Über das algebraische Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete von $(n+1)$ Grössen.

Von Dr. **Otto Biermann,**
Privatdocent an der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1887.)

An anderer Stelle [1] habe ich einige Sätze über das irreductible algebraische Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete von $(n+1)$ Grössen namhaft gemacht, die ich in Folgendem ausführen und beweisen will. Dabei halte ich mich an die Art der Behandlung des algebraischen Gebildes erster Stufe von Herrn K. Weierstrass, und theilweise an die der Herren H. Weber und R. Dedekind, die am genannten Orte auseinandergesetzt wird.

§. 1.

Eine Grösse y heisst eine algebraische Function n^{ter} Stufe, wenn dieselbe einer irreductiblen algebraischen Gleichung

$$F(y, x_1, \ldots x_n) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_{m-1} y + a_m = 0 \quad 1)$$

genügt, in der die Coëfficienten a ganze rationale Functionen von n von einander unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, die keinen gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Irreductibilität der Gleichung $F = 0$ bringt es mit sich, dass F nicht in das Product mehrerer ganzer rationaler Functionen von y und $x_1, x_2, \ldots x_n$ zerlegbar ist, und darum gibt es keine ganze rationale Function $G(y, x_1, x_2, \quad x_n)$, von niedrigerem als dem m^{ten} Grade in y, welche für die in der Umgebung einer Stelle $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \quad x_n^{(0)})$ oder $(x^{(0)})$ gelegenen Stellen $(x^{(1)})$

[1] Theorie der analytischen Functionen.

dieselben Nullstellen $(y^{(1)}, x_1^{(1)} \quad x_n^{(1)})$ hat wie F, denn andernfalls wäre F durch G algebraisch theilbar. Ist ja doch bekannt, dass dann, wenn zwei ganze rationale Functionen $F(y, x_1, \ldots x_n)$ und $\Phi(y, x_1, \quad x_n)$ für jedes Werthesystem $(x_1 \ldots x_n)$ einer gewissen Umgebung einer ersten Stelle $(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)$ eine gemeinsame Nullstelle y besitzen, F durch Φ theilbar ist. Wenn daher unsere algebraische Function y einer zweiten Gleichung

$$G(y, x_1, \quad x_n) = a'_0 y^{m'} + a'_1 y^{m'-1} + \quad \ldots + a'_{m'-1} y + a'_{m'} = 0$$

genügt, so ist G durch F theilbar, und jetzt kann man zeigen, dass G auch in Bezug auf jede Variable x_n nicht von niedrigerem Grade sein kann als F.

Denken wir bei dem Beweise die Coëfficienten a' von gemeinsamen Factoren befreit und bezeichnen wir den vom Nenner befreiten Quotienten von F durch G mit

$$H(y, x_1, \quad x_n) = c_0 y^{m-m'} + c_1 y^{m-m'-1} + \ldots + c_{m-m'},$$

so ist

$$pG = F.H$$

wenn p eine ganze rationale Function der Variabeln x ist. Der Vergleich der gleichnamigen Coëfficienten der y Potenzen auf beiden Seiten führt auf die Beziehungen:

$$\begin{aligned} p a'_0 &= a_0 c_0 \\ p a'_1 &= a_0 c_1 + a_1 c_0 \\ p a_2 &= a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 \end{aligned}$$

in welchen die Functionen c ohne gemeinsamen Theiler vorauszusetzen sind, weil ein solcher nothwendig in p enthalten sein müsste und weggehoben werden könnte.

Jetzt folgt, dass p constant sein muss, denn andernfalls besässen die Coëfficienten a oder c wider die Vorausetzung einen Theiler, nämlich p. In der That wären weder alle a, noch alle c durch p theilbar, so müsste das Product zweier nicht durch p theilbaren Functionen a und c durch p theilbar sein. Weil das nicht angeht, ist p constant und darf gewiss gleich Eins gesetzt werden.

Dann aber folgt aus der Gleichung

$$G = F.H,$$

dass G in den Variabeln x nicht von niedrigerem Grade sein kann als F.

§ 2.

Zugleich mit der algebraischen Function wollen wir auch das System aller rationalen Functionen von y und $x_1, \ldots x_n$

$$R(y, x_1, \ldots x_n)$$

untersuchen, d. h. die Quotienten ganzer rationaler Functionen $f(y_1\, x_1, \quad x_n)$ und $g(y_1, x_1, \ldots x_n)$, in welchen weder der Zähler noch der Nenner durch $F(y, x_1, \ldots x_n)$ theilbar ist.

Hiezu haben wir die analytische Darstellung des durch die Gleichung $F = 0$ definirten irreductiblen, algebraischen Gebildes n^{ter} Stufe nöthig, wo unter dem Gebilde die Gesammtheit der Stellen $(x_1, \ldots x_n, y)$ verstanden ist, welche der gegebenen Gleichung genügen.

Die verlangte analytische Darstellung soll derart ausfallen, dass man die Umgebung jeder Stelle des Gebildes $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$, $y = b$ aus einem oder einer endlichen Anzahl von Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} x_\nu - a_\nu &= \mathfrak{P}_\nu(t_1, t_2, \ldots t_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n) \\ y - b &= \mathfrak{P}_{n+1}(t_1, t_2 \ldots \quad t_n) \end{aligned}$$

oder Elementen — wie man auch sagt — entnehmen kann, wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{P}_{n+1}$ convergente Potenzreihen in den n Hilfsvariabeln $t_1, t_2, \ldots t_n$ sind, die keine negativen Potenzen der t enthalten und für $t_1 = t_2 = \quad = t_n = 0$ verschwinden.

Ist $(a_1, a_2, . \quad a_n)$ eine endliche Stelle aus der $2n$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Variabeln $x_1, \ldots x_n$, welcher die endliche Wurzel $y = b$ zugehört, so kann man die ganze Function F — die von der m^{ten} Ordnung sei — in der Umgebung von $(a_1, \quad a_n, b)$ in der Form schreiben:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y-b) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu}\right)(x_\nu - a_\nu) + \sum_{\mu=2}^{m}(y-b, x_1-a_1 \ldots x_n-a_n)_\mu,$$

wenn mit $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu}\right)$ der Werth von $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_\nu}$ an der Stelle $a_1, \ldots a_n, b$ und mit $(y-b,\ x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)_\mu$ das Aggregat der Glieder μ^{ter} Dimension in der Entwicklung von F bezeichnet ist.

