Über die Steiner'sehen Mittelpunktscurven

(I. Mittheilung)

von

Karl Bobek in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. December 1888.)

In der umfangreichen Abhandlung: „Über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben",[1] hat Steiner viele Sätze ohne Beweis hingestellt und zahlreiche Fragen an dieselben geknüpft. So viel mir bekannt ist, wurden bis jetzt weder die ersten vollständig bewiesen, noch die letzten beantwortet. Herr Güssfeldt hat in einer Arbeit[2] die Sätze von Steiner, die sich an die Curven dritter Ordnung anschliessen, bewiesen. Hiebei ging er, wie am Schlusse der Arbeit erwähnt wird, auf die von Steiner in §. 15, IV, auf S. 538 gegebene Construction des Berührungspunktes der Enveloppe $\mathfrak{S}^9$ auf einer ihrer Tangente $\mathfrak{S}$ nicht ein. Aber auch die Construction des Berührungspunktes der Enveloppe S_1^6 auf einer ihrer Tangenten, wie sie Steiner in §. 15, II, 7, auf S. 534 angibt, wurde nicht bewiesen.

Ich will im Folgenden die Sätze der oben genannten Abhandlung beweisen, soweit dies nicht Steiner selbst that, oder mit Hilfe der daselbst gegebenen Andeutungen dies leicht geschehen kann. In der vorliegenden Mittheilung werden die von Steiner in §. 17 und §. 20 auf Curven vierter Ordnung

---

[1] Crelle, Journal für Mathematik, 47. Bd., S. 7—105, oder: Gesammelte Werke II. Bd., S. 503—596. Die Citate im Texte beziehen sich immer auf letztere.

[2] Mathem. Ann. II. Bd., S. 65—127.

bezüglichen Sätze bewiesen und alle daselbst aufgestellten Fragen beantwortet. Aus der Fragestellung von Steiner ist ersichtlich, dass er die richtige Antwort vermuthete, und dass er wohl nur aus Mangel an einem Beweise dem Satze die Form der Frage gab. Da nun, wie aus Folgendem ersichtlich, die Beweise auf analytischem Wege äusserst einfach sind, so muss man wohl annehmen, dass Steiner die Sätze nicht auf diesem Wege fand.

Bevor ich zu den Curven vierter Ordnung übergehe, will ich noch die beiden oben erwähnten Constructionen des Berührungspunktes der Enveloppe auf ihrer Tangente beweisen.

I. Construction des Berührungspunktes der $\mathfrak{S}^9$ und S_1^6 auf ihren Tangenten.

1. Ist C^3 eine ebene Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt, so ist die Enveloppe der Geraden $\mathfrak{S}$, welche die Berührungspunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ paralleler Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ von C^3 mit einander verbinden, eine Curve neunter Classe $\mathfrak{S}^9$. Sind nun $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}'_1$ zwei andere parallele Tangenten von C^3, so dass $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'_1$ in den Punkten $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}'_1$ berühren, die auf C^3 den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ benachbart sind, so ist die Tangente $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_1} = \mathfrak{S}'$ der Tangente $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{S}$ benachbart, und ihr Schnittpunkt hat zur Grenzlage den Berührungspunkt von $\mathfrak{S}^9$ auf $\mathfrak{S}$. Errichtet man nun in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'_1$ die Normalen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}'_1$ von C^3 und schneiden einander $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ in m, sowie $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}'_1$ in m_1; so ist klar, dass $\overline{mm_1}$ durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ geht. Da m, m_1 zur Grenzlage die Krümmungsmittelpunkte der C^3 für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ haben, so folgt:

Der Berührungspunkt $\mathfrak{s}$ jeder beliebigen Sehne $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{S}$ mit ihrer Ortscurve $\mathfrak{S}^9$ ist einfach dadurch bestimmt, dass er mit den beiden Krümmungsmittelpunkten, etwa m und m_1, der Basis C^3 in dem Endpunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ der Sehne in einer Geraden liegt, so dass die Gerade $\overline{mm_1}$ allemal die Sehne $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}$ im verlangten Berührungspunkte $\mathfrak{s}$ schneidet (Steiner §. 15, IV, S. 538).

Es möge bemerkt werden, dass vorstehende Construction des Berührungspunktes $\mathfrak{s}$ der Enveloppe der Sehnen $\mathfrak{S}$, welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten mit einander verbinden, für eine Basis beliebiger Ordnung gilt.

2. Zur Bestimmung des Berührungspunktes einer Tangente von S_1^6 möge folgende Construction vorausgeschickt werden:

Hat man zwei Strahlenpaare AA_1, BB_1 einer Involution J_2 zweiten Grades in p, die einander harmonisch trennen, so kann man zu jedem Strahl C den in dieser Involution entsprechenden C_1 in nachstehender Weise bestimmen: Man ziehe Fig. 1 durch einen willkürlichen Punkt c von B eine Parallele zu B_1, welche von A und A_1

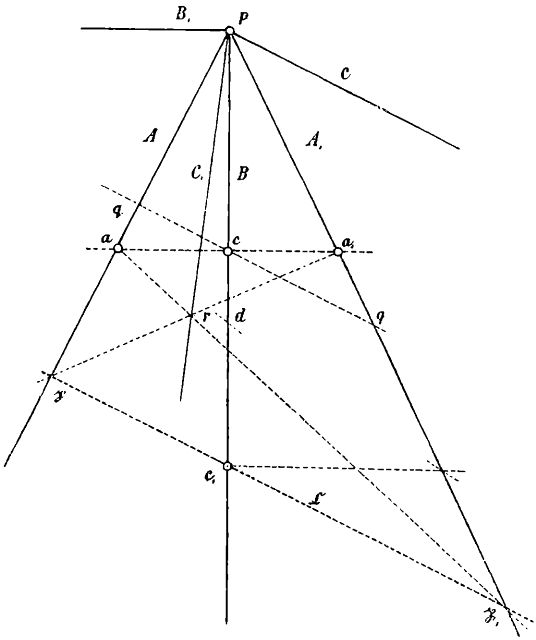

Fig. 1.

in den Punkten a, a_1 geschnitten wird, so dass c die Mitte von aa_1 ist. Trägt man nun $cc_1 = pc$ von c aus auf B ab, so dass c die Mitte von pc_1 wird, und zieht durch c_1 die Parallele $\mathfrak{C}$ zu C, welche A und A_1 in $\mathfrak{p}$, respective $\mathfrak{p}_1$ schneidet, so treffen einander die Geraden $\overline{a\mathfrak{p}_1}$ und $\overline{a_1\mathfrak{p}}$ in einem Punkte r, der mit p verbunden den Strahl C_1 gibt, der C in der Involution J_2 entspricht.

Denn beschreibt C den Strahlenbüschel (p), so durchlauft r einen Kegelschnitt K^2, der durch p, a, a_1 und durch d auf B geht (so dass $cd = \frac{1}{3} cc_1$ ist), in a, a_1 die Geraden $\overline{c_1 a}$ und $\overline{c_1 a_1}$ berührt. Daher wird der Strahlenbüschel, welcher r aus p projicirt, zum

Strahlenbüschel, den C beschreibt, projectivisch, denn der Büschel $a(r) = a(\mathfrak{p}_1)$ ist zu beiden projectivisch. Hiebei entsprechen einander die Strahlen B_1 und B, sowie A_1 und A, und letztere, wie man leicht erkennt, involutorisch, mithin bilden C und C_1 ein Paar der durch AA_1 und BB_1 bestimmten Involution.

Zieht man durch c die Parallele zu C, so schneidet dieselbe A und A_1 in den Mitten q und q_1 der Strecken $p\mathfrak{p}$ und $p\mathfrak{p}_1$, so dass man, sowie q und q_1 gegeben sind, die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ erhält, wenn man die Strecke $\mathfrak{p}q$, respective $\mathfrak{p}_1 q_1$, über q, respective q_1, hinaus auf A oder A_1 abträgt.

