Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze.

Von Dr. **Karl Exner.**

Durch ein sinnreiches Experiment hat Herr A. Cornu darauf aufmerksam gemacht, dass in der Richtung der Axe des Quarzes das Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes gleich ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles senkrecht zur Axe. [1]

Dieses, von Cornu erkannte Gesetz ist in einem allgemeineren Gesetze enthalten, welches sich aus einer von V. v. Lang theoretisch abgeleiteten und experimentell verificirten Formel herauslesen lässt, [2] ebenso wie aus der analogen, sich aus Cauchy's Theorie ergebenden Formel, welche ebenfalls von V. v. Lang experimentell verificirt ist.

Die Formel, wie sie Cauchy gegeben hat, ist:

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\rho\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2\sin^4\rho+\frac{\cos^4\rho}{\chi^4}} \quad (1)$$

n	Brechungsquotient einer ebenen Welle
ω	Ordentlicher Brechungsquotient
ε	Ausserordentlicher Brechungsquotient
ρ	Winkel der Wellennormale mit der Axe
χ	Constante der Rotationspolarisation

Denkt man den Krystall des Rotationsvermögens beraubt, oder setzt man $\chi=\infty$, so wird:

[1] A. Cornu. C. R. XCII. 1882.

[2] V. v. Lang. Wien. Akad. Ber. LX. 1869 — LXXV. 1877.

$$\frac{1}{n'^2} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\rho \pm \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\rho,$$

also:

$$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{\omega^2}\cos^2\rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\rho, \tag{2}$$

und es ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1'^2} + \frac{1}{n_2'^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\cos^2\rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\rho\right). \tag{3}$$

$\left|\begin{matrix} n_1' \\ n_2' \end{matrix}\right|\Big\}$ Die der Richtung ρ entsprechenden Brechungsquotienten des Krystalls ohne Rotationsvermögen |.

Andererseits erhält man aus der Gleichung (1):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\cos^2\rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\rho\right), \tag{4}$$

und man hat aus (3) und (4):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1'^2} + \frac{1}{n_2'^2}\right)$$

$\left|\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right|\Big\}$ Die der Richtung ρ entsprechenden Brechungsquotienten des Krystalls |,

oder

$$\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2}(v_1'^2 + v_2'^2) \tag{5}$$

$\left|\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\right|\Big\}$ Lichtgeschwindigkeiten in irgend einer Richtung

$\left|\begin{matrix} v_1' \\ v_2' \end{matrix}\right|\Big\}$ Lichtgeschwindigkeiten in derselben Richtung ohne Rotationspolarisation |.

Das heisst: Das arithmetische Mittel der Quadrate der beiden, irgend einer Richtung entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist gleich dem arithmetischen Mittel der Quadrate jener

Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche dem Krystalle in derselben Richtung ohne Rotationspolarisation zukämen.

Nach einer geistreichen Bemerkung des Herrn Cornu muss nun dieser Satz, wenn er für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten gilt, auch für jede Function dieser Quadrate, und somit auch für die einfachen Lichtgeschwindigkeiten gelten. Es folgt dies aus der Kleinheit der Differenzen der Grössen v_1, v_2, v_1', v_2'. Es ist also auch:

$$\frac{1}{2}(v_1+v_2)=\frac{1}{2}(v_1'+v_2'), \tag{6}$$

und das heisst: Für irgend eine Richtung ist das arithmetische Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich dem arithmetischen Mittel jener Geschwindigkeiten, welche derselben Richtung ohne Rotationspolarisation entsprechen würden.[1] Insbesondere ergibt sich für die Richtung der Axe:

$$\frac{1}{2}(v_1+v_2)=v \tag{7}$$

| v | Ordentliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit |

und dies ist das Gesetz Cornu's.

Es ist nicht ohne Interesse, die Gleichung (6) mit den Messungsresultaten V. v. Lang's zu vergleichen. Dieser erhielt:

ρ		n_2	n_2'	n_1'
0°27·0′	1·5441887	1·5442605	1·54423	1·5442243
1 54·7	1925	2649	23	
2 48·4	1942	2766	25	
4 40·0	2043	3043	28	
5 4·8	2088	3009	29	

[1] Ein analoger Satz für die Lichtfortpflanzung im magnetischen Felde wurde von Cornu (l. c.) aufgestellt und begründet.

wo ich jedoch die Zahlen der vierten Verticalreihe nach Formel (2) hinzugerechnet habe. Beschränkt man sich auch bei den übrigen Zahlen auf fünf Decimalstellen und lässt bei sämmtlichen Zahlen die übereinstimmenden vier ersten Ziffern hinweg, so gelangt man zu dem folgenden Tableau:

ρ	n_1	n_2	$\frac{1}{2}(n_1+n_2)$	$\frac{1}{2}(n_1'+n_2')$	n_2'	n_1'
0°27·0′	19	26	$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	23	22
1 54·7	19	26	$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	23	22
2 48·4	19	28	$23\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	25	22
4 40·0	20	30	25	25	28	22
5 4·8	21	30	$25\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$	29	22

Diesem Tableau ist die Gleichung

$$\frac{1}{2}(n_1+n_2)=\frac{1}{2}(n_1'+n_2') \qquad (8)$$

zu entnehmen, und diese Gleichung ist nach dem Satze Cornu's, dass an die Stelle der Geschwindigkeiten beliebige Functionen der Geschwindigkeiten gesetzt werden können, identisch mit (6).

Die nachfolgende Tabelle V. v. Lang's enthält die nach Cauchy's Formel unter Benutzung der Messungsresultate berechneten Brechungsquotienten und zwar auch für den Fall, dass $\chi=\infty$ gesetzt wird, wodurch das charakteristische der Circularpolarisation verschwindet.

ρ	n_1	n_2		n_1'
0°	1·5441884	1·5442602	1·5442243	1·5442243
5	2093	43081	42929	
10	2200	45009	44965	
15	2225	48309	48290	
20	2234	52816	52806	
25	2242	58382	58380	

Es ist selbstverständlich, dass die Zahlen dieser Tabelle dem Satze (5) entsprechen müssen, es können jedoch diese Zahlen zur Prüfung der Genauigkeit jenes anderen Satzes dienen, welcher gestattet, die Geschwindigkeiten mit irgend welchen Functionen der Geschwindigkeiten zu vertauschen. Man erhält in der That unter Hinweglassung der übereinstimmenden drei ersten Ziffern:

ρ	n_1		$\frac{1}{2}(n_1+n_2)$	$\frac{1}{2}(n_1'+n_2')$	n_2'	n_1'
0°	41884	42602	42243	42243	42243	42243
5	42093	43081	42587	42586	42929	
10	42200	45009	43604	43604	44965	
15	42225	48309	45267	45267	48290	
20	42234	52816	47525	47525	52806	
25	42242	58382	50312	50312	58380	

in sehr vollkommener Übereinstimmung mit Satz (8).