittlere magnetisirende Kraft nahezu

$$X = 4076 \quad \text{Mm.}^{-1/2}\ \text{Mg.}^{1/2}\ \text{Sec.}^{-1}$$

und die erzielten mittleren Momente per Milligramm bei dem Bündel mit 19 Stäben: $\mu_1 = 1371$ Mm.$^{5/2}$Mg.$^{1/2}$Sec.$^{-1}$
„ „ „ 38 „ $\mu_2 = 1701$
$\mu_2^1 = 1532$ „

wo sich μ_2 auf den Stromschluss, μ_2^1 auf die Stromesöffnung bezieht.

Wenn es auch im ersten Momente auffällt, dass eine so bedeutende Kraft keine dem Maximum von 1800 nahen Werthe erzielte, so findet dieses Verhalten in den nachfolgenden Versuchen doch seine befriedigende Erklärung.[1]

Bestimmung der Änderung des Magnetismus mit der Temperatur.

Sollen die Herwig'schen Versuche mit der Theorie verglichen werden, so benöthiget man dazu noch, wie ein Blick auf die Gleichung 1 zeigt, die Kenntniss des Quotienten $\frac{d\mu}{dT}$ für alle Werthe von $x = o$ bis $x = 4076$ d. h. es sind die Änderungen

[1] cf. v. Waltenhofen, Sitzb. d. k. Akad. 61.

der Momente in Folge einer Erwärmung um 1° experimentell zu ermitteln. Zu dem Ende wurden die in einer Magnetisirungsspirale liegenden Stabbündel in einem kupfernen Kasten in der genauen Ost-Westlage einem aperiodischen Spiegelgalvanometer von Siemens gegenüber gestellt und durch zwei untergestellte Berzelius-Lampen auf eine höhere Temperatur gebracht. Die Wirkung der Spule für sich war durch eine zweite im Westen liegende Spule vollständig compensirt; diese Compensation blieb selbst dann erhalten, wenn die Magnetisirungsspule die höhere Temperatur angenommen hatte. Ein Widerstandskasten und eine Tangentenboussole von Siemens dienten zum Reguliren und Messen der Ströme. Nachdem die Ruhelage eine Zeit lang beobachtet worden war, wurde das vom Magnetismus freie Stabbündel in die Spule gelegt und steigenden magnetisirenden Kräften ausgesetzt, welche Operation ungefähr 8 Minuten in Anspruch nahm; durch Einschalten von Widerstand wurde hierauf, ohne die Ablenkungen weiter zu notiren, die Stromstärke immer mehr verringert und schliesslich der permanente Magnetismus durch immer schwächere, entgegengesetzt gerichtete Ströme weggeschafft. Nun erfolgte die Erwärmung unter steter Beobachtung der Ruhelage und der Temperatur und schliesslich, wenn nämlich letztere constant geworden war, die Magnetisirung in gleicher Weise wie früher. Sämmtliche Apparate standen auf einem sich vortrefflich bewährenden Fussboden aus Cement.

Zur Berechnung der Beobachtungen dienten folgende Daten: Die Magnetisirungsspirale bestand aus einem Kupferrohr von nahe 200Mm, Länge, auf welches in 5 Lagen 473 Windungen eines 2·1Mm. dicken Drahtes aufgewunden waren; der äussere Durchmesser der Kupferröhre war 16 Mm. Der Reductionsfactor der Tangentenboussole 41·3 $\mathrm{Mm.}^{1/2}$ $\mathrm{Mg.}^{1/2}$ $\mathrm{Sec.}^{-1}$ war durch die Elektrolyse von Kupfervitirol mehrmals bestimmt, so dass sich schliesslich die magnetisirende Kraft x aus der Formel:

$$\log x = \log tg\,\alpha + 3\cdot09\ 095$$

ergab, wenn α den an der Tangentenboussole beobachteten Winkel vorstellt. Für die Berechnung der Momente (per Milligramm) diente die Bemerkung, dass die Mitte der Stäbe um 900 Mm. vom Galvanometer entfernt war, während die Scaladistanz 2080 Mm.