Die Curve S_1^9 wird von denjenigen Geraden der Ebene einer Curve dritter Ordnung C^3 eingehüllt, welche C^3 in drei Punkten $a c a_1$ so schneiden, dass c die Mitte von $a a_1$ ist. Die Classe ergibt sich einfach durch folgende Betrachtung. Zieht man durch einen willkürlichen Punkt t der Ebene von C^3 Gerade, welche C^3 in den Punkten a, a_1, a_2 treffen und bestimmt auf jeder Geraden die Mitten der drei Strecken aa_1, aa_2, a_1a_2, so ist der Ort dieser Punkte eine Curve sechster Ordnung t^6, welche t zum dreifachen Punkte besitzt, dessen Tangenten diejenigen drei Sehnen von C^3 sind, die in t halbirt werden. Die t^6 hat ferner in den drei Punkten α, β, γ, in welchen C^3 von der unendlich fernen Geraden G_∞ ihrer Ebene geschnitten wird, Doppelpunkte, und schneidet C^3 auch in den 6 Berührungspunkten der Tangenten von C^3 aus t.

Da von den 18 Schnittpunkten der t^6 mit C^3 die doppelt gezählte G_∞ in α, β, γ ihrer sechs, die Polare A^2 von t in Bezug auf C^3 ihrer auch sechs enthält, so liegen die letzten sechs auch auf einem Kegelschnitte C^2 und sind so gelegene Punkte c, dass $\overline{tc}$ die C^3 noch in zwei Punkten a, a_1 schneidet, so dass c die Mitte von $a a_1$ ist. Die sechs Geraden $\overline{tc}$ sind die sechs durch t gehenden Tangenten von S_1^6.

Ist G eine beliebige Gerade der Ebene und zieht man durch ihre Punkte g die drei Sehnen S_1 der C^3, welche in g halbirt werden, so hüllen diese S_1 eine Curve sechster Classe G^6 ein, welche G zur dreifachen Tangente hat und in den Mitten der drei Strecken dieselbe berührt, welche die drei Schnittpunkte von G mit C^3 bestimmen.

Ist t ein willkürlicher Punkt der Ebene, so werden die sechs Tangenten von G^6, welche durch t gehen, die sechs Punkte auf G

bestimmen, in welchen t^6 die G schneidet. Hieraus folgt: Ist t ein Punkt von G^6, so wird die zugehörige t^6 die Gerade G in dem Punkte berühren, in welchen G die Tangente des Punktes t von G^6 schneidet; und umgekehrt ist G die Tangente von t^6, so ist t ein Punkt der Enveloppe G^6, dessen Tangente die Gerade ist, welche t mit dem Berührungspunkte von G verbindet. Sei nun S_1 eine Tangente von S_1^6, so dass diese Gerade also C^3 in den Punkten $a c a_1$ trifft, wobei c die Mitte von $a a_1$ ist, und lassen wir den Punkt t die Gerade S_1 durchlaufen. Dann werden die zugehörigen t^6 stets durch c gehen und derjenige Punkt s, welchem eine s^6 zugehört, die in c die C^3 berührt, wird offenbar ein Punkt der S_1^6 sein.

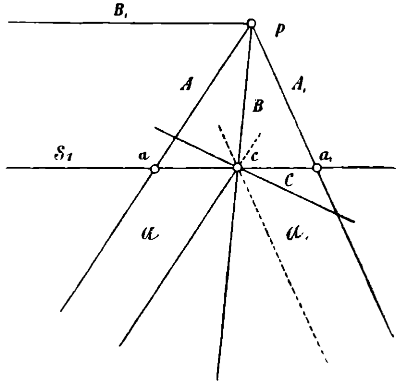

Fig. 2.

Die Curven t^6 haben nun in c Tangenten, welche einen Büschel bilden, der projectivisch ist zu der von t auf S_1 durchlaufenen Punktreihe. Und zwar entsprechen den drei Punkten t_∞, a, a_1 die Geraden $\overline{cp}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}_1$ parallel zu A_1 und $\mathfrak{A}$ parallel zu A durch c gezogen wird und p der Schnittpunkt der Tangenten A, A_1 von C^3 in a und a_1 ist. (Vgl. hiezu die Entwicklung der II. Mittheilung §. 2. 1.)

Denn ist t_∞ der Punkt t, dann werden die Strahlen durch t_∞ zu einander parallel und der, welcher durch den benachbarten Punkt a' von a zu S_1 parallel geht, enthält auch den benachbarten Punkt a_1' zu a_1 und die Mitte c' von $a' a_1'$ liefert daher mit c verbunden eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt p der Geraden $\overline{aa'}$ und $\overline{a_1 a_1'}$, d. h. der Tangenten A, A_1 in a und a_1 geht. Es ist also $\overline{pc} = B$ Tangente von t_∞^6.

Rückt t in a_1, so wird der benachbarte Punkt a' mit a_1 verbunden eine Mitte c' von $a_1 a'$ liefern, so dass $\overline{cc'}$ parallel zu $\overline{a\,a_1'}$ oder zur Tangente A wird. Die Curve t^6 zerfällt für den Punkt a_1, wie man leicht erkennt, in eine a_1^3, welche die Mitten der Strecken $a_1 a$ und $a_1 a_2$ enthält, wenn a, a_2 die Schnittpunkte einer beliebig durch a_1 gehenden Geraden mit C^3 sind; und eine $a_1'^3$, welche die Mitte der Strecke $a a_2$ trägt. a_1^3 berührt C^3 in a_1 und ist zu C^3 ähnlich und ähnlich liegend mit a_1 als Ähnlichkeitscentrum. Sie schneidet C^3 ausser auf G_∞ und in a_1 noch in 4 Punkten c, welche mit a_1 verbunden 4 Tangenten von S_1^6 liefern. Die $a_1'^3$ hat in a_1 einen Doppelpunkt und schneidet C^3 ausser auf G_∞ noch in 4 Punkten, die paarweise auf zwei Strahlen durch a_1 liegen, welcher Punkt die Mitte der Sehnen wird. Diese 2 Tangenten von S_1^6 sind gleichzeitig auch Tangenten von $a_1'^3$ in a_1.

Analog wird die Tangente in c der dem Punkte a entsprechen a^6, welche ebenfalls zerfällt, zu A_1 parallel sein.

Denkt man sich nun aus p die Punktreihe, welche t durchlauft, projicirt und gleichzeitig durch p zu den Tangenten G der zugehörigen t^6 im Punkte c die Parallele G' durch p gezogen, so erhält man in p eine Strahleninvolution, gebildet von den Strahlen $\overline{pt}$ und G' denn die Strahlen A, A_1 von p entsprechen einander involutorisch. Bezeichnet man die durch p zu S_1 gezogene Parallele mit B_1, so entspricht ihr, da sie den Punkt t_∞ projicirt, die Gerade $B = \overline{pc}$, wie wir sahen, und daher entspricht dem Punkte c als Tangente der c^6 die Gerade S_1 selbst, was auch daraus klar ist, da c^6 aus einer c^3 und c'^3 besteht und c'^3 die S_1 zur Tangente hat.

Auf diese Art kann nun zu jedem Punkte t von S_1 die Tangente von t^6 in c construirt werden. Man braucht nur zu $\overline{pt}$ den entsprechenden Strahl G, der durch A, A_1 und B, B_1 bestimmten Involution zu construiren, und zu diesem durch c die Parallele G zu ziehen, so ist letztere Tangente von t^6. Ist umgekehrt die Tangente G von t^6 gegeben, so ziehe man durch p die zu ihr Parallele G', und suche in der Involution den entsprechenden Strahl G_1', dieser schneidet S_1 im Punkte t, dessen t^6 die G zur Tangente hat.

