Über Dreischaarcurven

von

Karl Bobek in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. December 1888.)

Die algebraischen Curven, welche eine einzige einfach unendliche lineare Schaar von Gruppen zu drei Punkten enthalten, habe ich Dreischaarcurven genannt. Dieselben sind in vieler Beziehung den hyperelliptischen Curven ähnlich. Sie sind nach diesen offenbar diejenigen Curven, welche eine möglichst einfache Specialschaar aufweisen.

Im Folgenden erlaube ich mir, der hohen Akademie einige Betrachtungen über diese Curven vorzulegen, aus denen ersichtlich, dass die meisten Sätze, welche für die adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung einer hyperelliptischen Curve m^{ter} Ordnung von mir bewiesen wurden, [1] ihre Giltigkeit für die Dreischaarcurven behalten, wenn an Stelle der adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung die adjungirten Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung der Dreischaarcurve m^{ter} Ordnung gesetzt werden. Für das Geschlecht p der Dreischaarcurve folgt hiebei offenbar $p \geqq \frac{m+2}{2}$, damit eine adjungirte Curve $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung überhaupt existiren kann.

Die bewiesenen Sätze lassen übrigens auch eine weitere Verallgemeinerung zu, auf die ich noch zurückzukommen gedenke.

---

[1] „Über hyperelliptische Curven“, Diese Sitzungsber. Bd. 93, S. 601—617 und Bd. 94, S. 861—873, 1886, sowie Mathematische Annalen, Bd. 29, S. 386—412.

§. 1.

Verhalten der Curven χ einer $(3|1)$ gegenüber.[1]

1. Ist auf einer algebraischen Curve C_p^m von der Ordnung m und dem Geschlechte p eine lineare Schaar von Gruppen zu drei Punkten $(3|1)$ vorhanden, so ist dieselbe eine Specialschaar, sobald $p > 2$ ist. Wir wollen hiebei stets voraussetzen, dass alle drei Punkte einer Gruppe beweglich sind, dass also C_p^m nicht hyperelliptisch ist.

Für $p = 3$ existiren auf C_3^m einfach unendlich viele von einander verschiedene $(3|1)$, indem die adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch einen festen Punkt von C_3^m gehen, stets eine $(3|1)$ ausschneiden.

Auf Curven vom Geschlechte 4 existiren nur zwei Schaaren $(3|1)_1$ und $(3|1)_2$, die Restschaaren von einander sind. Denn man kann jede C_4^m eindeutig umkehrbar in eine Curve 5ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten verwandeln, auf welcher die Strahlen durch jeden der Doppelpunkte eine lineare Schaar von Gruppen zu drei Punkten ausschneiden, die zweien auf C_4^m auftretenden Schaaren $(3|1)$ entsprechen müssen.

Existiren umgekehrt auf einer C_p^m zwei von einander verschiedene Schaaren $(3|1)_1$ und $(3|1)_2$, so ist $p \leqq 4$.

Denn seien $\varphi - \lambda\varphi_1 = 0$ und $\varphi' - \mu\varphi'_1 = 0$ die beiden Büschel, welche die Schaaren $(3|1)_1$ resp. $(3|1)_2$ ausschneiden, so besteht zwischen λ und μ eine algebraische Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, welche λ und μ höchstens im 3ten Grade enthalten kann, wenn jeder Curve des ersten Büschels diejenige Curve des zweiten Büschels zugewiesen wird, welche denselben Punkt von C_p^m enthält. Denn es werden durch die Gruppen der $(3|1)_1$ jedem λ drei μ und durch die Gruppen der $(3|1)_2$ jedem μ drei λ zugeordnet.

Deutet man nun λ und μ als Coordinaten in einer Ebene, so wird die Curve C_p^m auf die Curve $f(\lambda, \mu) = 0$ eindeutig umkehrbar bezogen sein. Da nun die letztere höchstens das Geschlecht $(3-1).(3-1) = 4$ haben kann, so muss auch für C_p^m folgen, $p \leqq 4$.

---

[1] Ich habe für die übliche Bezeichnung g_Q^q einer linearen Schaar die Bezeichnung $(Q|q)$ gewählt.

Ist also $p > 4$, so kann C_p^m nur **eine einzige** $(3|1)$ besitzen. Wir wollen im Folgenden an der Voraussetzung $p > 4$ festhalten, da die Fälle $p \leqq 4$ hinreichend bekannt und einfach sind.

2. Wir wollen die Punkte einer Gruppe (3) von $(3|1)$ mit a, a', a'' bezeichnen, und dieselben ein Tripel nennen. Ferner sei mit ω die Anzahl linear unabhängiger Curven χ der Ordnung $(m—4)$, welche zu C_p^m adjungirt sind, bezeichnet, so dass eine solche χ durch $\omega—1$ willkürliche Punkte bestimmt ist. Dann lässt sich folgender Satz beweisen:

Ist also $\omega > 0$, so liegen a, a', a'' stets auf einer Geraden. Denn alle adjungirten Curven φ der $(m—3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche zwei Punkte eines Tripels enthalten, müssen auch durch den dritten Punkt gehen. Würde φ_1 durch a, a' gehen, a'' aber nicht enthalten, so lege man durch a'' eine willkürliche Gerade A, diese bildet mit φ_1 eine adjungirte Curve $(m—2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Gruppe a, a', a'' der vorausgesetzten $(3|1)$ enthält. Durch den Restschnitt dieser Curve müssen also Curven $(m—2)^{\text{ter}}$ Ordnung gehen, welche die $(3|1)$ ausschneiden. Da sie aber alle A als festen Bestandtheil enthalten, so könnten nur die zwei Punkte a, a' variabel sein, also eine $(2|1)$ bilden. Diese kann aber nicht auftreten, sobald eine adjungirte Curve $(m—4)^{\text{ter}}$ Ordnung existirt. [1]

Sei nun χ irgend eine Curve $(m—4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die nicht durch a, a', a'' geht und A sei die Gerade, welche a', a'' mit einander verbindet, dann ist $A.\chi$ eine adjungirte Curve $(m—3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zwei Punkte des Tripels enthält, also auch den dritten enthalten muss. Da aber χ nicht durch a geht, so muss A den Punkt a enthalten.

Da ω stets grösser als Null ist, sobald $p > m—2$ ist [2], so folgt specieller:

Auf einer C_p^m, für welche $p > m—2$, liegen die Tripel einer $(3|1)$ stets auf Geraden.

3. Für die hyperelliptischen Curven haben die adjungirten φ die charakteristische Eigenschaft, dass alle, welche einen Punkt x der Grundcurve enthalten, noch durch den conjungirten x' gehen

[1] Vergl. die Abhandlung: „Über hyperelliptische Curven", Mathem. Annalen, Bd. 29, S. 387.

[2] Ebendaselbst.

so dass x, x' eine Gruppe der vorhandenen $(2|1)$ bilden. Das Analogon für die $(3|1)$ enthält der folgende Satz:

Jede adjungirte Curve χ der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche einen Punkt x der Curve C_p^m enthält, geht noch durch die conjungirten Punkte x', x'' von C_p^m, sobald x, x', x'' einer $(3|1)$ angehören.

Denn ist x, x', x'' ein Tripel der $(3|1)$ und legt man die Curve χ durch x und sie ginge nicht durch x' und x'', so würde eine willkürlich durch x' gelegte Gerade A, die x'' nicht enthalten soll, mit χ zusammen eine adjungirte Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, welche die x, x' enthält und nicht durch x'' geht, was unmöglich ist. Würde aber χ blos x' und nicht x'' enthalten, wenn sie durch x geht, so würde eine beliebige Gerade der Ebene mit χ eine adjungirte Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, die bloss zwei Punkte eines Tripels enthält.

4. Aus diesem Verhalten der Curven χ folgt unmittelbar der Satz:

Eine $(3|1)$ kann auf einer C_p^m nicht auftreten, sobald eine zu C_p^m adjungirte Curve der $(m-5)^{\text{ten}}$ Ordnung existirt.

Ist $p > 2m-5$, so existirt stets eine zu C_p^m adjungirte Curve der $(m-5)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Denn unter der Voraussetzung $p > 2m-5$ oder $5 > 2m-p$ schneiden die Kegelschnitte der Ebene auf C_p^m Specialschaaren aus, und es muss also durch eine auf dem Kegelschnitte θ liegende Gruppe von $2m$ Punkten eine adjungirte Curve φ der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung gehen. Diese muss nun, da θ durch keinen vielfachen Punkt zu gehen braucht, denselben in $2m$ Punkten schneiden, zerfällt daher nothwendig in eine adjungirte Curve der $(m-5)^{\text{ten}}$ Ordnung und θ, da $2m > 2m-3$ ist.[1]

---

[1] Auf analoge Art wird gezeigt, dass immer eine zu C_p^m adjungirte Curve der Ordnung $m-i-3$ existirt, sobald

$$p > im - \frac{1}{2} i(i+3)$$

ist. Und zwar existiren, wie der Riemann-Roch'sche Satz ergibt,

$$p - im + \frac{1}{2} i(i+3) + \rho$$

Es ergibt sich daher der specielle Satz:

Ist $p > 2m-5$, so kann auf C_p^m eine $(3|1)$ nicht existiren,

sowie die Umkehr:

Existirt auf C_p^m eine $(3|1)$, so ist nothwendig $p \leqq 2m-5$.

Es wird sich später zeigen, dass der Fall $p = 2m-5$ nur dann eintreten kann, wenn C_p^m einen $(m-3)$-fachen Punkt besitzt. Analoges findet auch bei den hyperelliptischen Curven statt, wo für $p = m-2$ nur ein $(m-2)$-facher Punkt auftreten kann. [1]

Diese vollständige Analogie der Dreischaarcurven mit den hyperelliptischen, die im Folgenden noch mehr hervortritt, lässt auch die Umkehr des obigen Satzes vermuthen, worauf ich später zurückzukommen hoffe.

§. 2.

Die Curven χ.

