Beweis der Darstellbarkeit irgend eines ganzen invarianten Gebildes einer binären Form als ganze Function einer geschlossenen Anzahl solcher Gebilde.

von

F. Mertens.

1.

Ich habe in dem hundertsten Bande des Crelle'schen Journals einen auf der Theorie der symmetrischen Functionen beruhenden Beweis des zuerst von Herrn P. Gordan bewiesenen Satzes gegeben, dass jedes geschlossene System binärer Formen eine endliche Anzahl von invarianten Gebilden besitzt, durch welche alle Gebilde derselben Art in ganzer Weise ausdrückbar sind. Ich will hier einen auf demselben Gedanken beruhenden Beweis des genannten Satzes für eine binäre Form mittheilen, welcher insofern einfacher und directer zu sein scheint, als er nicht des Schlusses von n auf $n+1$ bedarf.

2.

Es seien

$$p = p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad q = q_1 x_1 + q_2 x_2 \ldots\ldots s = s_1 x_1 + s_2 x_2 \ldots 1)$$

n beliebige lineare Formen,

$$P = pq \ldots\ldots\ldots\ldots s$$

ihr Product und f eine allgemeine binäre Form $n$ten Grades der Veränderlichen x_1, x_2.

Bekanntlich ist jede ganze homogene Gleichung zwischen den Coëfficienten der einzelnen Potenzproducte

$$x_1^n,\ x_1^{n-1} x_2,\ x_1^{n-2} x_2^2, \ldots\ldots\ldots x_2^n$$

in P mit von den Elementen

$$p_1, p_2, q_1, q_2, \ldots s_1, s_2 \qquad \ldots 2)$$

unabhängigen Coëfficienten, welche identisch in Bezug auf diese Elemente besteht, auch eine identische Gleichung in Bezug auf die Coëfficienten von P, so dass man letztere durch ganz beliebige Elemente, also auch durch die Coëfficienten der entsprechenden Potenzproducte von f ersetzen kann, ohne dass die Identität zu bestehen aufhört. Diese Bemerkung erlaubt die Ermittelung der allgemeinen Gestalt aller ganzen invarianten Gebilde der Form f auf dieselbe Aufgabe für das Product P zurückzuführen.

3.

Es sei Θ irgend ein ganzes invariantes Gebilde (Invariante oder Covariante) der Form f. Geht dasselbe in Θ_0 über, wenn man die Coëfficienten von f durch die entsprechenden Coëfficienten von P ersetzt, so ist Θ_0 eine ganze symmetrische Function der n Elementenpaare

$$(p_1, p_2), (q_1, q_2), \ldots (s_1, s_2), \qquad \ldots 3)$$

welche in Bezug auf die beiden Elemente jedes dieser Paare homogen und vom Grade m ist, wenn m den Grad von Θ in den Coëfficienten von f bezeichnet, und ein invariantes Gebilde der n linearen Formen (1). Als solches lässt sich[1] Θ_0 in ganzer Weise durch die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Determinanten

$$(pq) = p_1 q_2 - p_2 q_1 \quad (pr) = p_1 r_2 - p_2 r_1 \ldots (rs) = r_1 s_2 - r_2 s_1$$

und die Formen (1) ausdrücken und demnach als Summe von Gliedern darstellen, welche alle die Gestalt

$$\mathfrak{C}\, (pq)^{\alpha_{12}} (pr)^{\alpha_{13}} \ldots (rs)^{\alpha_{n-1n}} p^{\beta_1} q^{\beta_2} \ldots s^{\beta_n} \qquad \ldots 4)$$

haben, wo

$$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots \alpha_{n-1n}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \qquad \ldots 5)$$

---

[1] Clebsch, Über symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelles Journal, Bd. 59.

$\frac{1}{2}n(n+1)$ ganze nicht negative Exponenten und $\mathfrak{C}$ einen von den Elementen (2) und den Veränderlichen x_1, x_2 unabhängigen Coëfficienten bezeichnen.

Da Θ_0 sowohl in Bezug auf p_1, p_2 als auch q_1, q_2 u. s. w. vom Grade m ist, so hat man für die Exponenten (5) die n Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{l}
* \quad \alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{1n}+\beta_1=m \\
\alpha_{21} \quad * \quad +\alpha_{23}+\ldots+\alpha_{2n}+\beta_2=m \\
\alpha_{13}+\alpha_{23} \quad * \quad +\ldots+\alpha_{3n}+\beta_3=m \\
\\
\alpha_{1n}+\alpha_{2n}+\ldots+\alpha_{n-1n} \; * \; +\beta_n=m.
\end{array}$$

Die Exponentensysteme der einzelnen Glieder (4) bilden daher in Verbindung mit der Zahl m lauter aus nicht negativen ganzen Zahlen bestehende Lösungen dieser Gleichungen.