Nimmt man speciell die Tangente C der Curve C^3 in c an, so ergibt sich als Punkt s, dessen s^6 die C, also auch C^3 in c berührt, wie oben bemerkt, ein Punkt von S_1^6, und wird der Strahl C_1' der Involution, die durch AA_1, BB_1 bestimmt ist, welcher dem Strahl C' entspricht, der zu C parallel durch p geht, in der Art construirt, wie oben Fig. 1 angegeben wurde, so folgt:

„Der Berührungspunkt s jeder Sehne $\overline{aca_1} = S_1$ mit ihrer Ortscurve S_1^6 wird durch folgende einfache Construction gefunden. Man lege in ihren Endpunkten a, a_1 und in ihrer Mitte c an die Basis C^3 die Tangenten A, A_1 und C; ihre Schnitte AA_1, AC, CA_1 mögen beziehlich p, q, q_1 heissen. In A und A_1 nehme man die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ so, dass q und q_1 die Mitten der Strecken $\overline{\mathfrak{p}p}$ und $\overline{p\mathfrak{p}}$ sind; ziehe sodann die Geraden $\overline{a\mathfrak{p}_1}$ und $\overline{a_1\mathfrak{p}}$, nenne ihren Schnitt r, so geht $\overline{pr}$ durch den gesuchten Berührungspunkt s der Sehne $\overline{aa_1}$." (§. 15, II, 7, S. 534.)

II. Sätze über Curven vierter Ordnung.

§. 1. Die Gleichung der Curve vierter Ordnung und der inneren Polare für einen beliebigen Punkt.

Es sei $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve vierter Ordnung C^4 in irgend welchen Parallelcoordinaten. Der willkürliche Punkt P habe die Coordinaten ξ, η, und wir denken uns nun die Gleichung der Curve auf diesen Punkt als Coordinatenanfangspunkt transformirt, wobei wir der Einfachheit halber die neuen Coordinatenaxen den alten parallel laufen lassen. Es wird dann

$$f(x, y) = f(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial \xi}(x-\eta) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(y-\eta) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(x-\xi)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(x-\xi)(y-\eta) + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(y-\eta)^2 + . \qquad \ldots 1)$$

Setzen wir nun in die Gleichung

$$x_3(x-\xi) = x_1 \qquad x_3(y-\eta) = x_2 \qquad \ldots 2)$$

ein, so dass $x_3 = 0$ die Gleichung der Geraden G_∞ der Ebene wird, und bezeichnen mit a_x^n eine in x_1, x_2 homogene Form $n$ten Grades

$$a_x^n = a_0 x_1^n + \tbinom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \tbinom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

so schreibt sich die Gleichung der Curve C^4 in der Form:

$$C^4 = a_x^4 + b_x^3 x_3^2 + c_x^2 x_3^2 + d_x x_3^3 + e x_3^4 = 0, \qquad \ldots 3)$$

wobei der Punkt P der Punkt $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ ist. Die Coëfficienten

a_i, b_i, c_i, d_i, e	sind respective von den Graden
0, 1, 2, 3, 4	in den ξ, η, wie aus 1) ersichtlich.

Denkt man sich nun von P aus die Punkte a der C^4 projicirt und auf jedem Strahl Pa den Punkt a_1 so gewählt, dass P die Mitte von aa_1 ist, so wird, während a die C^4 durchlauft, a_1 eine C_1^4 durchlaufen, deren Gleichung offenbar

$$C_1^4 = a_x^4 - b_x^3 x_3 + c_x^2 x_3^2 - d_x x_3^3 + e x_3^4 = 0$$

sein wird. Die C^4 und C_1^4 schneiden einander auf $x_3 = 0$, d. h. auf der unendlich fernen Geraden der Ebene und überdies in 12 Punkten, die auf einer Curve dritter Ordnung J^3 liegen. Die Gleichung der J^3 ergibt sich durch Subtraction der Gleichungen für C^4 und C_1^4 in der Form

$$J^3 = b_x^3 + d_x x_3^2. \qquad \ldots 4)$$

J^3 heisst die innere Polare des Punktes P und geht durch P, hat die Gerade

$$\mathfrak{W} = d_x = 0 \qquad \ldots 5)$$

zur Wendetangente.

Die äussere (kubische) Polare A^3 des Punktes P in Bezug auf C^4 hat die Gleichung

$$A^3 = b_x^3 + 2c_x^2 x_3 + 3d_x x_3^2 + 4e x_3^3 = 0 \qquad \ldots 6)$$

woraus ersichtlich, dass sie $x_3 = 0$ oder G_∞ in denselben Punkten schneidet wie J^3.

Die konische Polare A^2 von P in Bezug auf C^6 hat die Gleichung

$$A^2 = c_x^2 + 3d_x x_3 + 6e x_3^2 = 0 \qquad 7)$$

und die gerade Polare A^1 die Gleichung

$$A^1 = d_x + 4e x_3 = 0. \qquad \ldots 8)$$

Aus 8) ist ersichtlich, dass A^1 und die Wendetangente $\mathfrak{W}$ einander auf $x_3 = 0$ schneiden, d. h. die Wendetangente $\mathfrak{W}$ der inneren Polare des Punktes P ist parallel zur geraden Polaren desselben Punktes in Bezug auf C^4.

§. 2. Die Gleichung der Curve P^{10}.

Soll die innere Polare J^3 zerfallen, in eine Doppelsehne S_2 welche zwei Paare aa_1, bb_1 von C^4 trägt, deren Mitte P ist, und in einen Kegelschnitt J^2, welcher die C^4 in 8 Punkten schneidet, die paarweise auf Strahlen durch P liegen, so muss offenbar

$$b_x^3 = 0 \quad \text{den Factor} \quad d_x = 0$$

enthalten. Eliminirt man daher x_1, x_2 aus

$$b_x^3 = b_0 x_1^3 + 3 b_1 x_1^2 x_2 + 3 b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3 = 0$$

und

$$d_x = d_0 x_1 + d_1 x_2 = 0,$$

so erhält man als Resultat die Bedingung

$$P^{10} = b_0 d_1^3 - 3 b_1 d_1^2 d_0 + 3 b_2 d_1 d_0^2 - b_3 d_0^3 = 0 \qquad \ldots 9)$$

dafür, dass J^3 in S_2 und J^2 zerfällt. Da b_i in ξ, η vom ersten, d_i vom dritten Grade sind, so stellt $P^{10} = 0$ die Gleichung einer Curve zehnten Grades P^{10} für den Punkt $P(\xi, \eta)$ dar, für welchen die innere Polare zerfällt. Wie man aus 9) erkennt, hat P^{10} in den Schnittpunkten der Curven

$$d_0 = 0 \qquad d_1 = 0$$

dreifache Punkte. Da nun $d_0 = 0$ die kubische Polare des Punktes $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ und $d_1 = 0$ die des Punktes $x_1 = 0 x_3 = 0$ ist, so sind die 9 Schnittpunkte der beiden Curven dritter Ordnung die 9 Pole der Geraden G_∞ in Bezug auf C^4 oder P^{10} hat die 9 Pole P_3 der Geraden G_∞ in Bezug auf C^4 zu dreifachen Punkten (§. 17, S. 541).