Sofern die Anleitungen

$$\frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots\ \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

an unserer Stelle $(a_1, \ldots a_n, b)$ nicht alle verschwinden, wählen wir ein System von $n(n+1)$ Constanten $\alpha_{\lambda,\mu}$ $(\lambda = 0, 1, 2 \ldots n,$ $\mu = 1, 2 \ldots n)$ derart, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right), & \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right), \ldots & \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{n1} \\ \alpha_{01} & \alpha_{12} & \alpha_{nn} \\ & & \\ \alpha_{0n} & \alpha_{1n} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet und definiren durch das Gleichungssystem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y-b) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)(x_1-a_1) + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)(x_n-a_n) = t_0$$

$$\alpha_{01}(y-b) + \alpha_{11}(x_1-a_1) + \ldots + \alpha_{n1}(x_n-a_n) = t_1$$

$$\alpha_{0n}(y-b) + \alpha_{1n}(x_1-a_1) + \ldots + \alpha_{nn}(x_n-a_n) = t_n$$

$(n+1)$ neue Grössen $t_0, t_1, \ldots t_n$. In diesen erhält F die Gestalt

$$F(y, x_1, \ldots x_n) = t_0 + (t_0, t_1 \ldots t_n)_2 + \ldots + (t_0, t_1, \ldots t_n)_m.$$

Weil nun jede in der Umgebung der Stelle (0) convergente Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(t_0, t_1, \ldots t_n)$$

mit den in den folgenden Gleichungen ausgesprochenen Eigenschaften:

$$\mathfrak{P}(0, 0 \ldots 0) = 0;\ \mathfrak{P}(t_0, 0, 0 \ldots 0) = t_0 \overset{(0)}{\mathfrak{P}}(t_0) \quad (\overset{(0)}{\mathfrak{P}}(0) \gtrless 0)$$

in ein Product

$$(t_0 - \mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \ldots t_n))\,\mathfrak{P}'_0(t_0, t_1, \ldots t_n)$$

zerlegt werden kann, wo die Potenzreihe $\mathfrak{P}_0$ mit den Variabeln $t_1, \quad t_n$ verschwindet indess $\mathfrak{P}'_0(0, 0 \ldots 0) = \overset{(0)}{\mathfrak{P}}(0)$ ist,[1] so kann man auch die obige ganze Function auf diese Form bringen. Setzt man hierauf zur Erfüllung der Gleichung $F = 0$

$$t_0 = \mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \quad t_n)$$

und setzt diese Potenzreihe für t_0 in das obige Gleichungssystem ein, so erhält man für $y-b, x_1-a_1, \ldots x_n-a_n$ die in einem gewissen Bereiche um die Stelle (0) jedenfalls gleichzeitig convergenten Potenzreihen

$$x_\nu - a_\nu = \mathfrak{P}_\nu(t_1, \ldots t_n) \qquad (\nu = 1, 2 \quad n)$$
$$y - b = \mathfrak{P}_{n-1}(t_1, . \quad t_n),$$

die für $t_1 = t_2 = \quad = t_n = 0$ verschwinden und die Gleichung $F = 0$ identisch erfüllen.

Setzt man voraus, dass die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

an der Stelle $t_1 = 0, .. \quad t_n = 0$ nicht verschwindet, so kann man die n Gleichungen

$$x_\nu - a_\nu = \mathfrak{P}_\nu(t_1, \ldots t_n) = A_{\nu 1} t_1 + . \quad + A_{\nu n} t_\nu + (t_1, \ldots t_n)_{\nu,2} +$$
$$+ (t_1, . \quad . t_n)_{\nu,3} + \ldots (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

durch n gleichzeitig convergente Potenzreihen

$$t_\nu = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_1 - a_1, \quad .. x_n - a_n) = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_1, \ldots x_n | a_1, \ldots a_n),$$

die für $x_1 = a_1, \quad x_n = a_n$ verschwinden, identisch erfüllen

[1] Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionenlehre S. 105, §. 1.

und deren Substitution in die obige Reihe für $y-b$ liefert eine Darstellung:

$$y-b = \bar{\mathfrak{P}}_{n+1}(x_1, \ldots x_n | a_1, \ldots a_n) =$$

$$\sum_{(\mu)=0}^{\infty}{}' \left(\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_n} y}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_n}}\right)_{(x_\nu)=(a_\nu)} \frac{(x_1-a_1)^{\mu_1}}{\mu_1} \qquad \frac{(x_n-a_n)^{\mu_n}}{\mu_n!} (x_\nu = a_\nu,$$

wo der Strich bei der $n$fachen Summe anzeigen soll, dass $\mu_1, \ldots \mu_n$ nicht gleichzeitig Null zu setzen sind.

Ist aber die obige Determinante an der Stelle $(t) = (0)$ Null, so wird gewiss eine andere Determinante der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial \mathfrak{P}_{n+1}}{\partial t_0} \\ & \\ & \\ \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t_n}, & \frac{\partial \mathfrak{P}_{n+1}}{\partial t_n} \end{Vmatrix}$$

für $t_1 = 0, \qquad t_n = 0$ von Null verschieden sein und man kann darnach mindestens eine der Differenzen $x_1-a_1, \qquad x_n-a_n$, z. B. $x_\nu-a_\nu$ in eine Potenzreihe der Form

$$\mathfrak{P}(x_1, . \quad x_{\nu-1}, y, x_{\nu+1}, \ldots x_n \mid a_1, . \quad . a_{\nu-1}, b, a_{\nu+1}, \ldots a_n)$$

entwickeln.

Wir bemerken zu der früheren Darstellungsart, dass die Umgebung jeder einfachen Stelle des gegebenen Gebildes, wo also mindestens eine der Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ von Null verschieden ist, auf unendlich viele Arten in der Form

$$x_\nu-a_\nu = \mathfrak{P}'_\nu(\tau_1, \ldots \tau_n) \quad (\nu = 1, \ldots n)$$
$$y-b = \mathfrak{P}'_{n+1}(\tau_1, \qquad \tau_n)$$

darzustellen ist. In der That, man braucht zu diesem Ende die früheren Variabeln t nur durch Gleichungen der folgenden Art

$$t_\nu = \mathfrak{p}_\nu(\tau_1, \qquad \tau_n) \quad (\nu = 1, .. \quad n) \qquad \alpha)$$

mit den neuen Variabeln τ in Beziehung zu setzen, wo $\mathfrak{p}_1, \qquad \mathfrak{p}_n$ nach positiven ganzen Potenzen von $\tau_1, \qquad \tau_n$ fortschreitende convergente Reihen ohne constante Glieder sind, deren Functionaldeterminante an der Stelle $\tau_1 = 0, \ldots \tau_n$ nicht verschwindet.

Unter dieser letzten Bedingung kann man nach Umkehrung der Reihen (α) von der zweiten wieder zu der ersten Darstellungsart zurückkehren. Jeder Stelle (τ') eines gewissen Bereiches um $(\tau) = (0)$ entspricht eine Stelle (t) und eine Stelle des algebraischen Gebildes. Verschiedene Stellen (τ') und (τ'') gehören verschiedenen Stellen (t) zu, etwa (t') und (t''), denn andernfalls könnten die n Gleichungen

$$t'_\nu - t''_\nu = \sum_{(\lambda)=0}^{\infty}{}' c^{(\nu)}_{\lambda_1, \ldots \lambda_n} (\tau'^{\lambda_1}_1 \ldots \tau'^{\lambda_n}_n - \tau''^{\lambda_1}_1 \ldots \tau''^{\lambda_n}_n) = 0$$

$$(\nu = 1, 2 \ldots n)$$

nur bestehen, wenn auch die n-Ausdrücke

$$c^{(\nu)}_{1, 0 \ldots 0}(\tau'_1 - \tau''_1) + \ldots + c^{(\nu)}_{0, 0 \ldots 1}(\tau'_n - \tau''_n) \quad (\nu = 1, \ldots n)$$

verschwinden, dann aber müsste wider die Voraussetzung die Functionaldeterminante der n-Reihen $\mathfrak{p}_\nu$ an der Stelle $(\tau) = (0)$ Null sein.

Man sieht auch, dass zwei Darstellungsarten in einem gewissen Bereiche dieselben Stellen unseres Gebildes definiren müssen.