Nennt man eine Lösung der genannten Art zerlegbar oder nicht, je nachdem ihre Zahlen aus den entsprechenden Zahlen zweier anderen Lösungen derselben Art, von welchen jedoch keine aus lauter Nullen besteht, durch Addition hervorgehen können oder nicht, so besitzen die vorstehenden Gleichungen nur eine endliche Anzahl[1] unzerlegbarer Lösungen

$$\begin{array}{l}
\alpha'_{12}, \alpha'_{13}, \ldots \quad \alpha'_{n-1n}, \beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_n, m' \\
\alpha''_{12}, \alpha''_{13}, \ldots \quad \alpha''_{n-1n}, \beta''_1, \beta''_2, \ldots \beta''_n, m''
\end{array}$$

und die allgemeinste Lösung in nicht negativen ganzen Zahlen ist in den Formeln

$$\begin{array}{l}
\alpha_{12}=a\,\alpha'_{12}+b\,\alpha''_{12}+\ldots \\
\alpha_{13}=a\,\alpha'_{13}+b\,\alpha''_{13}+.
\end{array}$$

---

[1] Gordan, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coëfficienten, Mathem. Annalen, Bd. 6.

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1\,n} &= a\alpha'_{n-1n} + b\alpha''_{n-1n} + \ldots \\
\beta_1 &= a\beta'_1 + b\beta''_1 + . \\
\beta_2 &= a\beta'_2 + b\beta''_2 + . \\
& \\
\beta_n &= a\beta'_n + b\beta''_n + \ldots \\
m &= am' + bm'' + \ldots
\end{aligned}$$

enthalten, wo $a, b, .$ ganze nicht negative Zahlen bezeichnen.

Setzt man daher

$$(pq)^{\alpha'_{12}}(pr)^{\alpha'_{13}}\ldots(rs)^{\alpha'_{n-1n}}\,p^{\beta'_1}q^{\beta'_2}\ldots s^{\beta'_n} = A$$

$$(pq)^{\alpha''_{12}}(pr)^{\alpha''_{13}}.\;\;.\,.(rs)^{\alpha''_{n-1n}}\,p^{\beta''_1}q^{\beta''_2}..\;\;s^{\beta''_n} = B,$$

so nimmt jedes der Glieder (4) die Gestalt

$$\mathfrak{C}A^aB^b\ldots$$

an und Θ_0 erscheint infolge dessen als ganze Function der Ausdrücke

$$A, B, .. \qquad \ldots 6)$$

Man kann demnach

$$\Theta_0 = G(A, B, \ldots)$$

setzen, wo G eine ganze Function bezeichnet, deren Coëfficienten von den Elementen (2) und den Veränderlichen x_1, x_2 unabhängig sind.

4.

Es sei $n! = \nu$ und man bezeichne die Werthe, welche die Ausdrücke (6) bei allen möglichen Permutationen der n Elementenpaare (3) annehmen, mit

$$\begin{gathered}
A, B, \ldots \qquad \ldots 7) \\
A_1, B_1, \ldots \\
\\
A_{\nu-1}, B_{\nu-1}\ldots
\end{gathered}$$

Da Θ_0 symmetrisch ist, so hat man auch

$$\Theta_0 = G(A_1, B_1, \ldots)$$

$$\Theta_0 = G(A_{\nu-1}, B_{\nu-1}, \ldots)$$

und es ergibt sich durch Addition

$$\Theta_0 = \frac{1}{\nu}\left[G(A, B, \ldots) + G(A_1, B_1, \ldots) + \ldots + G(A_{\nu-1}, B_{\nu-1}, \ldots)\right].$$

In dieser Darstellung erscheint Θ_0 als ganze symmetrische Function der ν Gruppen von Ausdrücken (7), und zwar ist diese Function in dem Sinne symmetrisch, dass sie auch dann noch ungeändert bleibt, wenn man die Ausdrücke (7) als ganz beliebige Elemente auffasst und die Elemente irgend einer Gruppe

$$A_i,\ B_i, \ldots$$

mit den entsprechenden irgend einer anderen Gruppe

$$A_\varkappa, B_\varkappa, \ldots$$

vertauscht. Ich habe an einem anderen Orte[1] gezeigt, dass eine solche Function immer in ganzer Weise durch die Coëfficienten des Productes

$$(x + Ay + Bz + \ldots)(x + A_1 y + B_1 z + \ldots). \\ .(x + A_{\nu-1}\, y + B_{\nu-1} z + \ldots) \qquad \ldots 8)$$

darstellbar ist. Dieses Product selbst ist aber eine ganze symmetrische Function der Elementenpaare (3) und seine bei den einzelnen Potenzproducten $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$ stehenden Coëfficienten sind überdies in Bezug auf die Elemente jedes der Paare (3) homogen. Man kann daher alle diese Coëfficienten als ganze Functionen der Coëfficienten von P darstellen. Hieraus folgt, dass das Product (8) sich in ganzer Weise durch $x, y, z, \ldots$ und eine endliche Anzahl von Ausdrücken

$$L_0, M_0, \ldots \qquad \ldots 9)$$

[1] Sitzb. der k. Akademie der W. Abth. II. Bd. 81.

darstellen lässt, welche ganze homogene Functionen der Coëfficienten von P und der Veränderlichen x_1, x_2 mit Zahlencoëfficienten sind. Dann ist aber auch Θ_0 als ganze Function der Ausdrücke (9) darstellbar und man kann

$$\Theta_0 = F(L_0, M_0 \ldots) \tag{10}$$

setzen, wo F eine ganze Function bezeichnet.

Gehen nun die Ausdrücke (9) in

$$L, M$$

über, wenn man in denselben die Coëfficienten von P durch die von f ersetzt, so verwandelt sich die Identität (10) in Folge eben dieser Ersetzung in

$$\Theta = F(L, M, \ldots)$$

und es ist klar, dass L, M, . . invariante Gebilde von f sind.