Über die Bestimmung von magnetischen Momenten, Horizontalintensitäten und Stromstärken nach absolutem Masse

von

F. Lippich,
c. M. k. Akad.

§. 1.

Das Product von zwei magnetischen Momenten hat die Dimension:

$$l^5mt^{-2} = (lmt^{-2})l^4,$$

kann also direct durch eine Kraft- und Längenmessung dem absoluten Werthe nach bestimmt werden. In der That hat Herr v. Helmholtz[1] hierauf seine bekannte Methode gegründet, magnetische Momente mit Hilfe der Wage zu ermitteln, welche gegenüber den anderen complicirteren indirecten Methoden wesentliche Vortheile darbietet. Sie macht unabhängig von magnetischen Localeinflüssen und von den Variationen der erdmagnetischen Elemente und verlangt ausser den Längenmessungen nur noch die Ausführung einer Anzahl von Wägungen an einer empfindlichen, eisenfreien Wage. Hat man eine Wage zur Verfügung, die zum Durchwägen eingerichtet ist, an der man also den einen Magnetstab entsprechend tief unter die Wage hängen kann, so wird selbst eine nicht eisenfreie Wage, wenn sie nur nicht allzugrosse Eisenbestandtheile enthält, ohne Bedenken verwendet werden können und die Ablenkungsschiene für den zweiten, ausserhalb des Wagekastens befindlichen Magneten wird

---

[1] Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Berlin 1883, S. 405.

sich bei dieser Anordnung noch zweckentsprechender anbringen lassen, als es an jener Wage geschehen ist, die Herr Koepsel in seiner Abhandlung: „Bestimmung magnetischer Momente und absoluter Stromstärken mit der Wage“ [1] beschreibt.

Was jedoch die Einfachheit der Helmholtz'schen Methode anbelangt, so geht dieselbe zum Theil wieder verloren in Folge der Genauigkeit, die man von den einzelnen Wägungen beanspruchen muss. Man wird nämlich mit Rücksicht auf die Genauigkeit, mit welcher anderweitige magnetometrische Bestimmungen ausgeführt werden können, verlangen, dass der Fehler in den Momenten 0·001 ihres Betrages noch nicht erreiche, und da nun, wie aus der eben citirten Arbeit des Herrn Koepsel hervorgeht, die Gewichtsdifferenzen nach dem Umlegen des ausserhalb der Wage befindlichen Magnetes nicht wohl grösser als 0·03 *g* im Mittel gemacht werden können, so müssten diese Gewichtsdifferenzen bis auf 0·01 *mg* genau bestimmt werden, und das ist mit Rücksicht auf den Einfluss von Temperaturänderungen nicht leicht zu verbürgen. Wenn zwischen der Wägung vor dem Umlegen des ausserhalb der Wage angebrachten Magnetes und der nach diesem Umlegen, die Differenz der mittleren Temperaturen beider Wagarme sich nur um 0·01° C. ändert, würde dieses schon einen Fehler von beiläufig 0·006 *mg* bedingen.

Man wird daher eine Elimination dieses möglichen Einflusses der Temperaturänderungen durch entsprechende Anordnung und Zahl der Einzelwägungen umso weniger umgehen können, als man hier nicht, wie bei gewöhnlichen Massenbestimmungen, aus der Unveränderlichkeit der zu messenden Grösse ein Urtheil über störende Einflüsse während der Wägungen gewinnen kann. Dann erfordert aber jede Bestimmung des Momentenproductes mindestens sechs Beobachtungen [2] der Gleichgewichtsstellung an der Wage und mit Rücksicht darauf, dass man den ablenkenden Magnet zu beiden Seiten der an der Wage hängenden anzubringen hat, eigentlich 12. Da drei solche Producte zu ermitteln sind, steigt die Zahl der Einzelwägungen

---

[1] Wiedemann's Ann. 1887, Bd. 31, S. 250.

[2] Vergl. Weinstein, Physikalische Massbestimmungen, 2. Bd., S. 478.

sehr bedeutend. Hiebei ist noch nicht berücksichtigt, dass diese Bestimmungen für zwei Distanzen zwischen den Magneten, und wenn der Magnet an der Wage vertical aufgehängt ist, um die Induction zu eliminiren, auch noch nach Umkehrung dieses letzteren auszuführen sind, weil in der That diese vollständigen Bestimmungen nur nach Ablauf längerer Zeitperioden gemacht zu werden brauchen.