Nehmen wir jetzt an, dass $(a_1, \ldots a_n, b)$ eine einfache Stelle des Gebildes sei und die ganze Function $m$ter Ordnung $F(y, x_1, \ldots x\ )$ bei Benützung der Bezeichnungen

$$y - b = \eta, \; x_\nu - a_\nu = \xi_\nu \quad (\nu = 1, \ldots n)$$

die Schreibweise zulässt

$$F(y, x_1, \ldots x_n) = \sum_{\lambda=0}^{m-\mu} (\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)_{\mu+\lambda},$$

so wollen wir auch festsetzen, dass in dem Aggregat $(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)_\mu$ das Glied η^μ vorkommt, denn man kann durch Einführung neuer Variabeln — wo etwa

$$\eta = \beta_1 \xi'_1 + \ldots + \beta_n \xi'_n + \gamma \eta'$$
$$\xi_\nu = \beta_{\nu 1} \xi'_1 + \ldots + \beta_{\nu n} \xi_n + \gamma_\nu \eta' \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

gesetzt wird — auf den genannten Fall zurückkommen.

Die eigentliche Bedeutung des Umstandes, dass die Entwicklung von T mit Gliedern m^{ter} Dimension beginnt, liegt darin, dass einer Stelle $\xi_1, \ldots \xi_n$ aus der Nähe der Stelle (0) μ unendlich kleine Werthe η zugehören.

Um nun eine Darstellung der Umgebung der μ-fachen Stelle des algebraischen Gebildes zu finden, hat man ein Verfahren anzugeben, durch welches F so transformirt wird, dass in dem entstehenden Ausdruck nicht alle Glieder erster Dimension verschwinden.

Denken wir die zu einem Werthesysteme $\xi_1, \ldots \xi_n$ aus der Nähe der Stelle $\xi_1 = 0, \ldots \xi_n = 0$ gehörigen μ Wurzeln der Gleichung

$$(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)_\mu = 0$$

bestimmt, von denen etwa je $k_1, k_2, \ldots k_r$ einander gleich seien, — wobei $k_1 + \ldots + k_r = \mu$ sein wird — so kann man entsprechend jeder der r verschiedenen Wurzeln eine quadratische Substitution der Form:

$$\xi_\lambda = (\alpha_{\lambda,1}\xi'_1 + \ldots + \alpha_{\lambda,\nu-1}\xi'_{\nu-1} + \alpha_{\lambda,\nu} + \alpha_{1,\nu+1}\xi'_{\nu+1} + \ldots + \alpha_{\lambda n}\xi'_n + \alpha_{\lambda,n+1}\eta')\xi'_\nu \qquad (\lambda = 1.2, \ldots n)$$

$$\eta = (\alpha_{n+1,1}\xi'_1 + \ldots + \alpha_{n+1,\nu-1}\xi'_{\nu-1} + \alpha_{n+1,\nu} + \alpha_{n+1,\nu+1}\xi'_{\nu+1} + \ldots + \alpha_{n+1,n}\xi'_n + \alpha_{n+1,n+1}\eta')\xi'_\nu$$

angeben, durch welche

$$(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)_\mu \text{ in } \xi'^{\mu}_\nu(\eta', \xi'_1, \ldots \xi'_{\nu-1}, 1, \xi'_{\nu+1}, \ldots \xi'_n)_\mu$$

und $$F(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n) \text{ in } \xi'^{\mu}_\nu F_\rho(\eta', \xi'_1, \ldots \xi'_n)$$

derart übergeht, dass das Glied niedrigster Dimension in

$$(\eta', \xi'_1, \ldots \xi'_{\nu-1}, 1. \xi'_{\nu+1}, \ldots \xi'_n)_\mu$$

$(\eta')^{k_\rho}$ wird. Dann gehören zu einer Stelle $\xi'_1 \ldots \xi'_n$ aus der Nähe der Stelle $(\xi') = (0)$ zufolge der Gleichung

$$F_\rho(\eta', \xi'_1, \ldots \xi'_n) = 0$$

k_ρ unendlich kleinen Werthe von η' und somit ebenso viele Stellen $(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)$. Benützt man demnach alle r Gleichungen $F_\rho = 0$ $(\rho = 1, 2, \ldots r)$, so erhält man auf diese Weise μ der Gleichung $F = 0$ genügende Werthesysteme.

Da aber umgekehrt μ Nullstellen von F der in Rede stehenden Art immer gleich viele Stellen entsprechen, die folgeweise den Gleichungen $F_1 = 0$, oder $F_2 = 0 \ldots$ oder $F_r = 0$ genügen, so ist das System von Gleichungen $F_\rho = 0$ der einen Gleichung $F = 0$ für hinlänglich kleine Bereiche äquivalent.

Wenn nun eine der Gleichungen $F_\rho = 0$ Glieder erster Dimension aufweisen sollte, so kann man die in F_ρ enthaltenen Grössen $\eta', \xi_1', \ldots \xi_n'$ durch n Potenzreihen in n Hilfsvariabeln $\tau_1', \ldots \tau_n'$ ausdrücken und dieser Darstellung eine gleichartige für $\eta, \xi_1, \ldots \xi_n$ zuordnen. In anderem Falle muss man die Gleichungen $F_\rho = 0$ analog wie $F = 0$ behandeln, nur muss man zeigen, dass man nach einer endlichen Anzahl von Transformationen immer eine Gleichung mit Gliedern erster Dimension erhalten kann, wenn nur $F(y, x_1, \ldots x_n)$ eine irreductible Function ist.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass die Gleichung

$$(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n)_\mu = 0$$

für ein bestimmtes Werthesystem der Variabeln ξ eine μ-fache Wurzel η besitze und führen der Reihe nach Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_\lambda^{(\rho-1)} &= \Big(\alpha_{\lambda,1}^{(\rho)} \xi_1^{(\rho)} + \ldots + \alpha_{\lambda,\nu-1}^{(\rho)} \xi_{\nu-1}^{(\rho)} + \alpha_{\lambda,\nu}^{(\rho)} + \alpha_{\lambda,\nu+1}^{(\rho)} \xi_{\nu+1}^{(\rho)} + \ldots \\
&\quad + \alpha_{\lambda,n}^{(\rho)} \xi_n^{(\rho)} + \alpha_{\lambda,n+1}^{(\rho)} \eta^{(\rho)}\Big) \xi_\nu^{(\rho)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \\
\eta^{(\rho-1)} &= \Big(\alpha_{n+1,1}^{(\rho)} \xi_1^{(\rho-1)} + \ldots + \alpha_{n+1,\nu-1}^{(\rho)} \xi_{\nu-1}^{(\rho)} + \alpha_{n+1,\nu}^{(\rho)} + \\
&\quad + \alpha_{n+1,\nu+1}^{(\rho)} \xi_{\nu+1}^{(\rho)} + \ldots + \alpha_{n+1,n}^{(\rho)} \xi_n^{(\rho)} + \alpha_{n+1,n+1}^{(\rho)} \eta^{(\rho)}\Big) \xi_\nu^{(\rho)}
\end{aligned}\right\}$$

aus, wo ρ die Werthe $1, 2, \ldots r$ erhalten mag und $\xi_1^{(0)}, \ldots \xi_n^{(0)}, \eta^{(0}$ mit $\xi_1, \ldots \xi_n, \eta$ gleichbedeutend seien, dann mögen die Gleichungen hervorgehen:

$$F(\xi_1, \ldots \xi_n, \eta) = \left(\xi_\nu^{(1)}\right)^\mu F_1\left(\xi_1^{(1)}, \ldots \xi_n^{(1)}, \eta^{(2)}\right)$$

$$F_1\left(\xi_1^{(1)}, \ldots \xi_n^{(1)}, \eta^{(1)}\right) = \left(\xi_\nu^{(2)}\right)^{\mu_1} F_2\left(\xi_1^{(2)}, \ldots \xi_n^{(2)}, \eta^{(2)}\right)$$

$$F_{r-1}\left(\xi_1^{(r-1)}, \ldots \xi_n^{(r-1)}, \eta^{(r-1)}\right) = \left(\xi_\nu^{(r)}\right)^{\mu_{r-1}} F_r\left(\xi_1^{(r)}, \ldots \xi_n^{(r)}, \eta^{(r)}\right).$$