und die Horizontalcomponente 1·9 betrug. Ich habe bei den nachfolgenden Beobachtungen, um die Übersicht zu erleichtern, unter Einem die gleicher magnetisirender Kraft entsprechenden Momente μ_0 und μ_t angegeben; für das Bündel mit 38 Stäben und die Temperaturen: 16° und 157° waren dieselben:

x	μ_0	μ_t	$\Delta\mu = \mu_t - \mu_0$	$\Delta\mu$ berechnet
62·46	48·95	54·61	+ 5·66	11·54
99·20	82·57	90·59	8·02	11·71
142·65	122·20	133·23	11·03	11·37
239·70	221·41	232·07	10·66	10·62
362·90	345·68	356·66	10·98	8·81
456·10	440·04	447·38	7·34	7·28
617·40	589·93	594·48	4·55	4·35
742·30	701·49	705·01	3·52	2·04
866.50	804·09	805·03	+ 0·94	+ 0·04
1121·90	956·85	953·08	— 3·77	— 3·94
1299·30	1028·11	1023·20	— 4·91	— 6·22
1490·60	1083·80	1076·10	— 7·70	— 8·26

Werden die Grössen: $\Delta\mu$ durch die Temperaturerhöhung von 141° dividirt, so erhält man die Werthe von $\frac{d\mu}{dT}$

Werden die Curven gezeichnet, bei denen x die Abscissen, μ_0 und μ_t die Ordinaten vorstellen, so sieht man, dass sich beide Curven in dem Punkte $x_1 = 870$, wozu $\mu_1 = 807 \cdot 2$ gehört, schneiden. Indem ich die Formel:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT} = \frac{C}{x} - B$$

zu Grunde legte, ergaben sich aus zwei sicheren Beobachtungen:

$$C = 0 \cdot 1126 \text{ und } B = 0 \cdot 0001296$$

wobei auch sehr nahe derselbe Durchschnittspunkt: $x_1 = \frac{C}{B}$ resultirt; mit diesen Werthen sind die $\Delta\mu$ der letzten Colonne berechnet.

Substituirt man wie früher an Stelle des Bündels ein Ellipsoid und rechnet in bekannter Weise hieraus die Magnetisirungsfunction k, so geben die Curven, bei denen μ die Abscissen und

k die Ordinaten vorstellen, als Maxima ungefähr: $m_0 = 1740$ und $m_t = 1706$, woraus $B = 0{\cdot}000138$ resultirte. Der Vergleich der vierten und fünften Colonne lässt erkennen, dass B im Allgemeinen zu gross genommen wurde; für $x = 4076$ wird also die berechnete Verminderung zu gross gegen die wirkliche ausfallen. Die geringen, mir zu Gebote stehenden Mittel gestatteten mir leider nicht, so bedeutende magnetisirende Kräfte anzuwenden; ich bestimmte desshalb auf indirectem Wege das zu $x = 4076$ gehörige $\Delta\mu$. Mit Hilfe der Gleichung:

$$\frac{\Delta\mu}{x_1 - x} \; \frac{x}{\mu} = Bt$$

wurden aus den drei letzten Beobachtungen (für $x = 1121{\cdot}9$, $1299{\cdot}3$ und $1490{\cdot}6$) für die Grösse Bt die Werthe: 0·0175, 0·0145 und 0·0171 und hieraus als Mittel $B = 0{\cdot}000116$ erhalten. Mit diesem Werthe ergab sich schliesslich das zu $x = 4076$ und $\mu = \frac{1}{2}(1701 + 1532) = 1617$ gehörige: $\Delta\mu = 20{\cdot}8$

Mit diesen Daten lässt sich ein Vergleich der Theorie mit den Versuchen ohne weiters durchführen. Nach der Gleichung 1 und 5 ist nämlich die Temperaturerhöhung ΔT_0 gegeben durch:

$$S\frac{\Delta T_0}{T_0} = -\int_0^{4076} \frac{d\mu}{dT}\, dx = BF_1 - CF_2.$$

Unter Berücksichtigung der ersten beiden Glieder dieser Gleichung kann man also so verfahren, dass man sich zuerst die hier sehr regelmässig verlaufende Curve zeichnet, bei der x die Abscissen und $\Delta\mu$ die Ordinaten vorstellen und hierauf die Fläche

$$-\frac{1}{141}\int_0^{4076} \Delta\mu \,.\, dx$$

durch Abzählen ermittelt. Ich erhielt so für den positiven Theil $\frac{1}{141}31240$ und für den negativen $\frac{1}{141} \times 6160$; es ergibt sich hieraus:

$$S\frac{\Delta T_0}{T_0} = 221{\cdot}5$$

während der aus Herwig's Beobachtungen mit dem Werthe:

$$S = 0 \cdot 105 \times 4155 \times 10^6,\quad T_0 = 273 \text{ und } \Delta T_0 = 0 \cdot 0001077^0$$

berechnete Werth dieser Grösse 172·1 ist.