2.

Nachdem Herr F. Kohlrausch [1] gezeigt hat, welch' hohen Grad von Genauigkeit man mit einer ausmessbaren Bifilarwage bei absoluten magnetischen Massbestimmungen erreichen kann, so liegt es nahe, diese statt der gewöhnlichen Wage zur Ermittlung magnetischer Momente zu verwenden. Die Bifilarwage wäre zu diesem Zwecke mit einer Ablenkungsschiene zu versehen, auf welche der eine Magnetstab, dessen Moment M_2 sei, angebracht wird, während der zweite Magnetstab vom Momente M_1 in das Bifilar eingelegt wird.

Die magnetische Axe des letzteren stehe genau senkrecht zum magnetischen Meridian, wenn der Ablenkungsmagnet noch nicht auf der Schiene liegt, und dabei habe das Bifilar aus jener Gleichgewichtslage, die es hat, wenn kein Magnetstab eingehängt ist, sich gedreht um den Winkel ϑ, um in die neue Gleichgewichtslage zu gelangen. Nunmehr werde der Ablenkungsmagnet auf die Schiene gebracht, so dass seine horizontale magnetische Axe die Richtung des magnetischen Meridians hat, und durch den Mittelpunkt von M_2 geht; der Winkel ϑ nehme dann zu um φ; legt man alsdann M_2 um, so möge ϑ abnehmen um φ'. Wird noch das Directionsmoment des Bifilars (mit Rücksicht auf das Gewicht des eingehängten Magnetes) mit D, die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Magnete mit a bezeichnet, so hat man für die beiden Gleichgewichtslagen die Gleichungen:

$$\frac{2M_1M_2}{a^3}\cos\varphi + M_1H\cos\varphi = D\sin(\vartheta+\varphi),$$

$$-\frac{2M_1M_2}{a^3}\cos\varphi' + M_1H\cos\varphi' = D\sin(\vartheta-\varphi'),$$

[1] Wiedemann's Ann. 1882, Bd. 17, S. 737 und 1886, Bd. 27, S. 1.

in welchen H die Horizontalintensität am Orte des Bifilars bedeutet. Die Winkel φ, φ' und ϑ sind jedenfalls klein; ersetzt man in erster Annäherung die Cosinusse in obigen Gleichungen durch die Einheit, die Sinusse durch die Bogen, so erhält man

$$\frac{4M_1M_2}{a^3} = D(\varphi+\varphi') \qquad \ldots 1)$$

Die Bestimmung von M_1M_2 würde also auch nach dieser Methode sehr einfach, wenn man von allen Correctionen absehen könnte, was aber nicht ganz der Fall ist, wenn die eben angenommene Genauigkeitsgrenze bei der Ermittlung der Momente eingehalten werden soll. Es sind dann noch Correctionsglieder hinzuzufügen, welche hauptsächlich davon herrühren, dass die Winkel ϑ, φ, φ' nicht sehr klein gemacht werden dürfen.

Fehler, die von einer Änderung des Directionsmomentes herrühren, sind nicht zu befürchten. Die Grösse des Auftriebes, den der Bifilarkörper in der Luft erleidet, liegt an sich schon nahe an der Grenze des zu Vernachlässigenden, seine Änderungen kommen also nicht in Betracht; was den Einfluss der Temperatur anbelangt, so genügt eine beiläufige Kenntniss der letzteren bis auf einen Grad und die Änderung der Temperatur des Bifilars während einer kürzeren Beobachtungsreihe ist ebenfalls ohne Einfluss auf das Resultat. In dieser Beziehung wären die Bestimmungen mit dem Bifilar im Vortheil gegenüber denen mit der Wage. Hingegen sind die ersteren beeinflusst von den Variationen der Horizontalintensität, aber augenscheinlich wegen der kurzen Zeit, welche die Beobachtung vor und nach dem Umlegen des Ablenkungsstabes erfordert, nur in geringem Grade und überdies erlaubt das Bifilar selbst diese Variationen zu bestimmen. Endlich sei noch hervorgehoben, dass die Induction im Ablenkungsstabe durch das Umlegen desselben von selbst eliminirt wird.