1. Eine adjungirte Curve χ der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung schneidet C_p^m in $2p-2-m$ Punkten, die ausserhalb der vielfachen Punkte von C_p^m liegen. Soll also überhaupt eine χ existiren können, so muss $p \geqq \frac{m+2}{2}$ sein. Existirt ein Büschel von Curven χ, so muss $p > \frac{m+2}{2}+2$. Denn würde $p \leqq \frac{m+2}{2}+2$ sein, so würde der Büschel von Curven χ aus C_p^m eine Schaar von Gruppen zu zwei Punkten oder einem Punkte ausschneiden, die C_p^m wäre also im ersten Falle hyperelliptisch, im zweiten rational, was Beides unmöglich ist, sobald eine χ existirt. [2]

Eine χ existirt immer, sobald $p > m-2$ ist, und zwar existiren wenigstens $\omega = p-m+2$ linear unabhängige χ, denn

---

von einander linear unabhängige Curven der $(m-i-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn die Gruppen, in denen die Curven i^{ter} Ordnung die C_p^m schneiden, einer Vollschaar $(im/\frac{1}{2}i(i+3)+\rho)$ angehören.

[1] Vergl. Mathem. Annalen, Bd. 29.

[2] Vergl. l. c.

alle Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung φ, welche durch $(m-2)$ Punkte einer willkürlichen Geraden gehen, müssen in diese und in Curven χ zerfallen.

2. Ist $\omega = p-m+2+\tau$, wobei $\tau \geqq 0$ sein soll, also ω um τ grösser als die obige Betrachtung es liefern würde, so schneiden die Geraden der Ebene aus C_p^m eine Theilschaar aus, die in der Vollschaar $[m|\tau+2]$ enthalten ist und umgekehrt, schneiden die Geraden der Ebene die C_p^m in Gruppen, welche der Vollschaar $[m|\tau+2]$ angehören, so existiren $\omega = p-m+2+\tau$ linear unabhängige Curven χ.

Diess ergibt ohne weiters der Riemann-Roch'sche Satz, in dem die $[m|\tau+2]$ Restschaar ist der $(2p-2-m|\omega-1)$, welche die χ ausschneiden.

3. Es kann stattfinden, dass von den $2p-2-m$ Schnittpunkten der Curven χ nicht alle beweglich sind, sondern dass σ derselben, die die Gruppe Σ bilden sollen, fest sind, so dass alle χ die σ Punkte, welche zu den Schnittpunkten zählen, die nicht in die vielfachen Punkte fallen, enthalten. Hiebei ist zu beachten, dass wenn die χ in einem vielfachen Punkt einen Zweig berührt, dann einer von den $2p-2-m$ Schnittpunkten der Curve χ mit C_p^m eben in den vielfachen Punkt fällt. Berühren also alle χ einen Zweig, so ist der auf diesem Zweige liegende Punkt von C_p^m zu Σ zu zählen.

Gehen alle χ durch σ Punkte, so schneiden sie C_p^m in einer Schaar $(\Omega|\omega-1)$, wobei

$$\omega-1 = p-m+1+\tau$$
$$\Omega = 2p-2-m-\sigma$$

ist. Der Riemann-Roch'sche Satz ergibt dann als Restschaar eine $(m+\sigma|\tau+2+\sigma)$, das heisst eine Schaar von Gruppen zu $m+\sigma$ beweglichen Punkten und der Mannigfaltigkeit $\tau+2+\sigma$. Die $m+\sigma$ Punkte, welche eine willkürliche φ, die durch eine Gruppe (Ω) von $(\Omega|\omega-1)$ geht, ausschneidet, müssen alle beweglich sein. Denn würden σ' von ihnen fest sein, so müssten alle φ, welche durch (Ω) gehen, diese σ' Punkte enthalten und in Gruppen $(m+\sigma-\sigma')$ von $m+\sigma-\sigma'$ Punkten die C_p^m schneiden. Die Restschaar dieser Gruppen $(m+\sigma-\sigma')$ wäre eine Schaar von Gruppen zu $2p-2-m-\sigma+\sigma' = \Omega+\sigma'$ beweglichen Punkten, was unmöglich ist. Denn nimmt man als specielle $(m+\sigma-\sigma')$ eine Gruppe, die durch eine χ und eine Gerade der Ebene ausgeschnitten wird, so sieht man, dass die σ' Punkte in der Gruppe Σ enthalten sein müssten, und dass also diese σ' Punkte mit χ beweglich wären, gegen die Voraussetzung bezüglich Σ.

Hält man also von den die $(m+\sigma|\tau+2+\sigma)$ ausschneidenden Curven φ, die durch eine (Ω) gehen, σ beliebige Punkte auf C_p^m fest, so erhält man eine $(m|\tau+2)$. Nimmt man speciell als die σ Punkte die Gruppe Σ an, so erhält man die Schaar $[m|\tau+2]$, in welcher auch die Gruppen enthalten sind, die die Geraden der Ebene auf C_p^m ausschneiden.

Hieraus erkennt man, dass die σ Punkte von Σ genau σ von einander unabhängige lineare Bedingung für die hindurchgehenden φ bilden müssen. Denn würden die σ Punkte nur $\sigma-\varepsilon$ Bedingungen für die durchgehenden φ sein, so könnten sie auch nicht mehr für diejenigen φ bilden, welche noch durch eine (Ω) gehen. Da aber durch (Ω) noch genau $\tau+2+\sigma$ Curven φ gehen, so würden durch Σ und (Ω) wenigstens $\tau+2+\varepsilon$ Curven φ gehen, die aus C_p^m eine $(m|q)$ ausschneiden würden, für die $q \geqq \tau+2+\varepsilon$ wäre, und die die Gruppen enthielte, welche die Geraden der Ebene aus C_p^m ausschneiden, von der wir voraussetzten, dass sie eine $[m|\tau+2]$ ist.

4. Umgekehrt: Existirt eine $(\Omega|\omega-1)$, die von χ Curven ausgeschnitten wird, für welche

$$\omega-1=p-m+1+\tau$$
$$\Omega=2p-2-m-\sigma$$

ist, so zwar, dass die Geraden der Ebene Gruppen ausschneiden, die einer Vollschaar $[m|\tau+2]$ angehören, so gehen alle χ durch eine Gruppe Σ von σ Punkten auf C_p^m.

Ist χ_1 eine Curve $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Gruppe (Ω) ausschneidet, und A eine beliebige Gerade der Ebene, so schneidet die aus A und χ_1 bestehende Curve φ, welche (Ω) enthält, die C_p^m in einer Gruppe $(m+\sigma)$ von $m+\sigma$ Punkten, welche Restgruppe der Schaar $(\Omega|\omega-1)$ ist. Die Vollschaar der Curven φ, welche durch $(m+\sigma)$ geht, schneidet C_p^m in der $(\Omega|\omega-1)$, da aber alle φ die Gerade A als Bestandtheil enthalten müssen, so zerfallen sie in diese Gerade A und in die Schaar der Curven χ, welche die

$(\Omega | \omega - 1)$ ausschneiden, und welche daher alle durch die Gruppe Σ gehen müssen.

Als Beispiel sei hier folgende Curve C_7^7 erwähnt. Man lege durch 8 willkürliche Punkte der Ebene eine Curve 7ter Ordnung, welche diese Punkte zu Doppelpunkten hat und durch den 9ten geht, welcher die 8 zu Basispunkten eines Büschels Curven dritter Ordnung ergänzt. Solche Curven kann man auch projectivisch durch einen Curvenbüschel 3ter und 4ter Ordnung erzeugen, welche die 8 Punkte gemeinschaftlich haben. Die Curven χ sind hier die Curven 3ter Ordnung, welche alle den 9ten Punkt enthalten und aus C_7^7 daher nur eine $(4|1)$ ausschneiden, indem $\sigma = 1$ wird.

5. Es enthalte nun C_p^m eine $(3|1)$, dann müssen die einem Punkte s von Σ conjungirten Punkte s', s'' stets in einen und denselben vielfachen Punkt von C_p^m fallen.

Denn liegt s in Σ und würden s', s'' nicht in den vielfachen Punkten liegen, so müssten sie doch unter den Punkten Σ vorkommen, nach Satz 3 auf pag. 145. Dann würden aber alle Curven φ, welche durch s, s' gehen, den Punkt s'' enthalten, also könnten die σ Punkte von Σ nicht σ Bedingungen für die φ bilden, da s, s', s'' nun 2 Bedingungen für die hindurchgehenden φ sind.

Würden nun s', s'' in den vielfachen Punkten d und d_1 auf den Zweigen z und z_1 liegen, so müssten alle Curven φ, welche durch s und s' gehen, auch s'' enthalten, d. h. die Curven φ, welche durch s gehen und in d den Zweig z berühren, müssten in d_1 den Zweig z_1 berühren. Nun bildet eine jede χ und eine willkürlich durch d gezogene Gerade eine φ, die durch s geht und in d den Zweig z berührt, also müsste jede χ in d_1 den Zweig z_1, und, wie ebenso folgt, in d den Zweig z berühren, dann würden aber s' und s'' zu der Gruppe Σ zählen, was nach Obigem unmöglich ist. Es können also nur z und z_1 Zweige eines und desselben vielfachen Punktes sein.

Umgekehrt liegen zwei Punkte s', s'' eines Tripels der $(3|1)$ auf verschiedenen Zweigen z und z_1 eines vielfachen Punktes d, so gehen alle χ durch den dritten Punkt s des Tripels. Denn da s, s', s'' eine Gruppe der $(3|1)$ bilden, so werden alle φ', welche C_p^m in s' und s'' auf z, respective z_1 berühren, nothwendig s enthalten müssen. Unter diesen φ' treten aber auch die Curven φ_1' auf, welche aus einer willkürlich durch d gezogenen Geraden und den Curven χ bestehen. Die letzteren müssen also alle durch s gehen.

§. 3.

Die Enveloppe $\mathfrak{C}$.