Durch jeden der Punkte P_3 gehen drei Doppelsehnen S_2, S_2', S_2'', deren Mitte P_3 ist. Denn ist A^3 die kubische Polare von P_3 in Bezug auf C^4 und schneidet sie G_∞ in den Punkten t_∞, t'_∞, t''_∞; so sind $\overline{P_3 t_\infty}$, $\overline{P_3 t'_\infty}$, $\overline{P_3 t''_\infty}$ drei solche Gerade, welche C^4 in je einem Quadrupel schneiden, dessen Punkte paarweise von P_3 gleich weit abstehen. Dies folgt unmittelbar daraus, dass der Punkt P_3 sowohl zur kubischen Polare von t_∞, als zur dritten Polare von t_∞ in Bezug auf das Punktquadrupel gehört. Denn ist

$$p_\xi^4 = p_0 \xi_1^4 + 4 p_1 \xi_1^3 \xi_2 + 6 p_2 \xi_1^2 \xi_2^2 + 4 p_2 \xi_1 \xi_2^3 + p_4 \xi_2^4 = 0$$

die Gleichung des Punktquadrupels, in welchem $\overline{P_3 t_\infty}$ die C^4 schneidet, und sind ξ_1, ξ_2 auf diesem Strahl so gewählt, dass

$\xi_2 = 0$ der Punkt P_3 und $\xi_1 = 0$ der Punkt t_∞ ist, so folgt, nachdem die erste Polare des Punktes t_∞ die Gleichung

$$p_1\eta_1^3 + 3p_2\eta_1^2\eta_2 + 3p_3\eta_1\eta_2^2 + p_4\eta_2^3 = 0$$

hat und durch $\eta_2 = 0$ befriedigt werden soll, dass $p_1 = 0$ sein muss. Die dritte Polare des Punktes t_∞ hat aber die Gleichung

$$p_3\eta_1 + p_4\eta_2 = 0$$

und da sie sich auf $\eta_2 = 0$ reduciren muss, so muss $p_3 = 0$ sein, d. h. es ist

$$p_\xi^4 = p_0\xi_1^4 + 6p_2\xi_1^2\xi_2^2 + p_4\xi_2^4$$

und mithin sind die durch $p_\xi^4 = 0$ dargestellten 4 Punkte durch die Punkte $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = 0$ harmonisch getrennt.

Weiss man, dass ein Punktepaar des Quadrupels $p_\xi^4 = 0$ die Punkte $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = 0$ harmonisch trennt und dass die kubische Polare des einen Punktes $\xi_1 = 0$ den anderen enthält, so trennt auch das zweite Paar die Punkte $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = 0$ harmonisch. Denn sind $\alpha_1, \alpha_2; -\alpha_1, \alpha_2$ die Werthe von ξ_1, ξ_2 für das erste Punktpaar, so folgt, da $p_\alpha^4 = 0$ sein muss, dass

$$p_1\alpha_1 + p_3\alpha_2 = 0$$

ist, nachdem die α nicht verschwinden können. Aus der zweiten Bedingung folgt dann $p_1 = 0$, also aus der letzteren nothwendig $p_3 = 0$. Hiemit ist der Steiner'sche Satz bewiesen:

„Es gibt im Ganzen nur 9 solche Pole, die P_3 heissen sollen, für welche die innere Polare J^3 in drei Doppelsehnen S_2 zerfällt, und zwar sind dieselben zugleich die der Geraden G_∞ in Bezug auf die Basis entsprechenden 9 Pole.“ (§. 17, S. 541.)

§. 3. Die Enveloppe S_2^9.

Die Wendetangente $\mathfrak{W}$ der inneren Polare des Punktes P hatte die Gleichung 5)

$$d_0x_1 + d_1x_2 = 0.$$

Führt man in dieselbe x und y ein und macht auch in d_0 und d_1 die Abhängigkeit von ξ, η ersichtlich, so ist ihre Gleichung

$$(x-\xi)d_0(\xi\eta) + (y-\eta)d_1(\xi\eta) = 0 \qquad \ldots 10)$$

bei variablem x, y und festem ξ, η. Denkt man sich nun den willkürlichen Punkt T, dessen Coordinaten x, y seien fest, so stellt 10) bei variablem ξ, η den Ort des Punktes P dar, dessen innere Polare J^3 ihre Wendetangente $\mathfrak{W}$ durch T sendet. Wie 10) zeigt, ist dieser Ort eine Curve vierter Ordnung T^4, welche durch die Schnittpunkte der beiden Curven dritter Ordnung

$$d_0(\xi\eta) = 0 \qquad d_1(\xi\eta) = 0 \qquad \ldots 11)$$

hindurchgeht, d. h. durch die 9 Punkte P_3.

Die T^4 wird projectivisch erzeugt durch den Schnitt des Strahlenbüschels

$$(x-\xi)-\lambda(y-\eta) = 0 \qquad \ldots 12)$$

mit dem Curvenbüschel dritter Ordnung

$$\lambda d_0(\xi\eta)+d_1(\xi\eta) = 0. \qquad \ldots 13)$$

Da die Curve 13) für ein bestimmtes λ die Polare in Bezug auf C^4 desjenigen Punktes von G_∞ ist, welcher auf dem Strahle 12) liegt, so ersieht man die Richtigkeit des folgendes Satzes:

Bewegt man einen Strahl um den Punkt T und schneidet denselben durch die kubische Polare seines unendlich fernen Punktes in Bezug auf C^4, so ist der Ort der Schnittpunkte P eine Curve vierter Ordnung T^4, welche G_∞ in denselben Punkten α, β, γ, δ schneidet, wie C^4, und welche der Ort derjenigen Punkte ist, deren innere Polaren J^3 ihre Wendetangente $\mathfrak{W}$ durch T senden. Jede durch T gehende Gerade ist also für drei innere Polaren Wendetangente.

T^4 schneidet die P^{10} ausser in den P_3 und auf G_∞ daher nur noch in 9 Punkten P, oder durch T gehen 9 Doppelsehnen S_2. Die Enveloppe der S_2 ist daher von der neunten Classe. Da sie auf P^{10} eindeutig bezogen ist, so hat sie dasselbe Geschlecht, wie P^{10}, nämlich 9, und ihre Ordnung ist daher 34 (§. 17, S. 543).

Die projectivische Erzeugung der T^4 folgt auch aus der in §. 1. gemachten Bemerkung, dass $\mathfrak{W}$ zur geraden Polare A^1 des Punktes P parallel ist.

Rückt der Punkt T auf C^4, so berührt T^4 die C^4 daselbst. Geben wir für das Folgende dem Punkte T von C^4 die festen

Coordinaten (ξ, η), so wird die in der Gleichung 3) aufgestellte Gleichung der C^4 übergehen in

$$C^4 = a_x^4 + b_x^3 x_3 + c_x^2 x_3^2 + d_x x_3^3 = 0 \qquad \ldots 14)$$

nachdem $e(\xi\eta) = 0$ ist.

Die Curve T^4, der Ort der Punkte P, deren Wendetangenten $\mathfrak{W}$ der inneren Polaren durch T gehen, wird nun erzeugt durch den Strahlenbüschel

$$x_1 - \lambda x_2 = 0$$

und den zu demselben projectivischen Polarenbüschel

$$\lambda \frac{\partial C^4}{\partial x_1} + \frac{\partial C^4}{\partial x_2} = 0,$$

daher ist

$$T^4 = \frac{\partial C^4}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial C^4}{\partial x_2} x_2 = 4 a_x^4 + 3 b_x^3 x_3 + 2 c_x^2 x_3^2 + d_x x_3^3 = 0 \quad \ldots 15)$$

die Gleichung der T^4 bei variablem x, y.

Wie aus 14) und 15) folgt, berühren einander C^4 und T^4 in T und schneiden einander auf G_∞ in 4 Punkten.

Da

$$4C^4 - T^4 = [b_x^3 + 2 c_x^2 x_3 + 3 d_x x_3^2] x_3 = A^3 x_3 \qquad \ldots 16)$$

ist, so ersieht man, was auch sonst klar ist, dass die 12 Schnittpunkte von C^4 und T^4, die nicht auf G_∞ $(x_3 = 0)$ liegen, auf der kubischen Polare A^3 des Punktes T liegen.