Es ist jedoch die Frage zu beantworten, ob dem Bifilar solche praktisch ausführbare Dimensionen gegeben werden können, dass einerseits der Winkel $\varphi+\varphi'$ hinreichend gross werde, anderseits die Ausmessung des Bifilars mit der erforderlichen Genauigkeit erfolgen könne.

In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass der kleinste Werth, den man a geben kann, von der Länge der Magnete abhängt und dieser proportional zu setzen ist. Für nicht zu grosse Änderungen dieser Länge und constant gehaltenen Querschnitt dürfen wir auch die Momente der Länge proportional nehmen, so dass also der linke Theil der Gleichung 1) verkehrt proportional der Länge der nahezu gleich angenommenen Magnetstäbe wird. Da überdies D dem Gewichte des Bifilarkörpers proportional ist, also ebenfalls mit der Länge des Magnetes zunimmt, so wird $\varphi+\varphi'$ noch rascher als im umgekehrten Verhältniss der Länge der Magnete wachsen.

Man hat also die Länge der Magnete möglichst klein zu nehmen; eine Grenze ist jedoch dadurch gegeben, dass a noch hinreichend gross bleiben muss, damit nicht zu kleine Fehler in a solche von unzulässiger Grösse im Product der Momente bewirken. Nimmt man an, dass a bis auf 0·01 *mm* bestimmt werden könne, und dass der zugehörige Fehler in $M_1 M_2$ nicht grösser als $0{\cdot}0001 . M_1 M_2$ werden soll, so dürfte a nicht kleiner als 30 *cm* und die Länge der Magnete nicht grösser als 5 bis 6 *cm* gewählt werden. Um dann noch $\varphi+\varphi'$ von hinreichender Grösse zu erhalten, müssen die Dimensionen des Bifilars etwas anders gewählt werden, als von Herrn Kohlrausch geschehen ist, und da es nicht wohl angeht, über die Länge der Aufhängsfäden von 3 *m* hinauszugehen, so wird man den Fadenabstand verringern.

Machen wir die folgenden Annahmen: $M_1 = M_2 = 1000$, $a = 30\,cm$, Länge der Suspension $= 300\,cm$, Fadenabstand $= 5\,cm$, Gewicht des Bifilarkörpers $= 150\,g$; so ergibt sich $\varphi+\varphi' = 166'$ ein Winkel, der bis auf ein halbes Tausendstel seines Werthes genau gemessen werden kann, da das Bifilar die Belastung durch einen entsprechend grossen Spiegel von 4 bis 5 *cm* Durchmesser jedenfalls zulässt.

Mittelst eines Bifilars von der angegebenen Einrichtung ist demnach die Ermittlung der magnetischen Momente mit derselben Genauigkeit und vielleicht auch bequemer zu erreichen, als mit der Wage; die einzige wesentliche Schwierigkeit besteht in der Ausmessung der Fadendistanz von 5 *cm*, die mindestens bis auf 5 μ genau zu geschehen hätte.

3.

Statt aus drei Momentenproducten die Werthe der einzelnen Momente abzuleiten, kann man diese mit Hilfe von zwei Magneten aus dem Product ihrer Momente und dem Quotienten derselben ermitteln, wenn man sich entschliesst, neben der Wage oder dem Bifilar noch ein Magnetometer in Anwendung zu bringen, wodurch die nöthigen Operationen sehr vereinfacht werden.

Es seien die beiden Magnete M_1 und M_2 auf die nach Ost-West gerichtete Ablenkungsschiene eines Magnetometers zu beiden Seiten der Magnetnadel gelegt in den Entfernungen a_1 und a_2 von derselben und es werde dadurch letztere aus ihrer Gleichgewichtslage abgelenkt, um den Winkel ψ oder ψ', je nachdem die beiden Magnete ihre Axen nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen gerichtet haben; dann folgen aus den beiden Gleichgewichtsgleichungen, wenn man von gewissen Correctionen absieht

$$\frac{2M_1}{a_1^3}+\frac{2M_2}{a_2^3}=H\operatorname{tng}\psi,$$

$$\frac{2M_1}{a_1^3}-\frac{2M_2}{a_2^3}=-H\operatorname{tng}\psi',$$

die weiteren:

$$\frac{4M_1}{a_1^3}=H(\operatorname{tng}\psi-\operatorname{tng}\psi'),\quad \frac{4M_2}{a_2^3}=H(\operatorname{tng}\psi+\operatorname{tng}\psi'),$$

und aus diesen erhält man den Quotienten der Momente

$$\frac{M_1}{M_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\frac{\operatorname{tng}\psi-\operatorname{tng}\psi'}{\operatorname{tng}\psi-\operatorname{tng}\psi'}.$$