1. Liegen drei Punkte x, x', x'' einer Gruppe von $(3|1)$ nicht in einer Geraden, was nur dann stattfinden kann, wenn keine adjungirte Curve χ der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung existirt, so ist die Enveloppe der drei Geraden X, X', X'', welche die drei Punkte untereinander verbinden (X enthält x', x'' u. s. w.) eine Curve $\mathfrak{C}$ der Classe $c_1 = 2m-2-p$ und demselben Geschlechte p, wie die Grundcurve C_p^m. Dies Letztere folgt daraus, dass jeder Tangente X von $\mathfrak{C}$ der Punkt x von C_p^m zugeordnet werden kann, welcher dieser Geraden in dem Dreieck x, x', x'' gegenüberliegt, wodurch beide Curven ein-eindeutig auf einander bezogen sind.

Um c_1 zu bestimmen, beachte man, dass die durch $(3|1)$ auf C_p^m hervorgerufene Correspondenz $(2, 2)_1$

$$\alpha = 2+2+2p = 2p+4$$

Coïncidenzpunkte aufweist. Projicirt man nun die $(3|1)$ aus einem Punkte t der Ebene, so erhält man im Strahlenbüschel (t), eine Correspondenz $(2m, 2m)$, deren Coïncidenzen aus den Strahlen bestehen, die t mit den α Coïncidenzpunkten der obigen Correspondenz $(2, 2)_1$ verbinden und aus den doppelt zählenden durch t gehenden c_1 Tangenten von $\mathfrak{C}$. Es ist also

$$2c_1+\alpha = 2m+2m$$
$$c_1 = 2m-2-p$$

Es kann ein vielfacher Punkt von C_p^m zwei Punkte eines Tripels auf verschiedenen Zweigen besitzen, so dass dies nicht als Coïncidenz der Correspondenz $(2, 2)_1$, wohl aber als Coïncidenz für den Strahlenbüschel (t) zählt. Und zwar zählt jeder Strahl, welcher einen solchen singulären Punkt mit t verbindet, als zwei Coïncidenzen im Strahlenbüschel. Sind also s solcher singulärer Punkte der C_p^m vorhanden, so wird, wenn c'_1 die Classe der übrigen Enveloppe ist,

$$c'_1 = 2m-2-p-s$$

sein, wie auch daraus klar, dass jeder solche singuläre Punkt zur Gesammtenveloppe zählt, deren Classe $c'_1 + s = c_1$ bleibt.

2. Die Enveloppe $\mathfrak{C}$ und die Curve C^m_p sind durch Zuweisung des Punktes x von C^m_p und der Tangente X von $\mathfrak{C}$, welche x', x'' trägt ein-eindeutig auf einander bezogen, also gehen $m+c_1$ Tangenten von $\mathfrak{C}$ durch ihre entsprechenden Punkte von C^m_p. Eine Tangente X geht durch den Punkt x erstens, wenn x einer der α Coïncidenzpunkte der Correspondenz $(2, 2)_1$ ist, zweitens, wenn die drei Punkte x, x', x'' auf einer Geraden liegen. Sind t solcher Geraden vorhanden, so zählen dieselben offenbar als $3\,t$ Tangenten von $\mathfrak{C}$, welche durch ihre entsprechenden Punkte gehen. Es ist also

$$3\,t + \alpha = m + c_1$$

und

$$t = m - p - 2.$$

Sind s singuläre Punkte vorhanden, die auf verschiedenen Zweigen die Punkte a, a' enthalten, während a'' ausserhalb liegt, so zählt a', a'' und a, a'' als je eine der Tangenten von $\mathfrak{C}$, die den entsprechenden Punkt enthält, also wird die obige Gleichung die Gestalt annehmen:

$$3\,t' + \alpha + 2s = m + c'_1$$

also ist

$$t' = m - p - 2 - s,$$

oder die s Geraden a, a'' zählen mit unter die Geraden, welche Tripel der $(3|1)$ enthalten.

Aus einem bekannten Satze der Algebra schliesst man daher, dass, wenn mehr als $m-p-2$ Tripel einer $(3|1)$ auf Geraden liegen, es alle thun. In diesem Falle reducirt sich die Classe von $\mathfrak{C}$ auf $\frac{1}{3}\,c_1$.

Für $p > m-2$ ergibt sich t negativ, da aber dann stets wenigstens eine adjungirte Curve χ der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung existirt, so folgt, dass alle Tripel auf Geraden liegen.

3. Wir setzen $\omega > 0$ voraus, so dass Curven χ existiren, und zwar mögen dieselben alle durch σ feste Punkte von C^m_p gehen. Dann treten σ vielfache Punkte d von C^m_p auf, in welchen Paare s', s'' entsprechender Punkte auf dem Zweig z und z_1 liegen.

Projicirt man nun die $(3|1)$ aus einem Punkte t der Ebene, so treten die σ Strahlen, welche t mit den σ Punkten d verbinden, doppelt, die α Strahlen, welche t mit den α Coïncidenzpunkten der Correspondenz $(2, 2)_1$ verbinden, einfach, und die c Tangenten von $\mathfrak{C}$ sechsfach als Coïncidenzstrahlen der in (t) enstehenden Correspondenz $(2m, 2m)$ auf; so dass also

$$6c+2\sigma+\alpha = 4m$$

oder

$$3c = 2m-2-p-\sigma \qquad \ldots a)$$

wird. Die rechte Seite ist stets durch 3 theilbar, wie sich aus Folgendem ergibt.

Der bewegliche Schnitt einer χ mit C_p^m muss aus $3\omega-3$ Punkten bestehen. Denn ist x, x', x'' ein Tripel der $(3|1)$ und legt man durch x und $\omega-2$ willkürliche Punkte von $C_p^m: a_1, a_2 \ldots a_{\omega-2}$ die Curve χ_1, so schneidet sie ausser in x', x'' noch in $2(\omega-2)$ Punkten $a'_1 a''_1, a'_2 a''_2 \quad a'_{\omega-2} a''_{\omega-2}$ und durch die $3(\omega-2)$ Punkte gehen die Curven χ, welche die $(3|1)$, zu der x, x', x'' gehört, ausschneiden. Die Curven χ können daher nur in $3\omega-3$ beweglichen Punkten die C_p^m schneiden oder es ist $\Omega = 3\omega-3$. Daher ist

$$\Omega = 3\omega-3 = 2p-2-m-\sigma \qquad \ldots 2)$$

und da

$$\omega = p+2-m+\tau \qquad 1)$$

ist, so folgt:

$$p = 2m-5-3\tau-\sigma \qquad \ldots 3)$$

und aus a)

$$c = \tau+1 \qquad \ldots 4)$$

als Classe der Enveloppe.

4. Ist $\tau = 0$, so folgt, dass die Enveloppe ein Punkt sein muss, dass also C_p^m einen $(m-3)$-fachen Punkt besitzen muss, dessen Strahlen auf C_p^m die $(3|1)$ ausschneiden.

Dies ergibt sich auch folgendermassen: Ist $\tau = 0$, schneiden also die Geraden der Ebene auf C_p^m eine Vollschaar aus, so zerfallen alle adjungirten Curven φ der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch den vollständigen Schnitt einer adjungirten χ der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung mit C_p^m gehen, in diese und die Geraden der Ebene. Nun bildet eine beliebige χ_1 mit der Geraden X, welche das Tripel x, x', x'' von $(3|1)$ enthält, das nicht auf χ_1 liegen soll, eine φ_1, die eine Gruppe der $(3|1)$ enthält, und alle φ, welche durch den Restschnitt der φ_1 gehen, schneiden die $(3|1)$ aus. Da nun alle letzteren χ_1 als festen Bestandtheil enthalten müssen, so muss durch die $(m-3)$ übrigen Schnittpunkte von X mit C_p^m ein Strahlenbüschel gehen, welcher die $(3|1)$ ausschneidet, d. h. C_p^m hat einen $(m-3)$-fachen Punkt, durch den die Strahlen gehen, welche die Tripel der $(3|1)$ tragen.

Ist hiebei $p = 2m-3-\sigma$, so müssen nebst des $(m-3)$-fachen Punktes d noch andere vielfache Punkte auftreten, die als σ Doppelpunkte zählen. Es lässt sich nun zeigen, dass nur **Doppelpunkte auftreten können.** Punkte höherer Vielfachheit als drei können überhaupt nicht auftreten.

Da nämlich C_p^m einen $(m-3)$-fachen Punkt d besitzt, so zerfallen alle χ in $(m-4)$ durch d gehende Gerade. Treten σ Doppelpunkte d' auf, so muss jede χ die σ Geraden, welche d mit den d' verbinden, als feste Bestandtheile enthalten, so dass von einer χ nur $m-4-\sigma$ Punkte willkürlich angenommen werden können, wodurch sich

$$\omega = m-3-\sigma$$

ergibt. Da nun wegen des $(m-3)$-fachen Punktes und der σ Doppelpunkte

$$p = 2m-5-\sigma$$

folgt, so ist

$$\omega = p-m+2,$$

also nach Gleichung 1) $\tau = 0$.

Würde aber ein dreifacher Punkt auf C_p^m auftreten in d'' und überdies $(\sigma-3)$ Doppelpunkte, so dass $p = 2m-5-\sigma$ ist, so müssten die Curven χ die Gerade d, d'' doppelt enthalten, es wären also nur $m-3-\sigma$ Gerade willkürlich, oder es ist

$$\omega = m-2-\sigma,$$

woraus mit Rücksicht auf p folgt:

$$\omega = p-m+3,$$

also nach Gleichung 1) $\tau = 1$.

Enthält mithin eine C_p^m mit $(m-3)$-fachem Punkt noch einen dreifachen Punkt, so schneiden die Geraden der Ebene auf C_p^m keine Vollschaar mehr aus.

