Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen

von

Dr. **Wilhelm Wirtinger**, z. Z. in Berlin.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1889.)

Seit Herr Fuchs die Aufmerksamkeit auf jene linearen homogenen Differentialgleichungen gelenkt hat, zwischen deren Integralen algebraische Relationen bestehen, haben sich eine Reihe von Mathematikern mit dieser Frage beschäftigt. Wir nennen hier ausser den Arbeiten des Herrn Fuchs[1] selbst, in denen der Fall einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung vollständig erledigt wird, die Arbeiten von Appel,[2] Brioschi,[3] Halphèn,[4] Goursat.[5] Im Folgenden sollen nun einige specielle Fälle behandelt werden, welche sich durch Formen von besonderer Einfachheit auszeichnen.

I.

Sei

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}\ldots+p_{n-1}y'+p_n y=0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung von der Beschaffenheit, dass sie lauter reguläre Integrale besitzt und also die von Herrn Fuchs[6] angegebene Form besitzt. Dann können wir die

---

[1] Sitzungsber. der königl. Akademie zu Berlin 1882. Acta mathematica, I. Bd.

[2] Annales scientif. de l'école normal, 2e série, t. X.

[3] Bulletin de la société mathem. de France, t. VII.

[4] Acta Mathematica, 3. Bd.

[5] Bulletin de la société mathem. de France, t. XI.

[6] Crelle's Journal 66. Bd., S. 146.

Gruppe von homogenen linearen Substitutionen, welche die Integrale erfahren, wenn die Variable singuläre Punkte umkreist, als bekannt voraussetzen und sie auch nach den Methoden, welche Herr Fuchs[1] und Herr Hamburger[2] angegeben haben, wirklich auffinden. Nehmen wir nun an, es gäbe ein System von Fundamentalintegralen von der Beschaffenheit, dass sie sich bei den Fundamentalsubstitutionen der Gruppe nur untereinander mit constanten Factoren multiplicirt vertauschen. Ob ein solches System vorhanden ist, lässt sich durch Auflösung linearer Gleichungen im Principe immer entscheiden, indem man die Integrale des Systems, für welches die Gruppe bestimmt worden, durch die hypothetischen Integrale mit unbestimmten Coëfficienten ausdrückt und die letzteren — was auch auf mehrere Arten geschehen kann — so zu bestimmen sucht, dass die Gruppe die geforderte Beschaffenheit hat. Man erhält dadurch, je nachdem man einem bestimmten Umlauf um einen singulären Punkt eine der $n!$ Vertauschungen mit unbestimmten Factoren multiplicirt zugeordnet hat, ebensoviel Systeme von linearen Gleichungen. Die Auflösbarkeit eines von ihnen liefert das verlangte System, ist keines auflösbar, so existirt ein solches System überhaupt nicht. Wir übergehen gewisse Vereinfachungen der Ausführung, da diese selbst für das Folgende nicht wesentlich ist.

Sei nun $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ ein solches Fundamentalsystem, dann ändern sich die symmetrischen Functionen der logarithmischen Derivirten nicht mehr bei den Umläufen der Variablen um die Verzweigungspunkte. Setzen wir ausserdem voraus, die Differentialgleichung habe keine logarithmischen Integrale, dann folgt, dass die symmetrischen Functionen der Derivirten rationale Functionen von x sind. Daraus folgt aber unmittelbar, dass $\frac{\eta'_1}{\eta_1}, \frac{\eta'_2}{\eta_2} \quad \frac{\eta'_n}{\eta_n}$ Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Coëfficienten sind. Sei diese

$$\left(\frac{\eta'_\mu}{\eta_\mu}\right)^n + P_1(x)\left(\frac{\eta'_\mu}{\eta_\mu}\right)^{n-1} \ldots + P_n(x) = 0$$

---

[1] Crelle's Journal, 75. Bd.

[2] Crelle's Journal, 83. Bd.; vergl. auch Poincaré, Acta Math., 4. Bd.

und $z_\mu = \frac{\eta'_\mu}{\eta_\mu}$ eine Wurzel derselben, so folgt daraus

$$\eta_\mu = Ce^{\int z_\mu dx}$$

Die Integrale erscheinen somit ausgedrückt durch Exponentielle, deren Exponenten Abel'sche Integrale einer und derselben Irrationalität sind. Sind diese letzteren Integrale rein logarithmisch ausdrückbar, so können die Fundamentalintegrale selbst algebraische Functionen von x sein.

Besteht nun zwischen den Fundamentalintegralen η eine algebraische Relation, d. h. ist eine solche von vornherein bekannt, so wird man häufig direct auf die Beschaffenheit der Gruppe der Differentialgleichung schliessen können.

Sei $F(\eta_1 \eta_2 \quad \eta_n) = R(x)$, unter F und R rationale Functionen ihrer Argumente mit constanten Coëfficienten verstanden, diese Relation, so leuchtet ein, dass die obige Gleichung bei Umläufen von x um einen singulären Punkt nicht geändert werden kann und speciell F identisch in sich übergehen muss, wenn R nicht identisch verschwindet, dann aber wenigstens bis auf einen constanten Factor.