Handelt es sich nur um die Bestimmung der Momente, so brauchen die Distanzen a_1 und a_2 gar nicht nach ihrem absoluten Werthe bekannt zu sein, und sind zudem M_1 und M_3 nahe gleich, so wird man, um ψ' möglichst klein zu erhalten, wodurch dann Fehler in ψ sehr geringen Einfluss haben, $a_1=a_2$ nehmen. Durch Vertauschen der beiden Magnete kann man überdies noch Ungenauigkeiten dieser Gleichheit von merklicher Grösse wegschaffen. Denn wenn wir wie oben $M_1=M_2=1000$ annehmen, so wird $a_1=a_2$ nicht wohl kleiner als 60 *cm* gewählt werden können, da sonst ψ zu gross ausfällt. Für eine solche Distanz würde aber eine Differenz zwischen a_1 und a_2 von 1 *mm* einen Fehler in $\frac{M_1}{M_2}$ bewirken, der noch kleiner als 0·0001 $\frac{M_1}{M_2}$ ist. Dieser Quotient kann also durch Ausmessungen, die keine besondere Genauigkeit erfordern, ermittelt werden unter Einhaltung jener Fehlergrenze, die wir Eingangs festgesetzt haben. Auch die Variationen der erdmagnetischen Elemente in der kurzen Zeit zwischen den beiden Einstellungen vor und nach dem Umlegen des einen Magnetstabes, werden für gewöhnlich ohne bemerkbaren Einfluss bleiben.

Aus den obigen Gleichungen ergibt sich ein Ausdruck für die Horizontalintensität H, nämlich, wenn wir noch setzen

$$a_1 = a(1+\alpha), \quad a_2 = a(1-\alpha),$$

der folgende

$$H = \frac{4}{a^3(1-\alpha^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{M_1 M_2}{\operatorname{tng}^2\psi - \operatorname{tng}^2\psi'}}.$$

Die Bestimmung von H erfordert dann die Ausmessung von a seinem absoluten Werthe nach, die wegen der bedeutenderen Grösse dieser Distanz leicht mit der nöthigen Genauigkeit geschehen kann, und auch hier wird ein Fehler in der Gleichheit von a_1 und a_2 von 1 *mm* ohne merkbaren Einfluss auf das Resultat. Die hier dargelegte Methode zur Bestimmung der Horizontalintensität, dürfte gegenüber anderen Methoden wesentliche Vortheile darbieten.

Wie bei der bifilarmagnetischen Methode von Herrn F. Kohlrausch [1] entfallen Zeitmessungen und Ausmittlungen von Trägheitsmomenten; während aber diese Methode die Aufstellung eines Bifilars von nahe 3 *m* Länge an dem Orte verlangt, an welchem H gemessen werden soll und ausserdem an die Voraussetzung gebunden ist, dass an diesem Orte das magnetische Feld in der Ausdehnung von nahe 2 *m* als constant angesehen werden dürfe, falls sie in ihrer einfachsten Form zur Anwendung kommen und nicht noch eine bedeutende Zahl von Beobachtungen an Variometern zur Bestimmung der zeitlichen Änderung und des

[1] Wiedemann's Ann. 1882, Bd. 17, S. 737.

Verhältnisses der Horizontalintensität an den einzelnen in Frage kommenden Orten zu Hilfe nehmen soll; ist die andere Methode von diesen Umständlichkeiten frei. Man hat nur die Nadel des Magnetometers an den bestimmten Ort zu bringen, um an demselben zu jeder Zeit und unabhängig von der Art des magnetischen Feldes aus den Ablenkungsbeobachtungen das H zu ermitteln, während die Wage oder das Bifilar zur Bestimmung von $M_1 M_2$ an irgend einer geeigneten Stelle ein für allemal fest aufgestellt bleiben kann.