Ist daher $\tau = 0$ und enthält C_p^m eine $(3|1)$, so können ausser dem $(m-3)$-fachen Punkte nur noch Doppelpunkte auftreten, sobald eine zu C_p^m adjungirte Curve der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung existirt, und zwar treten, wenn $p = 2m-5-\sigma$ ist, noch σ Doppelpunkte auf. Die Gruppe Σ von Punkten, durch welche alle χ gehen, besteht sodann aus den σ einfachen Schnittpunkten der Geraden, welche den $(m-3)$-fachen Punkt von C_p^m mit den σ Doppelpunkten verbinden.

Hat die Curve C_p^m ausser dem $(m-3)$-fachen Punkte noch δ dreifache und σ Doppelpunkte, so dass

$$p = 2m-5-3\delta-\sigma$$

ist, so ist $\tau = \delta$. Denn es ergibt sich, wie oben:

$$\omega = m-3-2\delta-\sigma,$$

also mit Rücksicht auf p

$$\omega = p-m+2+\delta,$$

daher nach Gleichung 1) $\tau = \delta$.

Umgekehrt hat C_p^m einen $(m-3)$-fachen Punkt, und ist $\tau > 0$, so treten noch τ dreifache Punkte auf, sobald $\omega > 0$ ist. Denn würden ausser dem $(m-3)$-fachen Punkte nur Doppelpunkte auftreten, so wäre nothwendig $\tau = 0$.

5. Die Enveloppe $\mathfrak{C}$ ist, sobald die Tripel der $(3|1)$ auf Geraden liegen, rational und im Allgemeinen irreducibel. Sie kann zerfallen in einzelne Punkte und in eine irreducible Enveloppe oder sie kann auch aus einer mehrfach gezählten rationalen Enveloppe bestehen.

Das erstere tritt ein, sobald die C_p^m einen Punkt höherer Vielfachheit als $c = \tau+1$ besitzt, denn dann gehen durch diesen mehr Tangenten von $\mathfrak{C}$, als c, die Geraden nämlich, welche den vielfachen Punkt mit den Paaren verbinden, die den einzelnen Punkten der Zweige entsprechen. Es kann auch der Fall dann eintreten, wenn drei Punkte auf drei verschiedenen Zweigen eines und desselben vielfachen Punktes ein Tripel bilden.

Trägt jede Tangente der Enveloppe zwei oder mehrere Tripel der $(3|1)$, so ist die Enveloppe doppelt oder mehrfach zu zählen, wodurch ihre Classe dann $c = \tau + 1$ wird.

§. 4.

Specielles Verhalten der einer Dreischaarcurve C_p^m adjungirten Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung.

1. Wir setzen die rationale Enveloppe der Geraden, welche die Tripel der $(3|1)$ tragen, als irreducibel voraus, so dass ihre Classe $c = \tau + 1$ ist, und ebenso sei

$$\omega = p - m + 2 + \tau \qquad \ldots 1)$$

grösser als Null.

Durch einen willkürlichen Punkt y der Ebene ziehen wir die c Tangenten von $\mathfrak{C}$, die mit $T_1, T_2 \quad T_c$ bezeichnet sein mögen. Durch die c auf diesen Tangenten gelegenen Tripel $(t_1), (t_2), \quad (t_c)$ gehen noch genau $\omega - c$ linear unabhängige Curven χ. Es gilt nun der Satz:

Ist $\omega > c$, so gehen alle $\omega - c$ linear unabhängigen Curven χ, welche die c Tripel $(t_1), (t_2) \quad (t_c)$ enthalten auch durch den Punkt y der Ebene, von dem aus die Tangenten $T_1, T_2 \quad T_c$ der $\mathfrak{C}$ gezogen wurden.

Man nehme noch $\omega - c$ willkürliche Tripel $(t_{c+1}), (t_{c+2}) \ldots (t_\omega)$ auf den Tangenten $T_{c+1}, T_{c+2} \quad T_\omega$ von $\mathfrak{C}$ zu den obigen c Tripeln hinzu und bezeichne die adjungirte Curve $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $\omega - 1$ der Tripel geht, durch das Tripel (t_i) nicht, mit χ_i.

Dann sind

$$T_1\chi_1, \; T_2\chi_2, \qquad T_c\chi_c$$

c linear unabhängige Curven φ, welche durch die ω Tripel (t_i) und die Gruppe Σ von σ Punkten gehen.

Denn würde für constante α eine Identität

$$\alpha_1 T_1 \chi_1 + \alpha_2 T_2 \chi_2 + \ldots + \alpha_c T_c \chi_c \equiv 0$$

bestehen, ohne dass alle α verschwinden, so würde, wenn man

$$T_i = \mu_i A - \nu_i B$$

setzt, wobei $A = 0$ und $B = 0$ irgend zwei durch y gehende Gerade sind, aus derselben folgen:

$$A \sum_{1}^{c} {}_i \mu_i \alpha_i T_i \chi_i \equiv B \sum_{1}^{c} {}_i \nu_i \alpha_i T_i \chi_i$$

d. h. es müsste

$$\sum_{1}^{c} {}_i \mu_i \alpha_i T_i \chi_i \equiv B \psi$$

$$\sum_{1}^{c} {}_i \nu_i \alpha_i T_i \chi_i \equiv A \psi$$

sein, wobei ψ eine adjungirte Curve der $(m-5)^{\text{ten}}$ Ordnung wäre, diese kann aber, sobald eine $(3|1)$ vorausgesetzt ist, nicht existiren.

Durch die ω Tripel (t_i) und die Gruppe Σ von σ Punkten gehen aber genau c linear unabhängige Curven φ. Die Curven φ schneiden nämlich die C_p^m in Gruppen von $(m-3)$ Punkten, zu denen auch die $(m-3)$ Schnittpunkte der Tangenten T_i gehören, die nicht im Tripel (t_i) vorhanden sind. Durch den vollständigen Schnitt der χ_c mit C_p^m gehen genau $\tau+3$ linear unabhängige Curven φ', legt man dieselben noch durch das Tripel (t_c), so bleiben $\tau+1$ linear unabhängige durch die c Tripel.

Das Tripel (t_c) bildet nämlich für die durchgehenden φ stets nur zwei lineare Bedingungen, aber auch für die Curven φ', welche durch den vollständigen Schnitt der χ_c mit C_p^m gehen, bildet es genau zwei lineare Bedingungen. Denn würden schon die Curven φ', welche durch einen Punkt des Tripels gehen, die beiden anderen enthalten, so käme man zu dem Resultate, dass jede Gerade, welche einen der Tripelpunkte von (t_c) enthielte, auch die zwei anderen enthalten müsste, da diese Gerade mit χ_c eine φ' bildet, welche durch einen Tripelpunkt geht.

Mithin gehen durch die ω Tripel und die Gruppe Σ genau $\tau+1 = c$ linear unabhängige Curven φ'', und es ist jede solche Curve darstellbar in der Gleichungsform:

$$\varphi'' \equiv \sum_{1}^{c} {}_i a_i T_i \chi_i$$

Da nun für $\varkappa = 1, 2, \quad \omega - c$ auch $T_{c+\varkappa}\chi_{c+\varkappa}$ eine φ'' ist, so ist

$$T_{c+\varkappa} \cdot \chi_{c+\varkappa} \equiv \sum_{1}^{c} {}_i\, \beta_i^{(\varkappa)} T_i \cdot \chi_i.$$

Die Gerade $T_{c+\varkappa}$ kann durch y nicht gehen, da schon die c Tangenten T_i der irreduciblen Enveloppe $\mathfrak{C}$ durch y gehen also muss zu Folge der Identität $\chi_{c+\varkappa}$ durch y gehen. Nun waren die Tripel (t_{c+1}), (t_{c+2}) $\quad(t_\omega)$ ganz willkürlich, also ist $\chi_{c+\varkappa}$ irgend eine durch die c Tripel (t_1), (t_2) $\quad(t_c)$ gehende Curve χ, wodurch der obige Satz erwiesen erscheint.

Derselbe lässt sich auch folgendermassen aussprechen: Legt man durch einen willkürlichen Punkt y der Ebene und durch $c-1$ Tripel der C_p^m, welche auf $(c-1)$ Tangenten der Enveloppe $\mathfrak{C}$ des Punktes y liegen, die Curven χ, so gehen dieselben stets noch durch ein weiteres Tripel der $(3|1)$, das auf der letzten Tangente von $\mathfrak{C}$ des Punktes y liegt.

Man erkennt aus diesem Verhalten der χ die Analogie zu dem Verhalten der adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung einer hyperelliptischen Curve, welches ich in einer der hohen Akademie in der Sitzung vom 18. März 1886 vorgelegten Arbeit bewiesen habe.

2. Auf demselben Wege wie dort beweist man nun folgende Sätze:

Das System der Curven χ_y, welche durch die c Tripel auf den Tangenten des Punktes y gehen, bildet ein lineares Netz. Jedem Punkte y entspricht eine durch ihn gehende Curve χ_y, beschreibt y eine Gerade Y, so beschreibt χ_y einen Büschel, von dem $m-5$ Basispunkte auf Y liegen.

Ebenso ergibt sich die projectivische Erzeugung der vorgelegten C_p^m durch Büschel der χ_y und auch die Erzeugung einer beliebigen Curve, für welche $p = 2m-8$ ist, also $\tau = 1$, und die Enveloppe $\mathfrak{C}$ ein irreducibler Kegelschnitt ist. Man hat nur stets Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung statt der dortigen Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung zu nehmen. Die Gleichung dieser Curven werde ich noch in Folgendem aufstellen.

§. 5.

Die Gleichung der Dreischaarcurven.

1. Ist $f = 0$ die Gleichung der Curve C_p^m, welche eine $(3|1)$ enthält und für welche $\omega > 0$ ist, so lässt sich, wenn C eine Constante ist, dieselbe in der Form

$$C.f \equiv Y\psi - \varphi\Gamma \qquad \ldots 5)$$

darstellen, wobei $\psi = 0$ die Gleichung einer adjungirten Curve $(m-1)^{\text{ter}}$ und $\varphi = 0$ die Gleichung einer solchen Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. $Y = 0$ ist die Gleichung einer Tangente der Enveloppe $\mathfrak{C}$ und $\Gamma = 0$ die Gleichung irgend einer Curve dritter Ordnung, welche dasselbe Tripel der $(3|1)$ enthält, wie $Y = 0$.