Ist nämlich x_0 irgend eine für die Differentialgleichung nicht singuläre Stelle, so lassen sich die η nach bekannten Sätzen[1] nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ in der Umgebung dieser Stelle entwickeln. Durch Fortsetzung dieser Potenzreihen kann man dann die Umkreisung eines singulären Punktes wirklich ausführen und gelangt so zu einem System von Potenzreihen, welche lineare homogene Functionen der Ausgangselemente sind. Da nun bei der simultanen Fortsetzung von Potenzreihen analytische Beziehungen zwischen ihnen unverändert gelten, so folgt unsere Behauptung. Da ferner die Substitutionen in den η homogen sind, so folgt, dass auch die homogenen Terme von F jeder in sich übergehen. Es genügt daher irgend einen homogenen Term gleich einer rationalen Function zu setzen und zu untersuchen, welche linearen Transformationen in sich dieser Term zulässt. Die Gruppe der Differentialgleichung muss eine Untergruppe der gefundenen Gruppe oder mit ihr identisch sein.

---

[1] v. Fuchs, Crelle's Journal, 66. Bd.

II.

Wir wenden jetzt die obigen Bemerkungen auf einige specielle Fälle an.

Sei

$$\eta_1^m+\eta_2^m+\eta_3^m\ldots+\eta_n^m=R(x),\ m>2 \qquad \ldots 1)$$

eine Relation zwischen den Integralen η, und nehmen wir zunächst an, $R(x)$ verschwinde nicht identisch. Dann muss die linke Seite in sich übergehen und mit ihr zugleich ihre Hesse'sche Form. Diese ist bis auf einen Zahlenfactor $(\eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n)^{m-2}$ und soll diese in sich bis auf einen constanten Factor übergehen, so können sich bei einer Transformation nur die Factoren vertauschen und mit Constanten multipliciren. Da ferner auch die linke Seite von 1) in sich übergehen soll, so können diese Factoren nur m^{ter} Einheitswurzeln sein. Damit folgt aber, dass auch die symmetrischen Functionen der η^m in sich übergehen, und wegen der vorausgesetzten Natur der Differentialgleichung nur reguläre, nicht logarithmische Integrale zu haben, sind dann auch diese rationale Functionen von x. Die m^{ten} Potenzen der Integrale sind demnach Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coëfficienten.

Das allgemeine Integrale unserer Differentialgleichung ist dann in der Form enthalten:

$$y=C_1\sqrt[m]{z_1}+C_2\sqrt[m]{z_2}\qquad+C_n\sqrt[m]{z_n}$$
$$z_\mu^n+p_1(x)z_\mu^{n-1}\qquad+p_n(x)=0$$
$$\mu=1\ 2\qquad n$$

wo $p_1\ldots p_n$ rationale Functionen von x sind und speciell $p_1=-R(x)$ ist.

In dem Falle aber, wo $R(x)$ identisch verschwindet, verfahren wir folgendermassen. Wir dividiren die Potenzsumme durch η_1^m. Dann ist

$$\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^m+\left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)^m\qquad+\left(\frac{\eta_n}{\eta_1}\right)^m=-1.$$

Sollte nun bei irgend einem Umlaufe η_i übergehen in $\varkappa\eta_e$, wo $\varkappa$ keine m^{te} Einheitswurzel ist, so muss jedes Integral in sich selbst, oder ein anderes mit demselben Factor multiplicirt übergehen. Bilden wir daher die symmetrischen Functionen der $n(n-1)$ Quotienten $\frac{\eta_i}{\eta_e}$, so ändern sich diese wieder bei keinem Umlauf der Variablen x um singuläre Punkte, und sind daher wieder rationale Functionen von x. Die m^{ten} Potenzen der Integralquotienten sind daher Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coëfficienten, also algebraische Functionen. Dann aber kann man auf ganz ähnliche Weise, wie Herr Fuchs[1] bei den Differentialgleichungen dritter Ordnung, zeigen, dass alle Integrale bis auf den Factor $Ce^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$ algebraische Functionen sind. Setzt man nämlich $\eta_\varkappa = \eta_1 \int z_\varkappa dx$ $\varkappa = 2, 3 \ldots n$, so wird $z_\varkappa = \frac{d}{dx}\left(\frac{\eta_\varkappa}{\eta_1}\right)$, also algebraisch.

Nun bilden die $\frac{d}{dx}\left(\frac{\eta_\varkappa}{\eta_1}\right)$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung für $z_\varkappa$. Die Determinante D_1 dieses Systems ist dann nach der Formel, die Herr Fuchs zur Ableitung der Determinantenrelation benützt[2]

$$D_1 = c\eta_1^{-n} e^{-\int p_1 dx}$$

Die Determinante D_1 ist aber selbst eine algebraische Function von x, folglich ist $\eta_1 = Ce^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}.D_1^{-1}$ und also sind alle Integrale, da sie als Producte η_1 mit algebraischen Functionen erhalten werden können, von der angegebenen Beschaffenheit.