Wir bemerken, dass die folgenden Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_k^{(1)}} = \left(\xi_\nu^{(1)}\right)^\mu \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\varkappa^{(1)}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial \xi_\varkappa^{(1)}} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\varkappa^{(1)}}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots \nu - 1, \nu + 1, \ldots n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_\nu^{(1)}} = \eta \left(\xi_\nu^{(1)}\right)^{\mu-1} F_1 + \left(\xi_\nu^{(1)}\right)^\mu \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\nu^{(1)}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial \xi_\nu^{(1)}} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\nu^{(1)}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta^{(1)}} = \left(\xi_\nu^{(1)}\right)^\mu \frac{\partial F_1}{\partial \eta^{(1)}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial \eta^{(1)}} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \eta^{(1)}}$$

und hierin die rechts stehenden Aggregate der Reihe nach gleich zu setzen sind:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \alpha_{1,\varkappa}^{(1)} + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \alpha_{n\varkappa}^{(1)} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \alpha_{n+1,\varkappa}^{(1)}\right) \xi_\nu^{(1)},$$

$$(k = 1, 2, \ldots \nu - 1, \nu + 1, \ldots n)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda} \left(\alpha_{\lambda 1}^{(1)} \xi_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{\lambda,\nu-1}^{(1)} \xi_{\nu-1}^{(1)} + \alpha_{\lambda,\nu}^{(1)} + \alpha_{\lambda,\nu+1}^{(1)} \xi_{\nu+1}^{(\,)} + \ldots\right.$$

$$\left. + \alpha_{\lambda,n}^{(1)} \xi_n^{(1)} + \alpha_{\lambda,n+1}^{(1)} \eta^{(1)}\right) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \eta} \left(\alpha_{n+1,1}^{(1)} \xi_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{n+1,\nu-1}^{(1)} \xi_{\nu-1}^{(1)} + \alpha_{n+1,\nu}^{(1)} + \alpha_{n+1,\nu+1}^{(1)} \xi_{\nu+1}^{(1)} + \right.$$

$$\left. \ldots + \alpha_{n+1,n}^{(1)} \xi_n^{(1)} + \alpha_{n+1,n+1}^{(1)} \eta^{(1)}\right),$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \alpha_{1,n+1}^{(1)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \alpha_{n,n+1}^{(1)} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \alpha_{n+1,n+1}^{(1)}\right) \xi_\nu^{(1)}$$

Da die Determinante des somit für die Grössen

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial \xi_n}, \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

bestehenden Gleichungssystemes gerade der Determinante der ersten Substitution, nämlich

$$\begin{vmatrix} \alpha^{(1)}_{1,1}, & \alpha^{(1)}_{1,n+1} \\ \cdot & \cdot \\ \alpha^{(1)}_{n+1,1} & .\ \alpha^{(1)}_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

gleichkommt, ist ersichtlich, dass wir die Ableitungen von F auf die Form bringen können:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda} = \left(\xi^{(1)}_\nu\right)^{\mu-1} h_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \qquad n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \left(\xi^{(1)}_\nu\right)^{\mu-1} h_{n+1},$$

wo $h_1, h_2, \ldots h_{n+1}$ homogene lineare Functionen von

$$F_1, \ \frac{\partial F_1}{\partial \xi^{(1)}_1}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial \xi^{(1)}_n}, \ \frac{\partial F_1}{\partial \eta^{(1)}}$$

sind.

Drückt man jetzt die Ableitungen von F_1 nach $\xi^{(1)}_1, \ldots \xi^{(1)}_n, \eta^{(1)}$ in entsprechender Weise durch die Variabeln $\xi^{(2)}_1, \qquad \xi^{(2)}_n, \eta^{(2)}$ aus und fährt so fort, so gelangt man endlich zu Darstellungen der folgenden Gestalt:

$$F = \left(\xi^{(1)}_\nu\right)^{\mu}\left(\xi^{(2)}_\nu\right)^{\mu_1}\ldots\left(\xi^{(r)}_\nu\right)^{\mu_{r-1}} F_r\left(\xi^{(r)}_1, \ldots \xi^{(r)}_n, \eta^{(r)}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda} = \left(\xi^{(1)}_\nu\right)^{\mu-1}\left(\xi^{(2)}_\nu\right)^{\mu_1-1} \qquad \left(\xi^{(r)}_\nu\right)^{\mu_{r-1}-1} H_\lambda\left(\xi^{(r)}_1, \ldots \xi^{(r)}_n, \eta^{(r)}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \left(\xi^{(1)}_\nu\right)^{\mu-1}\left(\xi^{(2)}_r\right)^{\mu_1-1}\ldots\left(\xi^{(r)}_\nu\right)^{\mu_{r-1}-1} H_{n+1}\left(\xi^{(r)}_1, \ldots \xi^{(r)}_n \eta^{(r)}\right)$$

wo $H_1, \ldots H_{n+1}$ ganze Functionen bedeuten; und hieraus kann man mit Hilfe der obigen Substitutionen noch die Formen gewinnen:

$$F = \left(\xi^{(r)}_\nu\right)^{\mu+\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}} \overline{F}_r\left(\xi^{(r)}_1, \ldots \xi^{(r)}_n, \eta^{(r)}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda} = \left(\xi^{(r)}_\nu\right)^{\mu+\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}-r} \overline{H}_\lambda\left(\xi^{(r)}_1, \ldots \xi^{(r)}_n, \eta^{(r)}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \left(\xi^{(r)}_\nu\right)^{\mu+\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}-r} \overline{H}_{n+1}\left(\xi^{(r)}_1, \ldots \xi^{(r)}_n, \eta^{(r)}\right)$$

Jetzt machen wir die Annahme, dass bei den aufeinanderfolgenden Substitutionen die Exponenten $\mu, \mu_1, \ldots \mu_r$ nicht abnehmen, so lässt sich zeigen, dass dieser Fall nur bei einer endlichen Anzahl von Substitutionen möglich ist und somit die Exponenten, die gewiss nicht wachsen, schliesslich abnehmen und bis auf Eins herabsinken. Dann aber ist wieder eine Entwicklung von $\xi_1^{(r)}, \quad \xi_n^{(r)}, \eta^{(r)}$ durch Potenzreihen in n Hilfsvariabeln möglich und auch ein System von Potenzreihen für $\xi_1, \quad \xi_n, \eta$ aufzustellen. Im Ganzen aber wird die Umgebung der mehrfachen Stelle $(a_1, \ldots a_n, b)$ unseres Gebildes durch eine endliche Anzahl von Systemen der Form

$$x_\nu - a_\nu = \mathfrak{P}_\nu(\tau_1^{(i)}, \ldots \tau_n^{(i)}) \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$
$$y - b = \mathfrak{P}_{n+1}(\tau_1^{(i)}, \ldots \tau_n^{(i)})$$

darzustellen sein.