Ist nämlich $\chi = 0$ die Gleichung irgend einer adjungirten Curve der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung und y, y', y'' ein Tripel der $(3|1)$, das nicht auf χ liegt, so schneidet die Gerade Y, welche das Tripel (y) trägt, die C_p^m noch in $(m-3)$ Punkten und durch diese, sowie das vollständige Schnittpunktsystem der χ mit C_p^m, geht der Büschel adjungirter Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die $(3|1)$ ausschneidet. Sei $\varphi = 0$ die Gleichung der Curve dieses Büschels, welche das Tripel $(a) = a, a', a''$ enthält, so ist

$$Y\chi - \mu\varphi = 0 \qquad \ldots 6)$$

die Gleichung des die $(3|1)$ ausschneidenden Büschels.

Es sei ferner $\Gamma = 0$ die Gleichung irgend einer, das Tripel (y) enthaltenden Curve dritter Ordnung, so schneidet dieselbe C_p^m noch in $3(m-1)$ Punkten, durch diese und das vollständige Schnittpunktesystem der χ mit C_p^m geht sodann ein Büschel adjungirter Curven der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welcher auch die $(3|1)$ ausschneidet. Ist $\psi = 0$ die Gleichung der Curve dieses Büschels, welche das Tripel (a) enthält, so kann die Gleichung des Büschels in der Form

$$\chi\Gamma - \mu\psi = 0 \qquad 7)$$

geschrieben werden, indem jedem μ dasselbe Tripel der $(3|1)$ zugewiesen wird, wie in der Gleichung 6) des Büschels der Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die Büschel 6) und 7) erzeugen nun, wenn Curven, die demselben μ entsprechen, einander zugewiesen werden, eine Curve

$(2m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus C_p^m und χ besteht, indem für $\mu=0$ die Curve $\chi=0$ beiden Büscheln gemeinschaftlich wird. Eliminirt man μ aus 6) und 7) und lässt den Factor χ weg, so wird der Rest, gleich Null gesetzt, die Gleichung der C_p^m darstellen, und daher ist

$$C.f \equiv Y\psi - \varphi\Gamma. \qquad \ldots 5)$$

2. Aus der Identität 5) schliesst man, dass die Curven ψ und φ einander in den singulären Punkten der C_p^m berühren, d. h. jeder der $\varkappa-1$ Zweige der Curve φ (in einem $\varkappa$-fachen Punkt der C_p^m) berührt einen der $(\varkappa-1)$ Zweige der Curve ψ. Denn ein Zweig der Curve $\varphi=0$ schneidet in einem solchen Punkte $f=0$, also auch $Y\psi=0$, in $\varkappa$ aufeinander folgenden Punkten, d. h., da $Y=0$ nicht durch den $\varkappa$-fachen Punkt geht, $\psi=0$ wird von dem Zweige der $\varphi=0$ daselbst in $\varkappa$ Punkten geschnitten, da aber $\psi=0$ nur einen $(\varkappa-1)$-fachen Punkt dort besitzt, so muss der Zweig von $\varphi=0$ einen der Zweige von $\psi=0$ noch berühren. Dies folgt nun von jedem der $(\varkappa-1)$ Zweige von $\varphi=0$. Diese können aber nicht denselben Zweig oder nur einige Zweige von $\psi=0$ berühren, denn es folgt auch umgekehrt auf dieselbe Art, dass jeder Zweig von $\psi=0$ einen Zweig von $\varphi=0$ berühren muss.

Die übrigen Schnittpunkte von $\psi=0$ und $\varphi=0$ sind: das vollständige Schnittpunktesystem der Curve χ mit C_p^m und das Tripel (a), also $3(\omega-1)+\sigma+3=3\omega+\sigma$ an Zahl. Da in jeden singulären Punkt nach Obigem $\varkappa(\varkappa-1)$ Schnittpunkte der Curven fallen, so muss

$$3\omega+\sigma+\Sigma\varkappa(\varkappa-1)=(m-1)(m-3)$$

sein, was auch wirklich stattfindet, wenn man beachtet, dass

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-\frac{1}{2}\Sigma\varkappa(\varkappa-1)=p=2\omega+1+\tau+\sigma$$

ist, wobei nach Gleichung 1)

$$\omega=p-m+2+\tau$$

die Anzahl linear unabhängiger Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet.

3. Wählt man an Stelle von Γ irgend eine andere (y) enthaltende Curve dritter Ordnung, d. h. setzt man

$$\Gamma' = \Gamma + \theta Y,$$

wo θ eine quadratische Function der Coordinaten ist, an Stelle von Γ, so wird, da

$$Cf \equiv Y(\psi + \theta\varphi) - \varphi(\Gamma + \theta Y)$$

ist, auch an Stelle von ψ treten

$$\psi' = \psi + \theta\varphi,$$

so dass den ∞^6 Curven dritter Ordnung durch (y) eben auch ∞^6 Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zugewiesen sind. Alle diese haben in den singulären Punkten feste Tangenten und schneiden dieselbe Schaar aus, wie die nicht adjungirten Curven Γ durch (y).

Wir wollen im Folgenden uns Γ, also auch ψ, fest gewählt denken, d. h. die Constanten in den Gleichungen festhalten. Ebenso setzen wir von nun ab $\sigma = 0$, d. h. setzen voraus, der ganze Schnitt der Curve χ mit C_p^m, der nicht in den singulären Punkten liegt, sei beweglich.

§. 6.

Erzeugung der Dreischaarcurven C_p^m durch Curvensysteme.

1. Die Darstellung

$$Cf \equiv Y\psi - \varphi\Gamma \qquad \ldots 5)$$

gilt für jede Tangente Y der Enveloppe $\mathfrak{C}$, ist diese daher irreducibel, so kann man Y rational von einem Parameter λ so abhängen lassen, so dass die Graden

$$Y(\lambda) = 0$$

die Enveloppe $\mathfrak{C}$ einhüllen, wenn λ stetig alle Werthe durchlauft.

Da nun ausnahmslos für jeden Werth von λ sich auch ein ganz bestimmtes φ ergibt, indem die Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch das Schnittpunktesystem der χ mit C_p^m und das Tripel (a) geht, vollständig bestimmt ist, sobald sie noch die Gruppe von $(m-3)$ Punkten enthalten soll, die ausser dem Tripel (y) auf $Y(\lambda) = 0$ liegen, so hängt auch φ rational vom Parameter λ

ab. Aber auch ψ und Γ werden von λ rational abhängen, da auch diese unter unserer Voraussetzung ganz bestimmt sind, sobald λ angenommen wird.

Der Parameter λ tritt in f nicht auf, kann also nur in der Constanten vorhanden sein, so dass wir die Identität 5) auch schreiben können:

$$C(\lambda).f \equiv Y(\lambda)\,\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)\Gamma(\lambda)$$

wobei alle Functionen rational von λ abhängen.

Was die Ordnung betrifft, in der λ auftritt, so ist dieselbe für $Y(\lambda)$ offenbar $c = \tau+1$ die Classe der Enveloppe $\mathfrak{C}$. Da durch jeden Punkt x von C_p^m ausser der Tangente X von $\mathfrak{C}$, welche das Tripel x, x', x'' trägt, noch $c-1 = \tau$ Tangenten Y gehen, welche Tripel tragen, zu denen x nicht gehört, so gehen durch jeden Punkt von C_p^m nur τ Curven φ, also tritt λ in $\varphi(\lambda)$ in der Ordnung τ auf.

Ist ρ die Ordnung von λ in $\Gamma(\lambda)$, so kann in $\psi(\lambda)$ blos die Ordnung $(\rho-1)$ von λ auftreten, und es ist daher:

$$C(\lambda^{\rho+\tau}).f \equiv Y(\lambda^{\tau+1})\,\psi(\lambda^{\rho-1}) - \varphi(\lambda^{\tau})\Gamma(\lambda^{\rho}), \qquad \ldots A)$$

wobei die Ordnung des Parameters λ, in welcher er in den einzelnen Functionen auftritt, ersichtlich gemacht ist.

2. Es wird nun $f = 0$ erzeugt durch den Schnitt:

$$\begin{array}{lll} a) & \text{von } Y(\lambda^{\tau+1}) = 0 & \text{und } \varphi(\lambda^{\tau}) = 0 \\ b) & Y(\lambda^{\tau+1}) = 0 & \Gamma(\lambda^{\rho}) = 0 \\ c) & \psi(\lambda^{\rho-1}) = 0 & \Gamma(\lambda^{\rho}) = 0; \end{array}$$

wenn man λ alle Werthe durchlaufen lässt und Curven, die demselben λ entsprechen, einander zuweist.

$\psi(\lambda) = 0$ und $\varphi(\lambda) = 0$ können von $f = 0$ nichts erzeugen, da sie sich nicht in beweglichen Punkten von C_p^m treffen. Ihr Erzeugniss zerfällt, wie wir später zeigen werden.

Es mögen nun die einzelnen Erzeugungsarten von C_p^m betrachtet werden.

a) Die Curvensysteme

$$Y(\lambda^{\tau+1}) = 0 \qquad \varphi(\lambda^{\tau}) = 0 \qquad \ldots 8)$$

erzeugen C_p^m durch den Schnitt entsprechender Curven τ-fach. Denn durch jeden Punkt x von C_p^m gehen τ Tangenten von $\mathfrak{C}$ und die ihnen entsprechenden τ Curven φ. Die letzte Tangente von $\mathfrak{C}$ durch x ist diejenige, welche das Tripel x, x', x'' trägt und deren entsprechende Curve φ nicht durch x geht.