Versieht man eine Boussole, z. B. eine ausmessbare Tangentenboussole, mit einer Ablenkungsschiene, so kann man, wie oben angegeben, die Horizontalintensität am Orte der Boussolennadel zu jeder Zeit mittelst der beiden Magnete M_1 und M_2, und auf diese Weise auch die Stromstärken nach absolutem Masse bestimmen. Dieses Verfahren gestattet, die Boussole immer an demselben Orte zu belassen, der durchaus nicht frei von selbst stärkeren Localeinflüssen zu sein braucht; durch dasselbe werden alle die Complicationen umgangen, die nach anderen Methoden zu überwinden sind, wenn es sich darum handelt, behufs absoluter Strommessung den Reductionsfactor der Boussole für deren Aufstellungsort und für die Zeit der Messungen anzugeben. Wie sofort ersichtlich, entfällt auch die Ermittlung des Einflusses, den das Materiale der Boussole auf die Nadel hat, und braucht dasselbe nicht peinlich bezüglich seines magnetischen Verhaltens ausgewählt zu werden. Selbst wenn das magnetische Feld durch einen Hay'schen Magnetstab geschwächt, oder auch verstärkt wird, letzteres zu dem Zwecke, um noch grosse Stromstärken messen zu können, wird das oben angegebene Verfahren anwendbar bleiben, denn was verlangt wird ist, dass das magnetische Feld innerhalb des von der schwingenden Boussolennadel beanspruchten Theiles als constant angesehen werden darf.

Da bei Messung von mässigen Stromstärken die Magnete auf der Ablenkungsschiene unbedenklich auch während der Messungen belassen werden dürfen, am zweckmässigsten in der Lage, in der sich ihre Wirkungen auf die Boussolennadel nahezu aufheben, so wird man bei einer längeren Beobachtungsreihe, indem man in entsprechenden Intervallen den einen Magnetstab umlegt, auch die Variationen des Erdmagnetismus in

Rechnung bringen und Variometerbeobachtungen entbehrlich machen können.

Andere Apparate, die zur absoluten Strommessung dienen, wie die verschiedenen Stromwagen von v. Helmholtz, Lord Rayleigh, Pellat u. A. [1] dürften kaum eine wesentlich höhere Genauigkeit gewähren, als sich in der That nach der auseinandergesetzten Methode mit der Tangentenboussole erreichen lässt, ohne dass besonders umständliche Operationen nöthig würden. Auch der Umstand, dass neben der Tangentenboussole noch ein zweiter Apparat zur Verwendung kommen muss, kann gegenüber den Stromwagen kaum ins Gewicht fallen, denn diese letzteren sind doch nur für Stromstärken innerhalb sehr enger Grenzen verwendbar, und werden, ausser bei ganz speciellen Untersuchungen, weniger direct, als indirect zur Aichung von Boussolen u. s. f. Verwendung finden. Die Tangentenboussole hingegen kann leicht so eingerichtet werden, dass sie Stromstärken innerhalb sehr weiter Grenzen zu messen gestattet, man braucht nur in ähnlicher Weise, wie es bei der Boussole von Frenzel geschehen ist, neben dem ausmessbaren Ring noch entsprechende Gruppen von Windungen unveränderlich mit der Boussole zn verbinden, deren Reductionsfactoren relativ zu dem des ausmessbaren Ringes ein für allemal bestimmt werden. Sie besitzt ferner den Hauptvorzug, dass sie continuirliche Ablesungen gestattet, und schon desshalb bei nicht ganz constanten Strömen eine grössere Genauigkeit sichert, als die Wagen, bei denen der Moment des Gleichgewichtes alsdann schwer zu fixiren ist.

4.

Die Formel 1), Art. 2, gilt nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Ablenkungswinkel und unter der Annahme, dass die Axe des am Bifilar angebrachten Magnetes M_1 vor seiner Ablenkung durch M_2 genau senkrecht zum magnetischen Meridian, die Axe des ablenkenden Magnetes genau im magnetischen Meridian

---

[1] Man vergleiche: Heydweiller, Vergleichende absolute Strommessungen etc. Inauguraldissertation, Würzburg 1886; Pellat, Ampèremètre absolu, Séances de la Société Française de Physique, 1886, p. 205; Koepsel, a. a. O.

gelegen sei; es ist noch zu zeigen, dass die Methode zur Bestimmung des Momentenproductes nichts an Einfachheit verliert, wenn diese Bedingungen nicht strenge eingehalten werden und Nebenoperationen zur Ermittlung von Correctionsgliedern entbehrlich werden.