Zum Beweise bemerke man, dass die als irreductibel vorausgesetzte Function $F(y, x_1, \ldots x_n)$ mit $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ keinen gemeinsamen Theiler in η besitzen kann und desshalb zwei ganze Functionen $\Phi((\xi_1, \quad \xi_n, \eta)$, $\Psi(\xi_1, \ldots \xi_n, \eta)$ existiren werden, der Beschaffenheit, dass

$$\Phi \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta} + \Psi \cdot F$$

eine rationale Function $R(\xi_1, \quad \xi_n)$ der Variabeln ξ allein wird. Benützt man nun die früheren Ausdrücke für F und $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ als Functionen von $\xi_1^{(r)}, \ldots \xi_n^{(r)}, \eta^{(r)}$ und ersetzt auch in Φ, Ψ und R die Grössen $\xi_1, \ldots \xi_n, \eta$ durch die für sie geltenden Ausdrücke der Form:

$$\xi_\lambda = \xi_\nu^{(r)}\left(c_\lambda + \varphi_\lambda(\xi_1^{(r)} \ldots \xi_n^{(r)}, \eta^{(r)})\right) \qquad (\lambda = 1, \ldots n)$$
$$\eta = \xi_\nu^{(r)}\left(c_{n+1} + \varphi_{n+1}(\xi_1^{(r)} \quad \xi_n^{(r)}, \eta^{(r)})\right)$$

so ergibt in der entstehenden Gleichung

$$\Phi(\xi_1^{(r)}, \ldots \xi_n^{(r)} \eta^{(r)}) \overline{H}_{n+1}(\xi_1^{(r)}, \ldots \xi_n^{(r)}, \eta^{(r)}) (\xi_\nu^{(r)})^{r\mu}$$
$$+ \overline{\Psi}(\xi_1^{(r)}, \ldots \xi_n^{(r)}, \eta^{(r)}). \overline{F}_r(\xi_1^{(r)}, \quad \xi_\nu^{(r)} \eta^{(r)}) (\xi_\nu^{(r)})^{r(\mu-1)} =$$
$$= R(\xi_1^{(r)}, \ldots \xi_n^{(r)} \eta^{(r)}).$$

der Vergleich der rechts und links heraustretenden Potenz von $\xi_\nu^{(r)}$, dass die Zahl r (d. h. die Zahl, welche besagt, wie oft unsere Substitutionen keine Verminderung des Exponenten μ hervorrufen) an eine obere Grenze gebunden ist.

Mit dieser Erkenntniss ist, wie gesagt, die Möglichkeit der Darstellung des Gebildes in der Umgebung einer mehrfachen Stelle in der verlangten Form erwiesen, und es bleibt uns nur mehr übrig, die Darstellungsart in der Umgebung unendlich ferner Stellen zu untersuchen. Doch diese erledigt man mit der einfachen Bemerkung, dass man $x_\nu - a_\nu$ und $y - b$ für $a_\nu = \infty$ und $b = \infty$ durch $\frac{1}{x_\nu} = u_\nu$ und $\frac{1}{y} = v$ zu ersetzen hat.

§ 3.

Nach der Darstellung des algebraischen Gebildes n^{ter} Stufe und m^{ter} Ordnung in der Umgebung jeder ihrer Stellen $(a_1, \ldots a_n, b)$ kann man daselbst auch jede rationale Function von y_1 $x_1, \ldots x_n$:

$$R(y_1 x_1, \quad . x_n) = X_0 + X_1 y + \ldots_{,,} + X_{m+1} y^{m-1},$$

wo $X_0, \ldots X_{m+1}$ gebrochene rationale Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sind, durch den Quotienten zweier Potenzreihen von n Hilfsvariabeln ausdrücken:

$$\frac{\mathfrak{P}_1(t_1, \quad . t_n)}{\mathfrak{P}_1(t_1, \ldots t_n)}$$

der gewiss in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(t_1, \ldots t_n)$ zu entwickeln ist, wenn $\mathfrak{P}_2(0, \quad .0)$ von Null verschieden ist.

Falls die Entwicklung von

$$R(y, x_1, \quad . x_n) - \mathfrak{P}(0, \ldots 0) = R(y, x_1, \ldots x_n) - R(b, a_1, \ldots a_n)$$

mit Gliedern μ^{ten} Dimension beginnt, heisse die Stelle $(a_1, \ldots a_n, b)$ eine μ-fache Nullstelle der genannten Differenz.

Ist oben $\mathfrak{P}_2$ $(0, \ldots 0)$ gleich Null, verschwindet aber $\mathfrak{P}_1(0, \quad .0)$ nicht, so heisse R an der Stelle $(a_1, \ldots a_n, b)$ von der μ^{ten} Ordnung unendlich, wenn die Entwicklung von $\mathfrak{P}_2(t_1, \ldots t_n)$ mit Gliedern μ^{ter} Dimension beginnt.

Ist endlich sowohl $\mathfrak{P}_1(0,\ldots 0)$ als auch $\mathfrak{P}_2\,(0,\ldots 0)$ Null, so denke man $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zunächst von gemeinsamen Theilern $\mathfrak{P}_0(t_1,\ldots t_n)$ befreit, stelle $R(y, x_1,\ldots x_n)$ durch

$$\frac{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1'}{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_2'} = \frac{\mathfrak{P}_1'(t_1,\ldots t_n)}{\mathfrak{P}_2'(t_1,\ldots t_n)}$$

dar, und nenne R an der Stelle $(a_1, \ldots a_n, b)$ im Falle $\mathfrak{P}_1'(0,\ldots 0) \lesseqgtr 0$ und $\mathfrak{P}_2'(0,\ldots 0)$ von Null verschieden oder Null ist endlich oder unendlich, und wenn Zähler und Nenner für $t_1 = \ldots = t_n = 0$ verschwinden, unbestimmt und zwar von der μ^{ten} Ordnung falls die Entwicklung von $\mathfrak{P}_2'$ mit Gliedern μ^{ter} Dimension beginnt.

Man kann nun zeigen, dass die rationale Function

$$\zeta = R(y, x_1,\ldots x_n)$$

einer Gleichung m^{ten} Grades genügt, deren Coëfficienten rationale Functionen von $x_1,\ldots x_n$ sind.

Zum Beweise beachte man einerseits, dass man jede rationale Function ζ als homogene lineare Function von m rationalen Functionen:

$$\zeta_\mu = X_{\mu,0} + X_{\mu,1}\,y + \ldots + X_{\mu,\,m-1}\,y^{m-1} \;(\mu = 1, 2,\ldots m)$$

ausdrücken kann, wenn sie nur so gewählt sind, dass die Determinante

$$\sum \pm\, X_{1,0}\, X_{21} \ldots X_{m,\,m-1}$$

nicht identisch verschwindet, oder keine Identität der Form

$$\zeta_1\, Z_1 + \ldots + \zeta_m\, Z_m = 0$$

besteht, ausser wenn die rationalen Functionen $Z_1,\ldots Z_m$ von $x_1,\ldots x_n$ sämmtlich verschwinden. Ist aber nunmehr

$$\zeta = Y_1\, \zeta_1 + \ldots Y_m\, \zeta_m$$

so bilde man die Producte:

$$\zeta\zeta_\mu = Y_{\mu 1}\,\zeta_1 + \ldots + Y_{\mu,\,m}\,\zeta_m \;(\mu = 1,\ldots m)$$