Als Erzeugniss dieser beiden Systeme *a)* tritt ferner jede Tangente $Y(\lambda_i)$ auf, deren Parameter λ_i so beschaffen ist, dass

$$\varphi(\lambda_i) = Y(\lambda_i)\chi_i$$

wird, d. h. dass $\varphi(\lambda) = 0$ zerfällt in diese Tangente $Y(\lambda_i)$ und eine adjungirte Curve der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung. Dies geschieht für $\omega = p-m+2+\tau$ Werthe von λ. Denn es möge unsere Curve χ, durch deren vollständiges Schnittpunktesystem wir alle φ legen, in den Tripeln $(a_1)(a_2)(a_3)\ldots(a_{\omega-1})$ die C_p^m schneiden, welche auf den Tangenten $Y(\lambda_1), Y(\lambda_2) \quad Y(\lambda_{\omega-1})$ liegen. Die φ gehen ferner alle noch durch das Tripel (a), das wir mit (a_ω) bezeichnen wollen, und dem der Parameter λ_ω, also die Tangente $Y(\lambda_\omega)$, zukommt. Nimmt nun λ einen der Werthe $\lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_\omega$ an. so muss offenbar $\varphi(\lambda_i)$ zerfallen in $Y(\lambda_i)$ und die Curve χ_i, welche durch die übrigen Tripel mit Ausschluss von (a_i) geht. Ein Zerfallen kann auch nur für diese ω Werthe von λ stattfinden, denn sonst würde aus

$$\varphi(\lambda) \equiv Y(\lambda)\chi$$

folgen, dass, da $Y(\lambda) = 0$ durch keines der ω Tripel $(a_1)(a_2)\ldots(a_\omega)$ geht, $\chi = 0$ durch die ω Tripel gehen müsste, was unmöglich ist, da eine adjungirte Curve $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung nur in $\omega-1$ Tripeln schneiden kann.

Eliminirt man λ aus den beiden Gleichungen

$$Y(\lambda^{\tau+1}) = 0 \qquad \varphi(\lambda^{\tau}) = 0, \qquad \ldots 8)$$

so wird das Resultat in den Coordinaten von der Ordnung $(\tau+1)(m-3)+\tau$ sein, und es ist auch

$$(\tau+1)(m-3)+\tau = \tau m+\omega,$$

wenn man beachtet, dass

$$\omega = m-3-2\tau$$

ist.

Es sei noch bemerkt, dass für die Werthe $\lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_\omega$ auch $\psi(\lambda_i)$ zerfällt. Denn setzt man in 1) für λ einen der Werthe λ_i ein so wird

$$C(\lambda_i) . f \equiv Y(\lambda_i)[\psi(\lambda_i) - \chi_i \Gamma(\lambda_i)],$$

und da f irreducibel ist, so muss

$$C(\lambda_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \quad \omega \qquad \ldots 9)$$

sein, also auch

$$\psi(\lambda_i) \equiv \chi_i \Gamma(\lambda_i), \qquad \ldots 10)$$

sobald

$$\varphi(\lambda_i) \equiv \chi_i Y(\lambda_i), \qquad i = 1, 2, \qquad \ldots 11)$$

ist.

b) Die Curvensysteme

$$Y(\lambda^{\tau+1}) = 0 \qquad \Gamma(\lambda^\rho) = 0 \qquad \ldots 12)$$

erzeugen durch ihre Schnitte die C_p^m einfach, und da sie sich sonst nicht schneiden, können sie nur noch Gerade erzeugen, die sowohl Tangenten von $\mathfrak{C}$ als Bestandtheile der entsprechenden Curve $\Gamma(\lambda)$ werden. Treten μ Gerade als Erzeugniss auf, so muss für μ Werthe des Parameters $\lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \ldots \lambda^{(\mu)}$ die Identität bestehen:

$$\Gamma(\lambda^{(\varkappa)}) \equiv Y(\lambda^{(\varkappa)}) \theta^{(\varkappa)}, \qquad \varkappa = 1, 2, \quad \mu \qquad \ldots 13)$$

wo $\theta^{(\varkappa)}$ eine quadratische Function der Coordinaten ist. Da für $\lambda = \lambda^{(\varkappa)}$ die Identität A) die Form annimmt:

$$C(\lambda^{(\varkappa)}) . f \equiv Y(\lambda^{(\varkappa)}) [\psi(\lambda^{(\varkappa)}) - \varphi(\lambda^{(\varkappa)}) . \theta^{(\varkappa)}],$$

so muss auch

$$C(\lambda^{(\varkappa)}) = 0, \qquad \varkappa = 1, 2, \quad \mu \qquad \ldots 14)$$

und daher auch

$$\psi(\lambda^{(\varkappa)}) \equiv \varphi(\lambda^{(\varkappa)}) \theta^{(\varkappa)} \qquad \varkappa = 1, 2, \quad \mu \qquad \ldots 15)$$

sein.

Eliminirt man λ aus den Gleichungen

$$Y(\lambda^{\tau+1}) = 0 \qquad \Gamma(\lambda^\rho) = 0,$$

so wird das Resultat in den Coordinaten die Ordnung $3(\tau+1)+\rho$ besitzen, und es muss daher

$$3(\tau+1)+\rho = m+\mu.$$

oder

$$\rho = \mu + m - 3\tau - 3 \qquad \ldots 16)$$

sein.

Es kann nun, sobald $\rho > \tau$ ist, die Ordnung von λ in $\psi(\lambda)$ als auch in $\Gamma(\lambda)$ in der Identität A) erniedrigt werden, wodurch dann bewirkt wird, dass auch weniger als μ Gerade erzeugt werden.

Denn setzt man:

$$\frac{\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)\theta^{(x)}}{\lambda - \lambda^{(x)}} = \psi'(\lambda)$$

$$\frac{\Gamma(\lambda) - Y(\lambda)\theta^{(x)}}{\lambda - \lambda^{(x)}} = \Gamma'(\lambda)$$

$$\frac{C(\lambda)}{\lambda - \lambda^{(x)}} = C'(\lambda),$$

so werden zu Folge der Identitäten 15), 13), 14) $\psi'(\lambda)$, $\Gamma'(\lambda)$ und $C'(\lambda)$ ganze Functionen in λ, und da $\psi(\lambda)$ in der Ordnung $\rho - 1$ von λ ist, während $\varphi(\lambda)$ die Ordnung τ aufweist, so wird $\psi'(\lambda)$, ebenso $\Gamma'(\lambda)$ in λ niedrigerer Ordnung sein, als $\psi(\lambda)$ und $\Gamma(\lambda)$, so lange $\rho > \tau$ ist.

Da nun die Identität A) auch geschrieben werden kann:

$$C(\lambda) f \equiv Y(\lambda)\left[\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)\theta^{(x)}\right] - \varphi(\lambda)\left[\Gamma(\lambda) - Y(\lambda)\theta^{(x)}\right],$$

so folgt durch Division mit $\lambda - \lambda^{(x)}$

$$C'(\lambda^{\rho+\tau-1}) . f \equiv Y(\lambda^{\tau+1})\psi'(\lambda^{\rho-2}) - \varphi(\lambda^{\tau})\Gamma'(\lambda^{\rho-1})$$

und es erzeugen wieder

$$Y(\lambda^{\tau+1}) = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma'(\lambda^{\rho-1}) = 0$$

die C_p^m und μ' Gerade. Da nun $\Gamma'(\lambda)$ in λ von der Ordnung $\rho - 1$ ist, so folgt durch Ellimination von λ, dass die Ordnung des Erzeugnisses $3(\tau+1) + \rho - 1$ wird, dass also

$$3(\tau+1) + \rho - 1 = m + \mu'$$

oder $\mu' = \mu - 1$ ist, zu Folge 16). Es wird also durch das neue System um eine Gerade weniger erzeugt.

So lange also $\rho > \tau$ ist, kann man sowohl die Ordnung ρ erniedrigen, als auch die Anzahl der miterzeugten Geraden. Wir unterscheiden nun folgende drei Fälle.

1) Ist $m \leqq 3\tau + 3$, so muss $\mu > 0$ sein, da $\rho \geqq 1$ sein muss, wobei

$$\rho = \mu - (3\tau + 3 - m)$$

ist. Nun kann man ρ und damit auch μ so lange erniedrigen, als $\rho > \tau$ ist; geht man also bis zur Grenze $\rho = \tau$ herab, so erhält man als die geringste Anzahl Geraden, welche erzeugt werden muss:

$$\mu = 4\tau + 3 - m\,,$$

sobald

$$m \leqq 3\tau + 3\,,$$

oder, wenn man beachtet, dass $\omega = m - 3 - 2\tau$ ist, ergibt sich

$$\mu = 2\tau - \omega\,, \qquad \ldots 17)$$

wenn $\omega \leqq \tau$ ist.

2) Ist $3\tau + 3 < m < 4\tau + 3$, so kann in speciellen Fällen $\mu = 0$ werden, im Allgemeinen werden aber auch

$$\mu = 4\tau + 3 - m = 2\tau - \omega$$

Gerade miterzeugt, wobei $\rho = \tau$ ist.

3) Ist aber $m \geqq 4\tau + 3$, so kann stets die Anzahl der erzeugten Geraden auf Null reducirt werden, denn es ist dann

$$\rho - \tau = \mu + m - 4\tau - 3,$$

also auch für $\mu = 0$ noch $\rho \geqq \tau$. Es wird die Ordnung

$$\rho = m - 3\tau - 3 = \omega - \tau \qquad \ldots 18)$$

gemacht werden können, sobald

$$\omega \geqq 2\tau\,.$$

Für diese Fälle lassen sich nun auch leicht die Gleichungsformen der Schaaren aufstellen, in analoger Art, wie ich sie in meiner Abhandlung „Über hyperelliptische Curven" in dem 29. Bande der Mathematischen Annalen angegeben habe.