Wir betrachten noch eine dritte Curve vierter Ordnung M^4, die folgendermassen definirt sei. Jeder Strahl durch T schneidet C^4 in drei Punkten a, a_1, a_2, die Mitte jeder Strecke Ta, Ta_1, Ta_2 liegt auf der Curve vierter Ordnung M^4.

Die Gleichung der M^4 ergibt sich aus 14), wenn wir für x_1, x_2 einfach $2x_1$, $2x_2$ einführen in der Form:

$$M^4 = 8 a_x^4 + 4 b_x^3 x_3 + 2 c_x^2 x_3^2 + d_x x_3^3 = 0. \qquad \ldots 17)$$

M^4 geht auch durch T und osculirt daselbst die Curve T^4, denn aus 17) und 15) folgt:

$$M^4 - T^4 = 4 a_x^4 + b_x^3 x_3.$$

Aus dem in §. 2 bewiesenen Satze über die Lage eines Quadrupels von Punkten, das zu den Polaren eines Punktes eine bestimmte Beziehung hat, ergibt sich nun sofort, dass die Schnittpunkte von M^4 und T^4, welche weder auf G_∞, noch in T liegen, auf P^{10} liegen müssen. Da nun T^4 und M^4 auf G_∞ vier, in T aber drei Schnittpunkte gemeinschaftlich haben, so bleiben nur noch 9 Punkte P übrig, die auf P^{10} liegen, und die mit T verbunden die 9 durch T gehenden Tangenten von S_2^9 liefern.

Die 9 Punkte P liegen offenbar auf einer Curve dritter Ordnung P^3, die in T die T^4 sowohl als M^4 osculirt.

Aus 17) und 15) folgt:

$$2T^4 - M^4 = [2b_x^3 + 2c_x^2 x_3 + d_x x_3^2]\, x_3,$$

so dass die Gleichung der P^3 sich in der Form:

$$P^3 = 2b_x^3 + 2c_x^2 x_3 + d_x x_3^2 \qquad \ldots 18)$$

ergibt.

Dem Punkte T gehören nun 9 Punkte a_1 von C^4 zu, welche auf den 9 Tangenten der S_2^9 liegen, die durch T gehen, so dass die Mitte von Ta_1 einer der 9 Schnittpunkte von P^3 mit M^4 und T^4 ist, der nicht in T fällt. Diese 9 Punkte a_1 liegen daher auch auf einer Curve dritter Ordnung a_1^3 und ihre Gleichung folgt aus der für P^3, wenn $\frac{1}{2}x_1$ und $\frac{1}{2}x_2$ an Stelle x_1, x_2 eingeführt wird, in der Form:

$$a_1^3 = b_x^3 + 2c_x^2 x_3 + 2d_x x_3^2. \qquad \ldots 19)$$

Aus 14) und 19) folgt:

$$2C^4 - a_1^3 x_3 = 2a_x^4 + b_x^3 x_3 \qquad \ldots 20)$$

und aus 14) und 18)

$$C^4 - P^3 x_3 = a_x^4 - b_x^3 x_3 - c_x^2 x_3 \qquad \ldots 21)$$

und hiemit die Richtigkeit des Satzes von Steiner:

„Liegt der Punkt in der Basis C^4 selbst, er heisse a, so ist er ein Endpunkt von jeder der 9 S_2, und alsdann liegen die ihm zugehörigen anderen 9 Endpunkte a_1 in einer Curve dritten Grades a_1^3, welche die Basis in a

dreipunktig berührt;[1] und ebenso liegen die Mitten P der 9 S_2 in einer anderen Curve dritten Grades, P^3, welche die Basis im Punkte a zweipunktig berührt. Ist insbesondere der Punkt a ein Wendepunkt der Basis, so ist er dasselbe auch von jeder der beiden Curven a_1^3 und P^3. Und ist a einer der 32 Schnittpunkte P^0 der Curven P^{10} und C^4, deren Tangente die C^4 in zwei Punkten b, b_1 schneidet, so dass die Mitte von bb_1 der Berührungspunkt P^0 ist, so wird die Basis in ihm von der Curve a_1^3 vierpunktig und von der Curve P^3 dreipunktig berührt, so dass diese beiden Curven einander daselbst auch dreipunktig berühren." (§. 17, S. 543.)

Der letzte Theil des Satzes folgt ohne Weiteres aus den oben abgeleiteten Gleichungen der P^3 und a_1^3, wenn man in dieselbe die Bedingung einführt, dass T ein Wendepunkt von C^4 oder ein Punkt P^0 ist. Ist T ein Wendepunkt, so muss

$$\gamma c_x^2 = d_x . c_x$$

sein, wobei γ von x_1, x_2 unabhängig und c_x in den x_1, x_2 linear ist. Ist aber T einer der Punkte P^0, so muss

$$\beta . b_x^3 = b_x^2 . d_x,$$

wo β von x_1, x_2 unabhängig und b_x^2 quadratisch in x_1, x_2 ist.

§. 4. Das System der Kegelschnitte J^2.

Jeder Tangente S_2 von S_2^9 entspricht ein bestimmter Kegelschnitt J^2, der mit S_2 zusammen die innere Polare des Mittelpunktes P der Doppelsehne S_2 bildet.

Von diesen Kegelschnitten J^2 gehen siebenundzwanzig durch jeden im endlichen gelegenen Punkt. Man kann dies für die auf C^4 gelegenen Punkte mit Hilfe der Curve M^4 leicht zeigen. Es folgt aber ganz ebenso für jeden Punkt T der Ebene. Die Gleichung der inneren Polare des Punktes P, dessen Coordinaten (ξ, η) sind, ist bei variablem x, y nach 4):

$$\begin{aligned} J^3(xy, \xi\eta) = {} & (x-\xi)^3 b_0(\xi,\eta) + 3(x-\xi)^2(y-\eta) b_1(\xi,\eta) + \\ & + 3(x-\xi)(y-\eta)^2 b_2(\xi,\eta) + (y-\eta)^3 b_3(\xi,\eta) + \\ & + (x-\xi) d_0(\xi,\eta) + (y-\eta) d_1(\xi,\eta) = 0 \end{aligned} \quad \ldots 22)$$

[1] Soll heissen: dreipunktig schneidet oder zweipunktig berührt.

Geben wir nun dem Punkte T die festen Coordinaten x, y, und lassen wir in $J^3(xy, \xi\eta)$ die Coordinaten ξ, η unbestimmt, so stellt $J^3(xy, \xi\eta) = 0$ die Gleichung einer Curve vierter Ordnung $\mathfrak{T}^4$ dar, von der Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte eine innere Polare besitzt, die durch T geht. Wie aus der Form der Gleichung von $\mathfrak{T}^4$ ersichtlich ist, geht $\mathfrak{T}^4$ durch die vier Schnittpunkte α, β, γ, δ von C^4 mit G_∞, schneidet daselbst also auch P^{10}.

Von den 36 übrigen Schnittpunkten von $\mathfrak{T}^4$ mit P^{10} gehören 9 den $9S_2$ an, welche durch T gehen, und die 27 letzten sind die Mittelpunkte von 27 Kegelschnitten J^2, die durch T gehen.

In dem System der J^2 tritt die unendlich ferne Gerade G_∞, doppelt gezählt, zehnmal als J^2 auf, nämlich als derjenige J^2, welcher den zehn Schnittpunkten von P^{10} mit G_∞ zugehört. Diese Schnittpunkte sind α, β, γ, δ und nach §. 2 die drei Paare x, x_1; y, y_1; z, z_1, welche je zwei Paare von den vier Punkten α, β, γ, δ harmonisch trennen (§. 17, S. 542). Da nämlich diese zehn Punkte Mittelpunkte ihrer inneren Polare J^2 sein müssen, so kann diese nur aus $(G_\infty)^2$ bestehen. Hiebei gehören zu den sechs Punkten x, x_1; y, y_1; z, z_1 Sehnen S_2, die auch auf G_∞ fallen, den vier Punkten α, β, γ, δ aber gehören als S_2 die Tangenten von C^4 in diesen Punkten zu, also die Asymptoten A_s von C^4.