Die berechnete Temperaturerhöhung ist also etwas höher als die beobachtete und muss die erstere nahe um $^1/_4$ ihres Werthes vermindert werden, falls Übereinstimmung zwischen beiden herrschen soll. Es ist indess unschwer einzusehen, dass eine Abweichung in diesem Sinne zwischen Theorie und Versuch nothwendig bestehen muss. So erkennt man sofort, dass eigentlich jene Magnetisirungscurven (x Abscissen, μ Ordinaten) zu bestimmen gewesen wären, die den Temperaturen T_0 und $T_0 + 1_0$ entsprechen würden; der Durchschnitt dieser beiden Curven müsste nun, wie aus meinen früheren Beobachtungen mit aller Strenge hervorgeht, nothwendig bei einem beträchtlich höheren Werthe von x, als 870 stattfinden, dadurch würde aber die positive Fläche vermindert und die negative, absolut genommen, vergrössert, somit der berechnete Werth vermindert. Leider war es mir mit den vorhandenen Mitteln nicht möglich, diesen Einfluss durch Magnetisiren des Bündels bei mehreren, weiter auseinander liegenden Temperaturen festzustellen, wenn sich auch nach dem Verhalten einzelner Stäbe schliessen lässt, dass der obige Betrag um mindestens $^1/_6$ zu vermindern ist.

Ein weiterer Grund der Abweichung war der, dass bei Herwig's Versuchen der permanente Magnetismus eine bedeutende Rolle spielte. Wie erwähnt, war nämlich das Moment beim Schliessen $\mu_2 = 1701$ und das beim Öffnen $\mu_2 = 1532$; nach der getroffenen Anordnung der Versuche war nun gerade die Änderung des Momentes zu 1532 anzunehmen, da der Strom hintereinander geschlossen und geöffnet wurde; es ist unschwer einzusehen, dass in Folge dieses Umstandes die obige Fläche ebenfalls um einen gewissen Betrag vermindert werden sollte.

Man übersieht dieses leichter, wenn man bei der Berechnung von ΔT_0 den zweiten Weg betritt und von den Gleichungen 5, 3 und 4 Gebrauch macht. Zu dem Ende bestimmte ich durch Abzählen zuerst die Integrale

$$F_1 = \int_0^{4676} \mu dx \quad \text{und} \quad F_2 = \int_0^{4076} \frac{\mu}{x}\, dx,$$

ohne Rücksicht auf den permanenten Magnetismus, d. h. unter Voraussetzung von $\mu_2 = 1701$ für $x = 4076$. Ich erhielt so die Werthe: 4450000 und 2144 und ist nun jede dieser Flächen um den Betrag, der sich auf den permanenten Magnetismus bezieht, zu verkleinern.

Aus einigen zu diesem Zwecke angestellten Versuchen ermittelte ich die den

magnetisirenden Kräften.	140,	617 und	1491
zugehörigen permanenten Momente zu:	15.6	51·3	61·9

während nach Obigen zu $x = 4076$ das permanente Moment $1701 - 1532 = 169$ gehört. Auf diese Art ergab sich der auf den permanenten Magnetismus sich beziehende Theil des Integrals: $\int_0^{4076} \mu dx$ zu 370000, während die Correction von F_2 wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt wurde. Die richtigen Werthe von F_1 und F_2 sind demnach: $F_2 = 2144$ und $F_1 = 4080000$; hieraus ergibt sich mit dem obigen Werthe von $B = 0{\cdot}00016$ schliesslich:

$$F = BF_1 - CF_2 = 473{\cdot}1 - 241{\cdot}4 = 231{\cdot}7$$

d. i. wenig von dem früheren Werthe verschieden.