und folgere aus der Existenz dieser Relationen das Bestehen der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} Y_{11} - \zeta, & Y_{12}, & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22}-\zeta, & Y_{2m} \\ & & \\ & & \\ Y_{m1} & Y_{m,2} & Y_{m,m}-\zeta \end{vmatrix} = 0$$

die wir kürzer in der Form schreiben:

$$G(\zeta, x_1, \ldots x_n) = \zeta^m + A_1\, \zeta^{m-1} + \ldots + A_m = 0.$$

Anderseits erhält man diese Gleichung, wenn man das Product

$$\prod_{\mu=1}^{m} (\zeta - R(y^{(\mu)}, x_1 \ldots x_n))$$

in welchem $y^{(\mu)}$ die für ein Werthesystem $x_1, \ldots x_n$ aus der Gleichung $F = 0$ hervorgehenden y-Werthe bezeichnen, auswerthet, dann die symmetrischen Functionen der Lösungen y durch rationale Functionen der x darstellt und das Resultat von der Form:

$$(B_0 \zeta^m + B_1 \zeta^{m-1} + \ldots + B_m)\, \frac{1}{B_0'} = \frac{H(\zeta, x_1, \ldots x_n)}{h(x_1, \ldots x_n)}$$

gleich Null setzt, wo übrigens der Coëfficient von ζ^m offenbar gleich $h(x_1, \ldots x_n)$ sein wird, wornach man voraussetzen kann, dass die Coëfficienten der ζ-Potenzen in H keinen gemeinsamen Theiler besitzen.

Es lässt sich nun zeigen, dass G oder hier H eine irreductible Function oder die Potenz einer solchen ist.

Es sei H in das Product verschiedener irreductibler ganzer Functionen $H_1, H_2, \ldots H_r$ zerlegbar, dann ist zunächst ersichtlich, dass jede Function

$$H_\rho(R(y, x_1, \ldots x_n), x_1, \ldots x_n) \quad (\rho = 1, 2, \ldots r)$$

durch F theilbar sein muss. In der That, bedeutet $(x^{(0)})$ eine Stelle, die weder Nullstelle von $h(x_1, \ldots x_n)$, noch Nullstelle des

Coëfficienten von y^m in F, noch Nullstelle der Discriminante $D(x_1,\ldots x_n)$ von $F=0$ ist, so gehören zu jeder Stelle (x') einer gewissen Umgebung von $(x^{(0)})$ endliche Wurzeln ζ der Gleichungen

$$H_\rho = 0 \quad (\rho = 1, 2\ldots r)$$

und jeder Wurzel ζ' muss man eine Wurzel y' der Gleichung $F(y, x_1', \ldots x_n') = 0$ so zuordnen können, dass

$$\zeta' - R(y', x', \ldots x_n') = 0$$

wird, denn andernfalls könnte das obige Product nicht verschwinden. Daher hat jede der Functionen H_ρ für jede Stelle einer Umgebung von $(x^{(0)})$ eine Wurzel mit F gemein und ist durch F theilbar.

Wenn somit jede der Functionen H_ρ für alle Wurzeln der Gleichung $F(y, x_1', \ldots x_n)$ verschwindet, folgt, dass irgend zwei der irreductiblen Functionen von H_ρ für jede Stelle (x') eine gemeinsame Wurzel ζ besitzen und desshalb durch einander theilbar sind, so dass sie bis auf einen blos von den Variabeln x abhängigen Factor übereinstimmen. Da aber H keinen solchen Factor haben kann, erhält man mit Rücksicht darauf, dass h zugleich mit H reductibel sein wird, die Gleichung

$$\prod_{\mu=1}^{m} (\zeta - R(y^{(\mu)}, x_1, \ldots x_n)) = \left(\frac{H_\rho(\zeta, x_1, \ldots x_n)}{h_\rho(x_1, \ldots x_n)}\right)^r$$

wo wieder h_ρ der Coëfficient von $\zeta^{\frac{m}{r}}$ in H_ρ ist.

Wenn wir bei dem Beweise der Einfachheit halber von einer einfachen endlichen Stelle $(x^{(0)})$ ausgegangen sind, hat das gar nichts auf sich und bei dem Übergang zu einer der ausgeschlossenen Stellen, wird man gewiss auch die Gleichung

$$H_\rho(\zeta, x_1, \ldots x_n) = 0$$

erfüllt finden.

Ist (wie bei jeder Primzahlordnung m) $r=1$ und somit schon H irreductibel, so kann man die Functionen

$$1, \zeta, \zeta^2, \ldots \zeta^{m-1}$$

zur Darstellung jeder rationalen Function benützen, denn wenn zwischen denselben eine Gleichung

$$Z_0 + Z_1\zeta + \ldots + Z_{m-1}\zeta^{m-1} = 0$$

bestünde, könnte y nicht einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades genügen.

§. 4.

Wir betrachten nunmehr statt einer rationalen Function ζ ein System von n rationalen Functionen

$$\xi_\nu = R_\nu(y, x_1, \ldots x_n)$$

das gegenüber dem Gebilde n^{ter} Stufe dieselbe wichtige Rolle spielt, wie eine dem Gebilde erster Stufe zugeordnete rationale Function.

Heissen die zu den Functionen ξ_ν gehörigen Gleichungen m^{ten} Grades in ξ_ν

$$H_\nu(\xi_\nu, x_1, \ldots x_n) = 0 \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

zunächst alle irreductibel, so gehört zu festen Werthen des Functionensystems $(\xi'_1, \ldots \xi'_n)$ im Allgemeinen eine endliche Anzahl verschiedener Stellen $(x'_1, \ldots x'_n)$. Die durch die Worte „im Allgemeinen" bezeichnete Beschränkung will sagen, dass es auch Stellen $(\xi'_1, \ldots \xi'_n)$ geben kann, denen unendlich viele Stellen (x') zuzuordnen sind, die eine $2(n-\nu)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in dem $2n$fach ausgedehnten Gebiete der n complexen Variabeln x bilden.

Die im Allgemeinen auftretende endliche Anzahl von Stellen (x') suche man aus den Eliminationsgleichungen

$$K_\nu(\xi'_1, \ldots \xi'_n, x_\nu) = 0$$

die in x_ν vom Grade $m_1\, m_2 \ldots m_n$ sind, wenn die Ordnung der Gleichungen $H_\nu(\xi'_\nu, x_1, \ldots x_n) = 0$ mit m_ν bezeichnet wird.

Gibt man K_ν die Form

$$P_{\nu 1}\, H_1 + \ldots P_{\nu n}\, H_n,$$

wo die Grössen $P_{\nu\mu}$ ganze rationale Functionen von $x_1, \ldots x_n$, $\xi'_1, \ldots \xi'_n$ bezeichnen, so sieht man dass die Determinante

$$\Delta = \sum \pm P_{11}\, P_{22} \ldots P_{nn}$$

für ein einfaches System nicht zusammengehöriger Lösungen der Gleichungen $K_\nu = 0$ verschwinden muss, aber für eine Combination dieser Lösungen, welche auch die Gleichungen

$$H_\nu(\xi'_\nu, x_1, \ldots x_n) = 0$$

erfüllen,

$$\Delta = \left(\frac{\partial K_1}{\partial x_1}\right) \quad \left(\frac{\partial K_n}{\partial x_n}\right) \cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\right), & \left(\frac{\partial H_n}{\partial x_1}\right) \\ & \\ \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_n}\right), & \left(\frac{\partial H_n}{\partial x_n}\right) \end{vmatrix}^{-1}$$

wird. Im Falle vielfacher Lösungen $(x_1, \ldots x_n)$ der Gleichungen $H_\nu = 0$ gilt diese Beziehung nicht mehr, da eine μ-fache Lösung dadurch charakterisirt ist, dass die Entwicklung der Functionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial H_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial H_n}{\partial x_n}$$

mit Gliedern $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Dimension beginnt.