Durch jeden Punkt t_∞ von G_∞ gehen auch nur mehr sieben Kegelschnitte J^2, indem die 10 Kegelschnitte $(G_\infty)^2$ jeder doppelt durch t_∞ geht. Die 7 durch t_∞ gehenden J^2, deren Mittelpunkte im Endlichen auf P^{10} liegen, kann man so erhalten. Es sei D die gerade Polare von t_∞ in Bezug auf C^4, welche G_∞ in dem Punkte D_∞ schneiden möge. Dann gehen alle äusseren (kubischen) Polaren der Punkte von D durch t_∞. Die Polare D^3_∞, welche dem Punkte D_∞ entspricht, möge D in den Punkten P, P', P'' schneiden, dann sind nach dem Satze in §. 2 die drei Geraden $t_\infty P$, $t_\infty P'$, $t_\infty P''$ drei durch t_∞ gehende Tangenten von S_2^9 und die Mitten dieser drei Doppelsehnen $S_2 = t_\infty P$, $S_2' = t_\infty P'$, $S_2'' = t_\infty P''$ sind eben die Punkte P, P', P''. Da G_∞ sechsfache Tangente von S_2^9 ist, (x, x_1; y, y_1; z, z_1 sind die Berührungspunkte, wie man aus der Construction der drei Tangenten S_2, S_2', S_2'' ersieht) so gehen auch durch t_∞ nicht mehr als drei Tangenten von S_2^9.

Das Tripel P, P', P'' liegt natürlich auf P^{10} und bildet, wie ersichtlich, eine lineare Specialschaar von Gruppen zu drei

Punkten, wenn t_∞ die G_∞ durchlauft. Die Geraden D hüllen dann eine Curve D^3 dritter Classe vierter Ordnung ein.

Halten wir nun D fest und beachten, dass D die P^{10} ausser in P, P', P'' noch in 7 weiteren Punkten Q trifft, so müssen die 7 äusseren kubischen Polaren dieser Punkte auch durch t_∞ gehen. Da aber die innere Polare eines Punktes die G_∞ in demselben Punkte schneidet, wie die äussere (kubische) Polare, so müssen die inneren Polaren J^3 der 7 Punkte Q von D, die auf P^{10} liegen, durch t_∞ gehen, und da die J^3 in S_2 und J^2 zerfallen, S_2 aber nicht durch t_∞ gehen kann, so müssen die sieben J^2 durch t_∞ gehen.

Die Schnittpunkte der Doppelsehnen S_2 mit G_∞ stehen daher mit den Schnittpunkten von G_∞ mit dem der S_2 zugehörigen J^2 in einer algebraischen Correspondenz (6, 7), die 13 Coïncidenzpunkte j besitzt, welche die Eigenschaft haben, dass die durch sie gehenden S_2 Asymptoten des zugehörigen J^2 sind.

Hiemit ist die Frage von Steiner §. 17, S. 547: „Wie viel in J^2 und S_2 zerfallende innere Polaren gibt es, bei welchen S_2 Asymptote von J^2 ist?", dahin zu beantworten: Es gibt dreizehn solcher zerfallender Polaren.

Die oben erwähnte Enveloppe D^3 schneidet die P^{10} in 40 Punkten P_x, unter denen die Mittelpunkte der eben erwähnten 13 besonderer J^2 vorkommen müssen. Denn D^3 als Ortscurve aufgefasst, ist der Ort der Pole P_x, deren äussere (kubische) Polare A^3 die G_∞ berühren, also auch der Punkte, deren inneren Polare P^3 die G_∞ in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden.

Ist D_t die gerade Polare eines der 13 Punkte j, der j_t heissen möge, und P_x derjenige von den drei auf D_t gelegenen Punkten eines Tripels der P^{10}, dessen äussere Polare in j_t die G_∞ berührt, so ist P_x ein Punkt von D^3 und D_t seine Tangente. Und umgekehrt ist P_x ein Schnittpunkt von P^{10} und D^3, so dass die das Tripel P_x, P'_x, P''_x (welches zu P_x gehört) tragende Gerade D_t Tangente von D^3 in P_x ist, so gehört zu P_x eine in S_2 und J^2 zerfallende innere Polare, für welche S_2 Asymptote von J^2 ist.

Ist also P_x einer der 27 anderen Schnittpunkte von D^3 und P^{10}, so sei die Tangente von D^3 im Punkte P_x die Gerade D_t, während die Gerade D_r, die das zu P_x gehörende Tripel trägt, in einem anderen Punkte R_0 die D^3 berührt. Da nun die äussere Polare A^3 eines solchen Punktes P_x, als auf D^3 gelegen, die G_∞ in dem Pol i von D_t in Bezug auf C^4 berührt, die J^3 aber in S_2 und J^2 zerfällt, nachdem P_x auf P^{10} liegt, so muss J^2 die G_∞ berühren im Punkte i. Es kann nämlich nicht S_2 den J^2 in i schneiden, denn S_2 geht durch den auf G_∞ liegenden Pol von D_r in Bezug auf C^4, der von dem Pol i von D_t, in welchem J^3 berühren muss, verschieden ist.

Da nun jeder Kegelschnitt, der seinen Mittelpunkt im Endlichen hat und die G_∞ berührt, in zwei parallele Gerade zerfallen muss, so ist die von Steiner in §. 17 auf S. 547 gestellte Frage: „Wie viele innere Polaren gibt es, welche in drei Gerade S_2, J und J_1 zerfallen?", dahin zu beantworten, dass es siebenundzwanzig solcher inneren Polaren gibt, die in eine Doppelsehne S_2 und zwei zu einander parallele Gerade J und J_1 zerfallen.

§. 5. Die Curve $\mathfrak{Q}^{33}$.

In einer Anmerkung zu §. 17, S. 547 stellt Steiner folgende Frage: „In welcher Curve $\mathfrak{Q}^n$ liegen alle die Doppelpunkte der in S_2 und J^2 zerfallenden inneren Polaren J^3? Ist der Gradexponent n etwa gleich der Zahl derjenigen Pole P_x, welche zu Durchmessern D_t gehören?" P_x heisst zum Durchmesser D_t gehörig, wenn die durch P_x gehende S_2 durch den auf G_∞ liegenden Pol j_t von D_t in Bezug auf die Basis C^4 geht; so dass also, wenn der Schnittpunkt P_x von P^{10} und D^3 zum Durchmesser D_t gehört, welcher D^3 in P_x berührt, der Pol, den S_2 enthält, einer der 13 Punkte j ist.

Nach dem, was über das System der J^2 im vorhergehenden Paragraph gesagt wurde, lassen sich diese Fragen leicht beantworten. Zu jeder Tangente S_2 von S_2^9 gehört ein bestimmter Kegelschnitt J^2, der denselben Mittelpunkt P hat wie S_2, und mit dieser Doppelsehne die J^3 bildet, welche zu P gehört. Und umgekehrt zu jedem J^2 gehört eine ganz bestimmte Doppelsehne S_2, welche mit J^2 die J^3 für den Mittelpunkt des Kegelschnittes darstellt. Die Kegelschnitte J^2 sind auf diese Art den Sehnen S_2 in vollkommen eindeutiger Weise zugeordnet und je ein Paar zugeordneter S^2 und J^2 schneiden einander in einem Punktepaar, welches auf der Curve $\mathfrak{Q}^n$ von Steiner liegt. Hieraus folgt, dass das Erzeugniss die Ordnung $1\cdot 27+2\cdot 9=45$ hat, da die

Kegelschnitte J^2 ein System vom Index 27 und die Doppelsehnen S_2 ein solches vom Index 9 bilden.