Setzt man

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_{\tau+2}) \\ f_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_{\omega-\tau+1}) \end{aligned} \qquad \ldots 19)$$

und $f'(\lambda) = \dfrac{df(\lambda)}{d\lambda}$, so wird für den 3. Fall

$$Y(\lambda) = f(\lambda) \sum_{1}^{\tau+2} \frac{Y}{f'(\lambda_i)} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda_i}$$

$$\Gamma(\lambda) = f_1(\lambda) \sum_{1}^{\omega-\tau+1} \frac{\Gamma_i}{f_1'(\lambda_i)} \, \frac{1}{\lambda-\lambda_i}, \qquad \ldots, 20)$$

wobei Curven, die demselben λ entsprechen, sich in Tripeln der C_p^m schneiden; ihr Erzeugniss wird von der Ordnung:

$$3(\tau+2)+\omega-\tau+1 = m,$$

da $\omega = m-3-2\tau$ ist.

Für den 2. und 1. Fall wird

$$Y(\lambda) = f(\lambda) \sum_{1}^{\tau+2} \frac{Y_i}{f'(\lambda_i)} \, \frac{1}{\lambda-\lambda_i}$$

$$\Gamma(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda_{\tau+2}} \left[\sum_{1}^{\mu} \frac{Y_i\,\theta^{(i)}}{f'(\lambda_i)} \, \frac{\lambda_i-\lambda_{\tau+2}}{\lambda-\lambda_i} + \sum_{\mu+1}^{\tau+1} \frac{\Gamma_i}{f'(\lambda_i)} \, \frac{\lambda_i-\lambda_{\tau+2}}{\lambda-\lambda_i} \right] \qquad ..21)$$

indem für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_\mu$ die Curve $\Gamma(\lambda)$ zerfällt in $Y_1\theta^{(1)}, Y_2\theta^{(2)}$ $\lambda\, Y_\mu\theta^{(\mu)}$, so dass auch die μ Geraden $Y_1, Y_2 \quad Y_\mu$, die eben für $= \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_\mu$ sich aus $Y(\lambda)$ ergeben, miterzeugt werden.

c) Als drittes Curvensystem, welches C_p^m erzeugt, erkannten wir das System

$$\psi(\lambda^{\rho-1}) = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma(\lambda^\rho) = 0.$$

Beide Systeme erzeugen $f = 0$ $(\rho-1)$ mal, indem durch jeden Punkt x von $f=0$ $(\rho-1)$ Curven $\psi(\lambda)=0$ gehen und $\rho-1$ ihnen entsprechende Curven $\Gamma(\lambda) = 0$. Die letzte durch x gehende Curve $\Gamma(\lambda) = 0$ ist diejenige, welche das Tripel x, x', x'' enthält.

Aus den Identitäten 10) und 13), 15) folgt, dass auch die ω Curven $\Gamma(\lambda) = 0$, $i = 1, 2, \quad \omega$, sowie die μ Kegelschnitte $\theta^{(\varkappa)} = 0$, $\varkappa = 1, 2, \quad \mu$ miterzeugt werden durch die vorliegenden Curvensysteme. Und da je zwei entsprechende Curven sich nur in $3(m-1)$ Punkten von C_p^m schneiden, so können die Systeme auch nur solche Curven, nebst $f=0$, erzeugen, die Bestandtheile entsprechender Curven sind.

Da das Eliminationsresultat von λ aus der obigen Gleichung die Ordnung $\rho(m-1)+3(\rho-1)$ aufweist, so folgt, dass

$$\rho(m-1)+3(\rho-1)=(\rho-1)m+3\omega+2\mu$$

sein muss, welche Relation auch zu Folge 16) identisch erfüllt ist.

Wie schon bemerkt wurde, erzeugen die Systeme

$$\psi(\lambda^{\rho-1})=0 \quad \text{und} \quad \varphi(\lambda^{\tau})=0$$

nichts von C_p^m, da sie sich nicht in beweglichen Punkten dieser Curve schneiden. Eliminirt man λ aus beiden, so erhält man ein Resultat von der Ordnung $(\rho-1)(m-3)+\tau(m-1)$ in den Coordinaten. Dieses zerfällt in ein Product von Functionen, die gleich Null gesetzt, die Gleichungen von Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ und $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellen, die zu C_p^m adjungirt sind. Denn die Identitäten 10) und 11), sowie 15) zeigen, dass die ω Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\chi_i=0$ $(i=1,2,\ \ \omega)$ und die μ Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\varphi(\lambda^{\varkappa})=0$ $(\varkappa=1,2,\ \ \mu)$ dem Eliminationsresultate angehören müssen. Sonst kann dasselbe nichts enthalten, da ein weiteres Zerfallen der $\psi(\lambda)$ und der entsprechenden $\varphi(\lambda)$ nicht so stattfinden kann, dass beide einen Theil gemeinschaftlich hätten. Es muss daher

$$(\rho-1)(m-3)+\tau(m-1)=\omega(m-4)+\mu(m-3)$$

sein, was auch wirklich stattfindet, denn es folgt hieraus

$$\begin{aligned}(\rho-1)(m-3)&=(\omega+\mu)-\omega-\tau(m-1)\\&=(\omega+\mu-\tau-1)(m-3),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\rho&=\mu+\omega-\tau\\&=\mu+m-3-3\tau,\end{aligned}$$

wie es nach 16) sein muss.

§. 7.

Die Gleichung der Dreischaarcurven C_{2m-8}^m.

1. Hat die Curve $C_{p_1}^m$ das Geschlecht $p_1=2m-8$, und enthält sie eine $(3|1)$, so ist entweder $\tau=0$ oder $\tau=1$.

Ist $\tau = 0$, so hat $C^m_{p_1}$ nach §. 3, 4. nothwendig einen $(m-3)$-fachen Punkt und drei Doppelpunkte.

Die Gleichungen 20) des §. 6 für die Systeme der erzeugenden Curven werden:

$$Y(\lambda) = A - \lambda B$$

$$\Gamma(\lambda) = f_1(\lambda) \sum_1^{m-2} \frac{\Gamma_i}{f_1'(\lambda_i)} \frac{1}{\lambda - \lambda_i},$$

wenn $A = 0$ $B = 0$ zwei Gerade durch den $(m-3)$-fachen Punkt sind, und wir vorderhand keinen weiteren vielfachen Punkt voraussetzen. Eliminirt man aus beiden λ und lässt den Nenner B^{m-3} weg, so wird, wenn man $f_1'(\lambda_i)$ in Γ_i aufnimmt:

$$F = D \sum_{i\,1}^{m-2} \frac{\Gamma_i}{(A - \lambda_i B)} = 0 \qquad \ldots 22)$$

$$D = (A - \lambda_1 B) . (A - \lambda_2 B) \qquad (A - \lambda_{m-2} B)$$

die Gleichung der Curve m^{ter} Ordnung mit einem $(m-3)$-fachen Punkte in dem Scheitel des Büschels $A - \lambda B = 0$.

Bestimmt man dann die in (2λ) auftretenden willkürlichen Constanten so, dass F noch drei Doppelpunkte erhält, so wird sie eine $C^m_{p_1}$.

Ebenso ergibt sich die Gleichung der $C^m_{p_1}$, welche ausser eines $(m-3)$-fachen Punktes noch einen dreifachen Punkt hat, für die also $\tau = 1$ ist, in der Form 22).

2. Ist aber die Enveloppe irreducibel für die $C^m_{p_1}$, also ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}_2$, so kann $C^m_{p_1}$ nach §. 3, 5. nur einfache Doppelpunkte haben. Ihre Anzahl d ergibt sich

$$d = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - p = \frac{1}{2}(m-4)(m-1) - (m-7).$$

Legt man durch $\omega - 2 = m - 7$ Tripel der $(3|1)$ den Büschel adjungirter Curven χ, so liegen seine Basispunkte, die nicht auf $C^m_{p_1}$ sind, in den $\frac{1}{2}(m-7)(m-8)$ Schnittpunkten der $(m-7)$ Tangenten von $\mathfrak{C}_2$, welche die obigen Tripel tragen (§. 4, 1.) Es ist auch

$$d+3(m-7)+\frac{1}{2}(m-7)(m-8)=(m-4)^2.$$

Hieraus ist die Lage der Doppelpunkte einer Dreischaarcurve vom Geschlechte $2m-8$ und $\tau=1$ ersichtlich, sowie auch die Möglichkeit gegeben, dieselbe projectivisch zu erzeugen.

Es kann dies auf dieselbe Art geschehen, wie ich es für die hyperelliptischen Curven vom Geschlechte $m-3$ gezeigt habe in einer der hohen Akademie im Jahre 1886 am 18. März vorgelegten Arbeit.

Die Gleichung der Dreischaarcurve $C^m_{p_1}$ ergibt sich auf analoge Art, wie dort.

Setzt man nach §. 6, Gleichung 20):

$$\begin{aligned} Y(\lambda) &= T_0+S\lambda+T_1\lambda^2 \\ \Gamma(\lambda) &= f(\lambda)\sum_1^{\omega}\frac{\Gamma_i}{\lambda-\lambda_i} \qquad \ldots 23) \\ f(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \quad (\lambda-\lambda_\omega), \end{aligned}$$

indem $Y(\lambda_i)=Y_i=0$ der Curve dritter Ordnung $\Gamma_i=0$ entspricht, wobei die Geraden $Y(\lambda)=0$ den Kegelschnitt

$$\mathfrak{C}_2 \equiv S^2-4T_0T_1$$

einhüllen, so ergibt sich durch Elimination von λ aus 23) die Gleichung der Dreischaarcurve $C^m_{p_1}$

Gehen nämlich durch den Punkt x von $C^m_{p_1}$ die beiden Tangenten

$$\begin{aligned} Y(\lambda') &= T_0+S\lambda'+T_1\lambda'^2=0 \\ Y(\lambda) &= T_0+S\lambda+T_1\lambda^2=0 \end{aligned}$$

und die der letzteren entsprechende Curve dritter Ordnung

$$\Gamma(\lambda)=f(\lambda)\sum_1^{\omega}\frac{\Gamma_i}{\lambda-\lambda_i}=0,$$

so folgt, dass für den Punkt x auch

$$T_1^{\omega-1}f(\lambda)f(\lambda')\sum_1^{\omega}\frac{\Gamma_i}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda'-\lambda_i)}(\lambda_i-\lambda')=0$$

ist, oder

$$D\sum_{1}^{\omega}\frac{\Gamma_i}{Y_i}(\lambda_i-\lambda')=0,$$

wobei

$$D=Y_1 Y_2 \quad\ldots\quad Y_\omega$$

ist, d. h. aber, da x auf der Tangente $Y(\lambda')$ jeder Punkt von $C^m_{p_1}$ sein kann ausser dem Tripel, in welchem $\Gamma(\lambda')=0$ schneidet, die Curve $\omega+2=(m-3)$-ter Ordnung

$$\varphi(\lambda')=D\sum_{1}^{\omega}{}_i\frac{\Gamma_i}{Y_i}(\lambda_i-\lambda')=0 \qquad \ldots 24)$$

geht durch die $(m-3)$ Schnittpunkte der Tangente $Y(\lambda')=0$ mit $C^m_{p_1}$, welche nicht auf $\Gamma(\lambda')=0$ liegen.