Der magnetische Meridian sei die nach Norden positiv gezählte X-Axe eines Coordinatensystems, dessen positive Y-Axe nach Osten gerichtet ist, und XY die Horizontalebene.

Die nach Westen gerichtete horizontale magnetische Axe O_1N_1 des am Bifilar befindlichen Magnetes bilde mit der Y-Axe den Winkel φ_0, positiv gezählt von Y gegen X.

Die horizontale Verbindungslinie O_1O_2 der Mittelpunkte der beiden Magnete, O_2 nördlich von O_1 gelegen, weiche gegen Westen um den Winkel e_1 ab, während die magnetische Axe O_2N_2 des Ablenkungsmagnets nach Norden gerichtet und gegen O_1O_2 nach Westen um den Winkel e_2 gedreht sein mag. Im Übrigen gelten dieselben Bezeichnungen wie im Art. 2.

Das Gleichgewicht am Bifilar nach dem Einhängen des Magnetes M_1, nach dem Auflegen von M_2 auf die Ablenkungsschiene und nachdem dieser Magnet um seinen Mittelpunkt in horizontaler Ebene um 180° gedreht wurde, liefert die Gleichungen:

$$M_1 H \cos\varphi_0 = D \sin\vartheta \qquad \ldots 2)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{M_1M_2}{2a^3}\big(3\cos(\varphi_0+\varphi+e')+\cos(\varphi_0+\varphi+e)\big)+\\ +M_1H\cos(\varphi_0+\varphi)=D\sin(\vartheta+\varphi),\\ -\frac{M_1M_2}{2a^3}\big(3\cos(\varphi_0-\varphi'+e')+\cos(\varphi_0-\varphi'+e)\big)+\\ +M_1H\cos(\varphi_0-\varphi')=D\sin(\vartheta-\varphi'),\end{aligned}\right\} \qquad \ldots 3)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$e_1+e_2=e,\quad e_1-e_2=e'.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 3) den Factor M_1H und setzt weiter zur Abkürzung

$$\varphi+\varphi'=\psi,\quad \varphi-\varphi'=\eta,$$

so erhält man

$$\frac{M_1 M_2}{2a^3}\left[(3\cos e'+\cos e)(\cos\psi+\cos(2\varphi_0+\eta))-\right.$$
$$\left.-(3\sin e'+\sin e)\sin(2\varphi_0+\eta)\right]=D\sin\psi\cos(\vartheta-\varphi_0).$$

Die Daten für die Winkel ψ, η, ϑ ergeben sich unmittelbar durch Beobachtung am Bifilar, indem man erst die Gleichgewichtslage desselben ohne eingehängten Magnet, dann nach dem Einhängen und endlich nach dem Auflegen und Umwenden des Ablenkungsmagnets bestimmt, wobei die Winkel η und ϑ nur angenähert bekannt zu sein brauchen. Mittelst ϑ und angenähert bekannten Werthen von M_1 und H ergibt sich aus 2) der Winkel φ_0. Umständlicher wäre die Ermittlung von e_1 und e_2, es ist besser, diese Winkel, was bei einem fest aufgestellten Instrumente leicht ein für allemal geschehen kann, möglichst klein, etwa nicht grösser als $^1/_4$° zu machen, was übrigens auch bezüglich des Winkels φ_0 unschwer zu erzielen ist. Dann haben diese Winkel auf das Resultat einen verschwindend kleinen Einfluss. Da übrigens auch $\varphi+\varphi'=\psi$ und ϑ klein sind, so kann man die obige Formel noch durch Reihenentwicklung vereinfachen. Wir wollen hiebei in der Entwicklung die Glieder 4ten Grades bereits vernachlässigen, was unbedenklich geschehen kann. Denn wenn wir das Argument selbst gleich 6° annehmen (in Wirklichkeit wird selbst ψ kaum grösser als 3° zu erwarten sein), so würde der hiedurch begangene Fehler beim Sinus 0·00005 und beim Cosinus 0·000005 seines Werthes betragen. Die Entwicklung liefert zunächst:

$$\frac{4M_1M_2}{a^3}=D\psi\left(1+\frac{1}{12}\psi^2-\frac{1}{2}\vartheta^2+\frac{1}{2}\varphi_0^2+\varphi_0(\vartheta+\frac{3}{4}e'+\frac{1}{4}e)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}e'^2+\frac{1}{8}e^2+\eta(\varphi_0+\frac{1}{4}\eta+\frac{3}{8}e'+\frac{1}{8}e)\right)\cdot \quad \ldots 4)$$