Substituirt man $\eta = e^{-\frac{1}{n}\int p dx}.y$ in die Differentialgleichung, so erhält man eine Differentialgleichung für y, in welcher die $n-1^{\text{te}}$ Derivirte fehlt, und welche zu Folge des Obigen nur algebraische Integrale hat. Nun konnten wir anderseits die Integrale in die Form setzen $e^{\int z dx}$, wo z Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades war. Dies bleibt auch für die Differentialgleichung für y bestehen, da die Potenzsumme der y jetzt ebenfalls verschwindet; und da diese algebraische Functionen sind, so müssen die Integrale $\int z dx$ auf Logarithmen mit rationalen

---

1 Acta Mathematica I.

2 Crell's Journal, Bd. 66, S. 131.

Zahlen multiplicirt zurückführbar sein. Dann haben aber die Integrale nach einem Abel'schen Satze die Form $\frac{1}{\delta}\log w$, wo δ eine ganze Zahl und w eine rationale Function von x und z bedeutet. Da z Wurzel einer Gleichung $n$ten Grades war, so ist auch w Wurzel einer solchen Gleichung und die Integrale y der Differentialgleichung werden somit gleich $\sqrt[\delta]{w}$.

Wir können also sagen:

Besteht zwischen n-Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung eine Relation der Form

$$y_1^m + y_2^m \ldots + y_n^m = R(x) \qquad m > 2,$$

so sind die y selbst $m$te Wurzeln aus den Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades mit rationalen Coëfficienten in x, wenn $R(x)$ nicht identisch verschwindet. Im letzteren Falle aber sind sie gleich $e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\sqrt[\delta]{w}$, wo δ eine ganze Zahl und w die Wurzel einer Gleichung $n$ten Grades bedeutet.

III.

Als zweiten Specialfall behandeln wir Differentialgleichungen dritter Ordnung zwischen denen eine Relation $f(y_1 y_2 y_3) = 0$ besteht, wo f eine ganze rationale homogene Function von der Beschaffenheit ist, dass die durch sie repräsentirte Curve ein covariantes Dreieck besitzt, d. h. ein Dreieck, welches bei allen linearen Transformationen der Curve in sich ebenfalls in sich übergeht. Dann kann die Gruppe, wenn dieses Dreieck als Coordinatendreieck eingeführt wird, nur aus Vertauschungen und Multiplication mit Constanten bestehen.

Es gehören hieher alle Curven mit zwei und drei Doppelpunkten. Im ersteren Fall bildet nämlich das Diagonaldreieck des Vierseits der Doppelpunktstangenten, im letzteren die Doppelpunkte selbst ein solches Dreieck. Überhaupt ist hier eine grosse Mannigfaltigkeit von Einzelfällen möglich, deren Aufzählung ermüden würde, und die in Bezug auf die Differentialgleichung sich nicht wesentlich unterscheiden. Es folgt mit den Resultaten des Herrn Fuchs[1] genau so wie oben die Darstellbarkeit der Integrale in der Form

$$y = C_1\sqrt[\delta]{\omega_1} + C_2\sqrt[\delta]{\omega_2} + C_3\sqrt[\delta]{\omega_3}$$

wo ω_1, ω_2, ω_3 Wurzeln einer Gleichung dritten Grades sind. Die angeschriebene Form ergibt sich nämlich als einfache Consequenz der Thatsache, dass die zufolge der Gruppeneigenschaft in der Form $e^{\int z dx}$ herstellbaren Integrale algebraisch sein müssen. Ist $f(y_1, y_2, y_3)$ speciell von der dritten Ordnung, so existirt die obige Form des Integral immer, denn im Falle des Doppelpunktes und Rückkehrpunktes, ferner des Zerfallens in Kegelschnitt und Gerade und in drei Gerade existirt ein covariantes Dreieck, wie sofort ersichtlich. In den Fällen aber, wo f das Quadrat eines Linearfactors enthält, oder ein vollständiger Cubus wird, besteht keine Relation zwischen drei unabhängigen Integralen. Diese lassen wir daher bei Seite und betrachten nur mehr den Fall einer irreductibeln Curve dritter Ordnung ohne singuläre Punkte. Denken wir uns dieselbe auf die canonische Form

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 6\varkappa x_1 x_2 x_3 = 0$$

gebracht, so entspricht jedem dadurch als Coordinatendreieck gewählten Wendepunktsdreiseit ein anderer Werth von wenn $\varkappa$ nicht verschwindet. Eine Transformation, welche ein Wendepunktdreiseits in ein anderes überführt, führt daher die Curve nicht in sich über. Alle Transformationen, welche bekanntlich durch die 18 Collineationen, welche C_3 in sich überführen, gegeben werden, sind daher von der von uns vorausgesetzten Form und die früheren Schlüsse treten in Kraft.

Verschwindet aber $\varkappa$, so ist dieser Fall als Specialfall in unserem ersten Beispiel enthalten. Steht auf der rechten Seite statt der Null eine rationale Function, so kann man durch Betrachtung der Hesse'schen und Cayley'schen Curve dasselbe Resultat erhalten, so dass man auch hier die angegebene Form der Integrale erhält.

---

[1] Acta Mathematica I.