Ohne in diesem Falle auf die Bestimmung von Δ einzugehen, wenden wir uns gleich zu der Aufgabe, dem Werthesystem $\xi'_1, \ldots \xi'_n$ mit Hilfe der gefundenen Lösungssysteme $(x'_1, \ldots x'_n)$ Stellen des gegebenen algebraischen Gebildes zuzuordnen.

Jeder Stelle (x') gehört mindestens ein y Werth y' zu, für den nicht allein die Gleichung $F(y', x'_1 \quad . x'_n) = 0$ besteht, sondern auch die Beziehungen

$$\xi'_\nu - R_\nu\,(y', x'_1 . \quad . x'_n) = 0$$

erfüllt sind. Falls die Functionen alle irreductibel sind, kann man diesen y Werth als rationale Function von $x_1, \ldots x_n$, $\xi_1, \ldots \xi_n$ darstellen, und man erhält zu einer Stelle $(\xi'_1 \qquad \xi'_n)$ $m_1 \ldots m_n$ Stellen des algebraischen Gebildes.

Wenn aber

$$H_\nu\left(\xi^{(m)}_\nu, x_1, \ldots x_n\right) = \left(\overline{H}_\nu(\xi^{(e_\nu)}_\nu, x_1, \ldots x_n)\right)^{f_\nu}$$

ist, wo $e_\nu f_\nu = m$ und die Ordnung von $\overline{H}_\nu$ in den Variabeln x $\frac{m_\nu}{f_\nu}$ wird, so werden nach Bestimmung der zu einem Werthesystem $\xi'_1 \quad \xi'_n$ gehörigen $\frac{m_1 \ldots m_n}{f_1 \ldots f_n}$ gemeinsamen Lösungen $(x'_1 \ldots x'_n)$ die entsprechenden y Werthe aus einer Gleichung des $(f_1 \ldots f_n)^{\text{ten}}$ Grades in y:

$$H(y, x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots \xi_n) = 0$$

hervorgehen, deren Coëfficienten rationale Functionen der Grössen $x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots \xi_n$ sind und man findet daher wiederum $m_1 \ldots m_n$ zu dem Werthesystem $(\xi'_1, \ldots \xi'_n)$ gehörige Stellen des Gebildes.

Man nennt diese Anzahl von Stellen, welche besagt, wie oft das System rationaler Functionen $R_1, \ldots R_n$ des Werthesystems $\xi'_1 \ldots \xi_n$ annimmt, den **Grad** des Functionensystems.

Man kann den zweiten Fall auf den ersten zurückführen wenn man die n Constanten der folgenden Substitution

$$\overline{x}_1 = x_1 + c_1 y, \ldots \quad \overline{x}_n = x_n + c_n y, \; \overline{y} = y$$

so wählt, dass die Stellen

$$\left(x_1^{(i)} + c_1 y_h^{(i)}, \qquad x_n^{(i)} + c_n y_h^{(i)}\right)$$

$$\left[i = 1, 2, \ldots \frac{m_1 \ldots m_n}{f_1 \ldots f_n}, h = 1, 2, \ldots (f_1 \quad f_n)\right]$$

verschieden ausfallen, denn dann sind offenbar in den neuen Variabeln die zu dem durch die Gleichung

$$F(\overline{x}_1 - c_1 \overline{y}, \ldots \overline{x}_n - c_n \overline{y}, \overline{y}) = \Phi(\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n, \overline{y}) = 0$$

definirten Gebilde und den rationalen Functionen

$$\xi_\nu = R_\nu(\overline{x}_1 - c_1 \overline{y}, \qquad \overline{x}_n - c_n \overline{y}, \overline{y}) = \mathrm{P}(\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n \overline{y})$$

gehörigen Gleichungen $H_\nu = 0$ irreductibel.

§. 5.

Stellt man jetzt neben das Functionensystem

$$\xi_\nu = R_\nu(y, x_1, \ldots x_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

des N^{ten} Grades noch eine $(n+1)^{\text{te}}$ Function

$$\eta = R_{n+1}(y_1\, x_1, \ldots x_n),$$

so entsprechen einer Stelle $(\xi_1', \ldots \xi_n')$ im Allgemeinen N-Stellen des algebraischen Gebildes und N-Werthe η.

Drückt man y wie oben rational durch $x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots \xi_n$ aus und eliminirt aus den n irreductiblen Gleichungen

$$H_\nu(\xi_\nu, x_1, \ldots x_n) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

und der Gleichung

$$\eta - R_{n+1}(y, x_1, \ldots x_n) = \eta - \overline{R}_{n+1}(x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots \xi_n) = 0$$

die Variabeln $x_1, \ldots x_n$, indem man nach Auswerthung des Productes

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\eta - R_{n+1}\left(x_1^{(i)}, \ldots \; x_n^{(i)} \xi_1, \ldots \xi_{(n)}\right)\right)$$

die elementarsymmetrischen Functionen der Gleichungen $K_\nu = 0$ einführt, so erhält man eine algebraische Gleichung

$$\Phi(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n) = 0,$$

die in η vom N^{ten} Grade ist, und zwar wird auch hier Φ eine irreductible Function oder die ganzzahlige Potenz einer solchen. Im ersten Falle kann man umgekehrt $x_1, \ldots x_n$ und y rational durch $\xi_1, \ldots \xi_n, \eta$ darstellen, denn die Gleichungen

$$K_\nu(x_\nu, \xi_1, \ldots \xi_n) = 0, \;\; \eta = \overline{R}_{n+1}(x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots \xi_n),$$
$$\Phi(\eta, \xi_1, \ldots \xi_n) = 0$$

entsprechen den früheren

$$H_\nu(x_1, \ldots x_n, \xi_\nu) = 0, \;\; y = R(x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots \xi_n),$$
$$F(y, x_1, \ldots x_n) = 0.$$

Man nennt die durch die Gleichungen $F = 0$ und $\Phi = 0$ definirten Gebilde i n e i n a n d e r t r a n s f o r m i r b a r.

Im Allgemeinen entspricht jeder Stelle des einen Gebildes F eine Stelle des zweiten Φ und umgekehrt, aber es kann sehr wohl eintreten, dass für einzelne einfache oder mehrfache Stellen oder $2(n-\nu)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten von Stellen des einen Gebildes die zugehörigen Stellen des zweiten höhere Mannigfaltigkeiten constituiren.[1] Ist $(y'_1 x'_1, \ldots x'_n)$ eine Stelle, an welcher $R_1, \ldots R_n, R_{n+1}$ unbestimmt werden, so muss man zur Ermittlung der entsprechenden Stellen von Φ das Werthesystem $(y, x_1, \ldots x_n)$ der Stelle $(y'_1 x'_1, \ldots x'_n)$ nähern und bei dem Grenzübergang ergeben sich die verlangten Mannigfaltigkeiten. Dabei wird man am besten die Darstellung des Gebildes F in der Umgebung von $(y'_1 x'_1 \ldots x'_n)$ in der Form

$$x_\nu - x'_\nu = \mathfrak{P}_\nu(\varepsilon\tau_1, \ldots \varepsilon\tau_n) \quad (\nu = 1, \ldots n)$$
$$y - y' = \mathfrak{P}_{n+1}(\varepsilon\tau_1, \ldots \varepsilon\tau_n)$$

benützen, wo ε eine unbestimmte Constante ist, die man schliesslich nach Null convergiren lässt.