Mit einem Bündel von 19 Stäben, das aus dem bisher besprochenen gebildet worden war, wurden ähnliche Untersuchungen durchgeführt. Die gleichen x entsprechenden Momente waren:

x	μ_0	μ_t	$\Delta\mu$	$\Delta\mu$ berechnet
62·5	53·3	77·4	+24·1	+20·4
97·0	103·9	141·8	37·9	24·6
138·3	169·1	205·1	36·0	26·7
235·2	325·0	354·0	29·0	26·6
358·2	519·4	551·0	31·6	23·1
458·5	661·9	680·9	19·0	19·0
628·2	861·0	867·4	+ 6·4	+11·7
770·5	975·6	971·2	− 4·4	+ 6·0
919·0	1055·5	1045·9	− 9·6	+ 0·7
1149·7	1138·0	1129·3	− 8·7	− 5·6
1326·8	1183.3	1174·4	− 8·9	− 9·3
1517·2	1221·9	1209·4	−12·5	−12·5

Die Beobachtungen werden, wenigstens für die höheren Momente, wiedergegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT} = \frac{C}{x} - B,$$

wobei die Constanten $C = 0{\cdot}1938$ und $B = 0{\cdot}0002052$ aus der sechsten und zwölften Beobachtung und der Temperaturerhöhung von 132° bestimmt wurden. Für die Maxima ergibt die Zeichnung nahe 1590 und 1545, was einem $B = 0{\cdot}0002144$ entspricht. Der Durchschnittspunkt beider Curven liegt ungefähr bei $x_1 = 747$, wozu $\mu_1 = 957$ gehört. Mit den angegebenen Werthen von C und B berechnet sich das $\Delta\mu$ für $x = 4076$ und $\mu = 1371$ zu $\Delta\mu = 28{\cdot}5$.

Wird wieder die Curve gezeichnet, bei der x die Abscissen und $\Delta\mu$ die Ordinaten vorstellen, so erhält man für den positiven Theil der Fläche:

$$-\frac{1}{132}\int_0^{4076} \Delta\mu\,.\,dx$$

den Werth: 44565 und für den negativen: 14510 und somit:

$$\frac{S\Delta T_0}{T^0} = (44565 - 14510):132 = 227,$$

während Herwig's Beobachtung hiefür den Werth 147 ergibt.

Es muss bemerkt werden, dass die erwähnte Curve weniger regelmässig wie die frühere verläuft; es mag diese Erscheinung in gewissen bei der Erwärmung von Stäben auftretenden Verschiebungen ihren Grund haben.

Schlägt man den zweiten Weg ein, so findet sich:

$$F_1 = \int \mu dx = 4162000, \quad F_2 = \int \frac{\mu}{x}\,dx = 3095,$$

woraus:

$$F = BF_1 - CF_2 = 854{\cdot}2 - 599{\cdot}9 = 254{\cdot}3,$$

somit ein von dem vorigen wenig abweichender Werth resultirt. Selbstverständlich gelten auch hier die früher zur Erklärung der Abweichung des berechneten und beobachteten Werthes von ΔT_0 vorgebrachten Gründe.

Da im Sinne dieser Correctionen vollständige Übereinstimung zu erwarten ist und bei so heiklen experimentellen Untersuchungen der mögliche Beobachtungsfehler einen verhältnissmässig höheren Werth hat, so lässt sich das Ergebniss dieser Untersuchung in dem folgenden Satze zusammenfassen:

„Herwig's Versuche über das Erwärmen beim Magnetisiren werden durch die von mir aus der mechanischen Wärmetheorie abgeleitete Formel:

$$\frac{S\Delta T_0}{T_0} = -\int_0^x \frac{d\mu}{dT} dx$$

gut wiedergegeben."

Ich erfülle zum Schlusse eine angenehme Pflicht, indem ich Herrn Prof. Dr. Dorn in Darmstadt, der, wie oben erwähnt, im Interesse der angeregten Frage mit Herwig's Apparaten eine Reihe sorgfältiger Versuche zur Bestimmung von x und μ durchführte, hiemit öffentlich meinen wärmsten Dank abstatte.

Czernowitz, am 28. December 1883.