Zu diesem Erzeugnisse zählt aber G_∞ zwölffach. Denn die den sechs Punkten x, x_1, y, y_1, z, z_1 von P^{10} auf G_∞ zugehörigen Sehnen fallen mit dem ganzen ihnen entsprechenden J^2 zusammen, so dass in jedem Punkte von G_∞ 12 Schnittpunkte von S_2 mit ihren zugehörigen J^2 liegen. Der übrig bleibende Theil ist eine Curve 33ter Ordnung $\mathfrak{Q}^{33}$ und ist der eigentliche Ort der Doppelpunkte der J^3.

Die zehn Schnittpunkte von P^{10} mit G_∞ sind Doppelpunkte von $\mathfrak{Q}^{33}$. Denn sei G eine beliebige Gerade, so schneiden die S_2 und die zugehörigen J^2 auf G eine Correspondenzen (18, 27) aus, von welcher stets 12 Coïncidenzpunkte auf G_∞ liegen, die übrigen 33 auf $\mathfrak{Q}^{33}$. Legt man nun G durch einen der 6 Punkte x, x_1, y, y_1, z, z_1, so fallen noch zwei weitere Coïncidenzen auf G in diese Punkte, indem eine der drei durch die Punkte von G_∞ gehenden Doppelsehnen S_2 auf G_∞ fällt und sich mit dem ihr entsprechenden J^2 deckt. Legt man aber G durch einen der vier auf C^4 gelegenen Punkte α, β, γ, δ, so schneidet in demselben die zugehörige Doppelsehne A_s den entsprechenden $J^2 = (G_\infty)^2$ in zwei zusammenfallenden Punkten, so dass dieser Punkt zwei Coïncidenzen enthält.

Die noch übrigen 13 Schnittpunkte von $\mathfrak{Q}^{33}$ mit G_∞ sind die oben gefundenen 13 Punkte j. Da in einem solchen Punkte j die Doppelsehne S_2 den zugehörigen Kegelschnitt J^2 berührt, so zählt der Punkt j als zwei Coïncidenzen auf der Geraden S_2, d. h. S_2 ist Tangente von $\mathfrak{Q}^{33}$ in dem Punkte j.

Die Frage, welche Steiner in der citirten Anmerkung noch stellt: „Und sind die diesen Polen P_x zugehörigen Doppelsehnen S_2 zugleich Asymptoten der Curve $\mathfrak{Q}^{33}$?“ ist also im bejahenden Sinne zu beantworten.

Die Richtigkeit des ferneren Zusatzes von Steiner: „Diese unbekannte Curve $\mathfrak{Q}^n$ hat übrigens die 9 Punkte P_3 gleichfalls zu dreifachen Punkten, wie die Curve P^{10}“ lässt sich aus Folgendem ersehen:

Hat man zwischen den Punkten T, T' einer Geraden G eine Correspondenz, und es fallen in einen Punkt P von den ihm entsprechenden Punkten in der einen Beziehung α, in der anderen β

in P zurück, so zählt P als α oder β Coïncidenzen, je nachdem $\alpha \leqq \beta$ oder $\beta \leqq \alpha$ ist.

Legen wir nun G durch P_3, so werden die Doppelsehnen S_2 und die zugehörigen J^2 auf ihr eine Correspondenz (18, 27) ausschneiden, indem jedem Punkte T die 18 Schnittpunkte T' zugewiesen sind, in welchen die $9\,J^2$ die G schneiden, welche den $9\,S_2$ zugeordnet sind, die durch T gehen, und jedem Punkte T' die 27 Punkte T, in welchen die $27\,S_2$ die G schneiden, welche den 27 durch T' gehenden J^2 zugehören. Fällt nun T in P_3, so gehen durch P_3 nur noch $6\,S_2$, deren Mitten P nicht in P_3 liegen, denn die in §. 3 benutzte Curve T^4 hat, wie ihre Gleichung 10) zeigt, in P_3 einen Doppelpunkt, schneidet daher P^{10} ausser auf G_∞ nur noch in 6 Punkten P, die nicht in den $9\,P_3$ liegen. Daher entsprechen dem Punkte P_3 nur noch $2.6 = 12$ Punkte T', oder es fallen 6 der entsprechenden Punkte T' auf T. Fällt aber T' auf P_3, so gehen noch 24 Kegelschnitte J^2 durch P_3, deren Mittelpunkt von P_3 verschieden sind. Denn die in §. 3 benutzte Curve $\mathfrak{T}^4$ erhält, wie ihre Gleichung 22) zeigt, in P_3 einen Doppelpunkt, schneidet daher P^{10} ausser auf G_∞ nur noch in 30 Punkten, von denen 6 den $6\,S_2$ zugehören, die oben gefunden wurden, und 24 gehören daher solchen Kegelschnitten J^2 als Mittelpunkte an, die durch P_3 gehen, und deren 24 zugeordnete Sehnen S_2 die G in den 24 Punkten T schneiden, die P_3 entsprechen. Es fallen daher 3 von den 27 dem T' entsprechenden Punkten T in T' zurück. In P_3 liegen also bloss drei Coïncidenzen der Correspondenz (18, 27), d. h. P_3 ist dreifacher Punkt von $\mathfrak{Q}^{33}$.

§. 6. Die der inneren Polaren J^3 associirte Curve R^3.

Die in 3) aufgestellte Gleichung der C^4 in der Form

$$C^4 = a_x^4 + b_x^3 x_3^2 + b_x^2 x_3^2 + d_x x_3^3 + e x_3^4 \qquad \ldots 23)$$

für den Punkt P mit den Coordinaten (ξ, η) und der inneren Polare J^3 desselben Punktes P in Bezug auf C^4

$$J^3 = b_x^3 + d_x x_3^2 \qquad \ldots 24)$$

lassen erkennen, was auch sonst klar ist, dass sich C^4 und J^3 in 12 Punkten a schneiden, die paarweise auf 6 durch P gehenden Strahlen liegen. Seien $s_\cdot^{(i)} = 0$, $i = 1, 2, \ldots 6$ die Gleichungen dieser sechs Strahlen S, so ist das Product $\Pi s_x^{(i)}$ eine Form sechsten Grades in x_1 und x_2, die gleich Null gesetzt eine Curve sechsten Grades darstellt, die durch den Schnitt von J^3 und C^4 geht und letztere Curve noch in 12 Punkten α schneidet, (jeder Strahl $s_x^{(i)} = 0$ in einem Paar) die auf einer zweiten Curve dritter Ordnung R^3 liegen müssen, welche die zu J^3 associirte heissen soll. Die Gleichung der R^3 lässt sich leicht aufstellen.

Da R^3 und J^3 zusammen eine Curve sechsten Grades bilden und $\Pi s_x^{(i)} = 0$ durch den vollständigen Schnitt jener Curve mit der Basis C^4 geht, so muss eine Identität von der Form:

$$\Pi s_x^{(i)} \equiv \theta^2 C^4 - J^3 R^3$$

bestehen,[1] wobei θ^2 eine quadratische Function der Coordinaten bedeutet. Setzt man nun

$$\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_x x_3 + \theta x_3^2$$
$$R^3 = r_x^3 + r_x^2 x_3 + r_x x_3^2 + r x_3^2$$

mit unbestimmten Coëfficienten θ_i und r_i in die obige Identität ein, so dass also dieselbe die Form:

$$\Pi s_x^{(i)} \equiv [\theta_x^2 + \theta_x x_3 + \theta x_3^2][a_x^4 + b_x^3 x_3 + c_x^2 x_3^2 + d_x x_3^3 + e x_3^4] -$$
$$- [b_x^3 + d_x x_3^2][r_x^3 + r_x^2 x_3 + r_x x_3^2 + r x_3^3]$$

annimmt, so kann man aus den Bedingungen, dass rechts die Coëfficienten von x_3, x_3^2, x_3^3, x_3^4, x_3^5, x_3^6 identisch verschwinden müssen, die θ_x und r_x leicht bestimmen und erhält dann die Identität:

$$\Pi s_x^{(i)} \equiv [d_x]^2 [a_x^4 + b_x^3 x_3 + c_x^2 x_3 + d_x x_3^3 + e x_3^4] -$$
$$- [b_x^3 + d_x x_3^2][c_x^2 d_x - e b_x^3 + (d_x)^2 x_3 + e d_x x_3^2] \quad \ldots 25)$$

aus welcher ersichtlich, dass die Curve dritter Ordnung

$$R^3 = c_x^2 d_x - e b_x^3 + (d_x)^2 x_3 + e d_x x_3^2 = 0 \qquad \ldots 26)$$

durch die 12 Punkte α geht, in welchen die Sehnen S die C^4 noch schneiden, ausser in den 12 Punkten a, die auf J^3 liegen.