Eine wichtige Untersuchung betreffs des irreductiblen algebraischen Gebildes bleibt noch übrig, nämlich die, ob denn y eine monogene analytische Function der Grössen $x_1, \ldots x_n$ ist, oder ob das Gebilde monogen ist.

Der Beweis hiefür wird sich offenbar führen lassen, wenn das Gebilde in die Umgebung einer Stelle $(y'_1 x'_1, \ldots x'_n)$ durch ein einziges „Functionenelement" darstellbar ist, denn dann wird man den Zusammenhang zweier Elemente um die einfachen Stellen $(a'_1 \ldots a'_n, b')$ und $(a''_1 \ldots a''_n, b'')$ dadurch finden, dass man diese Elemente in dem $(2n)$-fach ausgedehnten Gebiete einfacher Stellen nach zwei Stellen $(a'_1 \ldots a'_n, b)$ und $(a''_1, \ldots a''_n, b'')$ fortsetzt, die in der genannten Umgebung von $(y'_1, x'_1, \ldots x'_n)$ liegen.

Wenn das vorgegebene Gebilde F keine solch ausgezeichnete Stelle $(y'_1, x'_1, \ldots x'_n)$ besitzt, muss man trachten, F in ein Gebilde Φ zu transformiren, welches die verlangte Eigenthümlichkeit hat, und wenn $(\alpha'_1, \ldots \alpha'_n, \beta')$ und $(\alpha'', \ldots \alpha''_n, \beta'')$ die $(a'_1, \ldots a'_n, b')$, $(a''_1, \ldots a''_n, b'')$ entsprechenden Stellen von Φ sind, so hängen die Elemente um diese Stellen gewiss zusammen, also auch die um die Stellen von F giltigen Elemente.

Wenn wir annehmen, dass das Gebilde $\Phi(\eta^{(N)}, \xi_1, \ldots \xi_n) = 0$ in der Umgebung der Stelle $(\infty, \ldots \infty)$ durch ein einziges Element darstellbar ist, so lautet die Aufgabe im Besonderen folgendermassen: Es ist ein System rationaler Function N^{ten} Grades

[1] Vergl. Nöther, Mathem. Annalen. Bd. II.

$$\xi_\nu = R_\nu(y_1 x_1, \ldots x_n) \quad (\nu = 1, \ldots n)$$

ausfindig zu machen, welches an einer Stelle $(x'_1, \ldots x'_n, y')$ von der Nten Ordnung unendlich wird, und diesem System hat man eine weitere Function

$$\eta = R_{n+1}(y_1 x_1, \ldots x_n)$$

so zuzugesellen, dass η an der Stelle $(x'_1, \ldots x'_n, y')$ von der $(N+1)$ten Ordnung unendlich wird, denn dann ist η als Function von $\xi_1, \ldots \xi_n$ betrachtet in der Umgebung von $(\infty, \ldots \infty)$ durch ein Element darstellbar.

Die Schwierigkeit liegt nunmehr in der Construction eines Functionensystems $\xi_1, \ldots \xi_n$, welches an vorgegebenen Stellen unendlich wird, wobei wir die Vielfachheit einer regulären Stelle $\xi'_1 \ldots \xi'_n$ nach der Darstellung von $\xi_\nu - \xi'_\nu$ in der Form

$$\xi_\nu - \xi'_\nu = \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_1, \ldots t_n) \quad (\mathfrak{P}^{(\nu)}(0, \ldots 0) = 0)$$

μ-fach nennen, wenn die Functionaldeterminante der Reihen $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ mit Gliedern $(\mu-1)$ter Dimension beginnt, und eine ausserwesentlich singuläre Stelle μter Ordnung, wo $\xi_1, \ldots \xi_n$ unendlich werden, diejenige genannt wird, an welcher bei der Darstellung

$$\xi_\nu = \frac{1}{\mathfrak{P}^{(\nu)}(t_1 \ldots t_n)} \quad (\mathfrak{P}^{(\nu)}(0, \ldots 0) = 0)$$

die Functionaldeterminante der $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ auch wieder mit Gliedern $(\mu-1)$ter Dimension beginnt. Daneben kann das System der n-Functionen ξ_ν die Darstellungsform

$$\xi_\nu = \frac{\mathfrak{P}_1^{(\nu)}(t_1, \ldots t_n)}{\mathfrak{P}_2^{(\nu)}(t_1 \ldots t_n)}$$

haben, wo $\mathfrak{P}_1^{(\nu)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(\nu)}$ an der Stelle $(t) = (0)$ verschwinden, ohne dass ein dem Zähler und Nenner gemeinsamer Factor daselbst Null ist. Auch hier benennen wir die Ordnung der ausserwesentlich singulären Stelle, an der $\xi_1, \ldots \xi_n$ unbestimmt werden, nach der um Eins vermehrten geringsten Dimensionszahl der Entwicklung der Functionaldeterminante der Nenner $\mathfrak{P}_2^{(\nu)}$.

Handelt es sich um die Ermittlung von n rationalen Functionen R_ν, die an einer bestimmten Anzahl vorgegebener Stellen des Gebildes F von bestimmter Ordnung unendlich werden, so ist im Vorhinein ersichtlich, dass man die genannte Anzahl nicht ganz willkürlich wählen kann, denn wenn wir z. B. annehmen, dass es ein System von Functionen $\xi_1, \ldots \xi_n$ gibt, welches an einer einzigen Stelle von der ersten Ordnung unendlich wird, auf dass das System den Grad Eins besitzt, so werden die Gleichungen $H_\nu = 0$ nur vom ersten Grade und man kann $x_1, \ldots x_n, y$ als rationale Functionen der n Parameter $\xi_1, \ldots \xi_n$ ausdrücken, was jedenfalls eine Eigenthümlichkeit des ursprünglichen Gebildes involvirt, die wir im allgemeinen nicht festsetzen können. Man muss vielmehr zeigen, dass für den Grad eine untere Grenze $\rho+1$ existirt, dadurch definirt, dass man wohl n rationale Functionen $R_1, \ldots R_n$ angeben kann, welche an ρ von einander verschiedenen regulären Stellen

$$(a_1^{(\pi)}, \ldots a_n^{(\pi)}, b^{(\pi)}) \qquad (\pi = 1, \ldots \rho)$$

und ausserdem an einer Stelle $(x'_1 \ldots x'_n, y')$ von der ersten Ordnung unendlich werden, dass aber kein System angebbar ist, welches nur an den ρ Stellen $(a_1^{(\pi)}, \ldots a_n^{(\pi)}, b^{(\pi)})$ von der ersten Ordnung unendlich wird.

Man nennt ρ den Rang des gegebenen Gebildes und es ist klar, dass dieser für alle Individuen der Classe von ineinander eindeutig transformirbaren Gebilden derselbe ist.

Die Theorie des zu einem gegebenen Gebilde gehörigen Systems rationaler Functionen von bestimmtem Grade habe ich allgemein noch nicht ausführen können. Da ich glaube, die Untersuchung der zu einem besonderen Gebilde gehörigen Functionen mit vorgegebenen Unendlichkeitsstellen an dieser Stelle nicht anknüpfen zu sollen, schliesse ich hiermit.