Wenn man in den Gleichungen 3) M_1H mittelst 2) durch D ausdrückt, dann die Entwicklung vornimmt, und die beiden Gleichungen addirt, so erkennt man sofort, dass eine Gleichung von folgender Form resultirt:

$$\frac{4M_1M_2}{a^3}[\varepsilon^2]=D(\eta+[\varepsilon^3]),$$

worin $[\varepsilon^2]$ und $[\varepsilon^3]$ Summen von Gliedern zweiten, beziehungsweise dritten Grades der Winkel ψ, ϑ, η, φ_0, e, e' bedeuten sollen; da nun

$$\frac{4M_1M_2}{Da^3} = \psi(1+[\varepsilon^2]),$$

so folgt weiter, dass η nicht von niedrigerem Grade als vom dritten sein könne. In Folge dessen sind in Gleichung 4) die Glieder, welche η enthalten, als sämmtlich vom 4ten Grade wegzulassen, und es bleibt, wenn man noch für e und e' die Werthe setzt:

$$\frac{4M_1M_2}{a^3} = D\psi\Big(1+\frac{1}{12}\psi^2-\frac{1}{2}\vartheta^2+\varphi_0\vartheta+\frac{1}{2}\varphi_0(\varphi_0+2e_1-e_2)+ \\ +\frac{1}{2}(e_1^2-e_1e_2+e_2^2)\Big) \qquad \ldots 5)$$

Betragen die Winkel φ_0, e_1, e_2 nicht mehr als 15′ bis 17′, so können die beiden letzten Glieder zusammengenommen im ungünstigsten Falle nur den Werth 0·00008 erreichen, und man hat dann noch einfacher

$$\frac{4M_1M_2}{a^3} = D\psi\Big(1+\frac{1}{12}\psi^2-\frac{1}{2}\vartheta^2+\varphi_0\vartheta\Big) \qquad \ldots 6)$$

Mit den am Schlusse des Art. 2 angenommenen Werthen von M_1 und D, die jedenfalls von den Werthen, die sie bei wirklicher Ausführung des Experimentes haben können, nicht sehr bedeutend abweichen werden, ergibt sich nahezu $\vartheta = 22'$ und wenn wir dann noch $\varphi_0 = \pm 17'$ annehmen, so ist

$$-\frac{1}{2}\vartheta^2+\varphi_0\vartheta = 0\cdot000012, \quad -\frac{1}{2}\vartheta^2-\varphi_0\vartheta = -0\cdot000040,$$

$$\frac{1}{12}\psi^2 = 0\cdot000194,$$

so dass in den praktisch vorkommenden Fällen die einfache Formel

$$\frac{4M_1M_2}{a^3} = D\psi\Big(1+\frac{1}{12}\psi^2\Big) \qquad 7)$$

für gewöhnlich ausreichen wird.

Hiemit dürfte nachgewiesen sein, dass die vorgeschlagenen Methoden zur Bestimmung von Momenten, Horizontalintensitäten und Stromstärken nicht nur hinreichende Einfachheit, sondern auch jene Genauigkeit gewähren, die man von absoluten magnetischen Messungen verlangen kann.

Die näheren Details über die Einrichtung der Instrumente und die Anordnung der Messungen sollen einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben, die zugleich die Ergebnisse von vergleichenden Versuchen an einer Wage und einem Bifilar bringen werden, sobald mir diese instrumentellen Hilfsmittel zur Verfügung stehen.

(Prag den 15. Jänner 1889.)

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: 98_2a

Autor(en)/Author(s): Lippich Ferdinand (Franz)

Artikel/Article: Über die Bestimmung von magnetischen Momenten, Horizontalintensitäten und Stromstärken nach absolutem Masse 188-200