Nimmt nun λ' alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ an, so erfüllen die $(m-3)$ Schnittpunkte der

$$\varphi(\lambda')=0 \quad \text{und} \quad Y(\lambda')=0$$

die Curve $C^m_{p_1}$. Hiebei aber geschieht es ω-mal, dass $\varphi(\lambda')$ in $Y(\lambda')$ und eine χ der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung zerfällt, nämlich immer dann, wenn $\lambda'=\lambda_\varkappa$ wird. Diese ω Geraden $Y(\lambda_\varkappa)=Y_\varkappa$ gehören also mit zum Erzeugniss, welches von der Gesammtordnung $2(m-3)+1=2m-5=m+\omega$ ist.

Es ist klar, dass die Basispunkte des Büschels 24) Doppelpunkte des Erzeugnisses werden. Da dieses Erzeugniss aus den ω Geraden $Y_\varkappa$ besteht, deren gegenseitige $\frac{1}{2}\omega(\omega-1)$ Schnittpunkte der Basis des Büschels angehören, ebenso wie die 3ω auf $Y_i=0$ und $\Gamma_i=0$ liegenden Punkte, welche auch auf $C^m_{p_1}$ liegen, so bleiben für letztere blos

$$(\omega+2)^2-\frac{1}{2}\omega(\omega-1)-3\omega=\frac{1}{2}(\omega+1)(\omega+4)-(\omega-2)$$
$$=\frac{1}{2}(m-4)(m-1)-(m-7)=d$$

Doppelpunkte übrig, woraus folgt, dass ihr Geschlecht $p_1=2m-8$ ist.

Eliminirt man nun aus 24)

$$\varphi(\lambda') = D\sum_{1}^{\omega}\frac{\Gamma_i}{Y_i}(\lambda_i - \lambda')$$

und aus

$$Y(\lambda') = T_0 + S\lambda' + T_1\lambda'^2$$

den Parameter λ', wodurch man

$$T_0\left[D\sum_{1}^{\omega}{}_i\frac{\Gamma_i}{Y_i}\right]^2 + S\left[D\sum_{1}^{\omega}{}_i\frac{\Gamma_i}{Y_i}\right]\left[D\sum_{1}^{\omega}{}_i\frac{\Gamma_i}{Y_i}\lambda_i\right] + T_1\left[D\sum_{1}^{\omega}{}_i\frac{\Gamma_i}{Y_i}\lambda_i\right]^2 \equiv D\,F$$

erhält, so ist

$$F \equiv D\sum_{1}^{\omega}{}_i\frac{\Gamma_i^2}{Y_i} + D\sum_{1}^{\omega}{}_{i,\varkappa}\frac{\Gamma_i\Gamma_\varkappa}{Y_iY_\varkappa}\left[2T_0 + S(\lambda_i + \lambda_\varkappa) + 2T_1\lambda_i\lambda_\varkappa\right] = 0 \quad \ldots 25)$$

$$D = Y_1\,Y_2 \qquad Y_\omega$$

die Gleichung der Dreischaarcurve vom Geschlechte $p_1 = 2m - 8$.

Da alle Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung 24) durch die Doppelpunkte von $C^m_{p_1}$ gehen, die Geraden $Y_\varkappa$ es aber nicht thun, so sind die ω erwähnten Curven χ der $(m-4)^{\text{ten}}$ Ordnung zu F adjungirt.

Dieselben haben die Gleichungen:

$$\chi_\varkappa = \frac{D}{Y_\varkappa}\sum_{1}^{\omega}{}_i\frac{\Gamma_i}{Y_i}(\lambda_i - \lambda_\varkappa), \qquad \ldots 26)$$

und sind von einander linear unabhängig. Denn würde eine Identität

$$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \ldots + \alpha_\omega\chi_\omega \equiv 0$$

für constante α bestehen und wäre α_1 z. B. von Null verschieden, so setze man links an Stelle der variablen Coordinaten die Coordinate irgend eines der drei Schnittpunkte von $Y_1 = 0$ und $\Gamma_1 = 0$, da für diese $\chi_2 = 0$ $\chi_3 = 0$ $\quad \chi_\omega = 0$ ist, während $\chi_1 \neq 0$, so würde $\alpha_1\chi_1 \equiv 0$ folgen, gegen die Voraussetzung über α_1.

3. Es lassen sich aber auch die Gleichungen der $p_1 = 2m-8$ linear unabhängigen adjungirten Curven φ der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung

aufstellen. Sind $A=0$, $B=0$, $C=0$ die Gleichungen irgend welcher, ein Dreieck bildender Geraden der Ebene, und setzt man

$$\begin{aligned} \varphi_\varkappa &= A\cdot\chi_\varkappa \\ \varphi'_\varkappa &= B\cdot\chi_\varkappa \qquad \varkappa = 1, 2, \quad \omega \\ \varphi'' &= C\cdot\chi_1 \\ \varphi''' &= D\sum_1^\omega{}_i \frac{\Gamma_i}{Y_i}, \end{aligned} \qquad \ldots 27)$$

so sind

$$\varphi_\varkappa = 0 \qquad \varphi'_\varkappa = 0 \qquad \varphi'' = 0 \qquad \varphi''' = 0 \qquad \ldots 28)$$

die Gleichungen von $2\omega+2 = 2m-8 = p_1$ adjungirten Curven der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung. Dieselben sind auch linear unabhängig. Dass die $\varphi_\varkappa$ und $\varphi'_\varkappa$ linear unabhängig sind, ist daraus klar, dass es die $\chi_\varkappa$ sind. Aber auch $\varphi_\varkappa$, $\varphi'_\varkappa$, φ'' und φ''' sind linear unabhängig. Denn würde bei constanten α eine Identität:

$$\Sigma\alpha_\varkappa\varphi_\varkappa + \Sigma\alpha'_\varkappa\varphi'_\varkappa + \alpha''\varphi'' + \alpha'''\varphi''' = 0$$

oder

$$A\Sigma\alpha_\varkappa\chi_\varkappa + B\Sigma\alpha'_\varkappa\chi_\varkappa + \alpha'' C\chi_1 + \alpha'''\varphi''' \equiv 0$$

bestehen, und man setzt linker Hand die Coordinaten der drei Schnittpunkte von $Y_\varkappa = 0$ und $\Gamma_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 2, 3, \quad \omega)$ ein, so folgt

$$(\alpha_\varkappa A + \alpha'_\varkappa B)\chi_\varkappa \equiv 0$$

und da $\chi_\varkappa \neq 0$ ist:

$$\alpha_\varkappa A + \alpha'_\varkappa B = 0,$$

d. h. die Gerade $Y_\varkappa$ geht durch den Schnittpunkt von $A=0$ und $B=0$, was stets bei der Wahl von A und B vermieden werden kann. Also muss $\alpha_\varkappa = 0$, $\alpha'_\varkappa = 0$ sein, und die obige Identität könnte nur die Form haben:

$$(\alpha_1 A + \alpha'_1 B + \alpha'' C)\chi_1 + \alpha'''\varphi''' \equiv 0.$$

Da aber $\varphi''' = 0$ auch die drei Schnittpunkte von $Y_1 = 0$ und $\Gamma_1 = 0$ enthält, die auf χ_1 nicht liegen, so müsste

$$\alpha_1 A + \alpha'_1 B + \alpha'' C \equiv \beta\,.\,Y_1$$

sein, also wäre die Form der Identität

$$\beta Y_1 \chi_1 + \alpha''' \varphi''' \equiv 0,$$

welche offenbar nur für $\alpha''' = 0$ und $\beta = 0$ bestehen kann. Da $\beta = 0$ ist, so muss auch $\alpha'' = 0$, $\alpha'_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$ sein, d. h. die Curven 28) sind linear unabhängig.

Hieraus ersieht man, dass die Schaar adjungirter Curven $(m-3)$ ter Ordnung

$$(\alpha_1 A + \alpha'_1 B + \alpha'' C)\chi_1 + \alpha''' \varphi''' = 0$$

bei variablen α die $[m|3]$ aus $C^m_{p_1}$ ausschneidet.

Man zeigt übrigens auf dieselbe Art, dass auch die Curven:

$$\begin{aligned} \varphi_\varkappa &= A\chi_\varkappa &= 0 \\ \varphi'_\varkappa &= B\chi_\varkappa &= 0 \end{aligned} \qquad \varkappa = 1, 2, \quad \omega$$

$$\varphi''' = D \sum_1^\omega \frac{\Gamma_i}{A_i} = 0$$

$$\varphi = D \sum_1^\omega \frac{\Gamma_i}{A_i} \lambda_i = 0$$

ein System von p_1 linear von einander unabhängigen adjungirten Curven $(m-3)$ ter Ordnung der $C^m_{p_1}$ bilden.