---

[1] Vergl. Nöther, „Über den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen", Mathematische Annalen, 30. Bd., S. 410, sowie auch 6. Bd., S. 351.

Aus 26) erkennt man ohne Weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes von Steiner:

„Die 12 Punkte α liegen allemal in einer Curve dritten Grades, etwa R^3, welche auch durch den Pol P geht, ihn zum Wendepunkt, und zwar in demselben mit der Polare J^3 die Wendetangente $\mathfrak{W}$ gemein hat, so dass also beide Curven einander daselbst dreipunktig berühren, und dass folglich ihre übrigen 6 gemeinschaftlichen Punkte, etwa $6q$, in irgend einem Kegelschnitte Q^2 liegen.“ (§. 20, II, S. 558.)

Da aus 24) und 26)

$$eJ^3+R^3 = d_x[c_x^2+d_x x_3+2ex_3^2]$$

folgt, so ist:

$$Q^2 = c_x^2+d_x x_3+2ex_3^2 = 0 \qquad \ldots 27)$$

die Gleichung des Kegelschnittes Q^2, der durch die Punkte $6q$ geht. Die Polare des Punktes P in Bezug auf Q^2 ist die gerade Polare A^1 von P in Bezug auf C^4.

Dieser Kegelschnitt Q^2 geht auch durch die 6 Schnittpunkte von J^3 mit der äusseren Polare A^3, die nicht auf G_∞ liegen, denn aus der Gleichung 4) und 6) auf Seite [12] 8 folgt:

$$A^3-J^3 = 2x_3[c_x+d_x x_3+2ex_3^2] = 2x_3Q^2, \qquad \ldots 28)$$

so dass also A^3, J^3 und R^3 durch dieselben $6q$ gehen.

Hiemit ist die Frage von Steiner: „Ob nicht die von jedem Pol P abhängigen drei Curven, nämlich die beiden Polaren A^3, J^3 und die Curve R^3 alle durch dieselben 6 Punkte q gehen, welche in einem Kegelschnitte Q^2 liegen?“ im bejahenden Sinne beantwortet.

Die harmonische Polare des Wendepunktes P für die Curve J^3 ist die unendlich ferne Gerade G_∞, auf welcher sich J^3 mit der äusseren Polare A^3 desselben Punktes P schneidet. Die harmonische Polare von P in Bezug auf die associirte Curve R^3 hat die Gleichung

$$H = d_x+2ex_3 = 0. \qquad \ldots 29)$$

Aus der Gleichung 6) für die äussere Polare A^3 und der Gleichung 26) für R^3 folgt:

$$eA^3+R^3 = [d_x+2ex_2][c_x^2+d_x x_3+2ex_3^2] = H.Q^2, \qquad \ldots 30)$$

d. h. die äussere Polare A^3 und die Curve R^3 schneiden einander ausser auf Q^2 noch auf der harmonischen Polare H des Punktes P für R^3; so:

„Dass in projectivischer Hinsicht die beiden Curven J^3 und R^3 sich gegen die Polare A^3 (sowie auch gegen die Basis C^4) völlig gleich verhalten, so dass sie ihre scheinbar verschiedene Rolle durch Projection (wobei H ins Unendliche kommt) vertauschen oder gänzlich verlieren und gegen A^3 und C^4 eine völlig gleiche Stellung einnehmen können.“ (§. 20, II, S. 559.)

Steiner wirft daselbst ferner die Frage auf: „Welche Beziehung die zweite Polare A^2 des nämlichen Poles in Bezug auf die Basis zu dem Kegelschnitte Q^2 habe?“

Aus der Gleichung 7), Seite 12 für die zweite Polare

$$A^2 = c_x^2 + 3d_x x_3 + 6ex_3^2 = 0$$

und aus Gleichung 27) folgt:

$$A^2 - Q^2 = 2[d_x + 2ex_3]x_3 = 2H.x_3, \qquad \ldots 31)$$

d. h. A^2 und Q^2 schneiden einander auf G_∞ und H, den harmonischen Polaren von P in Bezug auf J^3 und R^3.

Da die dritte Polare A^1 des Punktes P in Bezug auf die Basis die Gleichung

$$A^1 = d_x + 4ex_3 = 0 \qquad \ldots 32)$$

hat, so folgt, dass sie mit H sowohl, als auch mit der Wendetangente $\mathfrak{W}$ von J^3 und R^3 im Punkte P parallel ist. Gleichzeitig zeigen die Gleichungen 29) und 32), dass A^1 vom Punkte P doppelt so weit absteht als H, dass also H in der Mitte zwischen $\mathfrak{W}$ und A^1 zu diesen parallel lauft.

Hiemit sind die von Steiner im §. 20, II, S. 559 gestellten Fragen beantwortet.

Frage: „Ist nicht die den Curven J^3 und R^3 gemeinsame Wendetangente $\mathfrak{W}$ im Pole P mit den dem letzteren entsprechenden vorgenannten Geraden H und A parallel? und wenn es so ist, wie verhalten sich dann die Abstände der drei Geraden H, A^1 und $\mathfrak{W}$ von einander? Liegt etwa $\mathfrak{W}$ in der Mitte zwischen den beiden anderen, so dass alsdann die vier Geraden $H\mathfrak{W}A^1G_\infty$ harmonisch sind?"

Nach dem Obigen liegt nicht $\mathfrak{W}$ in der Mitte zwischen A^1 und H, sondern H in der Mitte zwischen $\mathfrak{W}$ und A^1, so dass $\mathfrak{W}HA^1G_\infty$ harmonisch sind. Dies folgt auch daraus, dass P der Pol von A^1 in Bezug auf A^2 und Q^2 ist, welche Kegelschnitte einander auf H und G_∞ schneiden.

Liegt P auf der Basis C^4, so dass also $e = o$ ist, so übergeht R^3 in

$$R^3 = d_x[c_x^2 + d_x x_3],$$

also zerfällt R^3 in die Tangente der Basis und einen Kegelschnitt

$$R^2 = c_x^2 + d_x x_3, \qquad \ldots 33)$$

welcher die Basis C^4 in P dreipunktig schneidet, denn es ist

$$C^4 - R^2 x_3^2 = a_x^4 + b_x^3 x_3,$$

da $e = O$ vorausgesetzt wird.

Der Kegelschnitt R^2 schneidet die zweite Polare A^2 von P in Bezug auf die Basis zweipunktig in P und auf G_∞, denn es ist

$$R^2 - A^2 = 2d_x x_3.$$

Die Curve R^3 zerfällt aber noch immer sobald J^3 zerfällt, d. h. sowie P auf P^{10} liegt, denn es ist dann

$$d_x \text{ ein Factor von } b_x^3,$$

und aus 26) ersieht man dann, dass R^3 den Factor d_x enthält.