

Theorie der cyklischen Projectivitäten

von

Adolf Ameseder,

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

Die erste ausführliche Untersuchung haben die cyklischen Projectivitäten im 1. § der bekannten Lüroth'schen Abhandlung: „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen“ [1] erfahren. Die Behandlung und der Umfang sind hier durch die Rücksicht auf den Endzweck, eine Darstellung für das Imaginäre zu begründen, bestimmt.

Gelegentliche Bemerkungen über cyklische Projectivitäten im Allgemeinen und solche mit den Perioden 3 und 4 im Besonderen finden sich in manchen früheren und späteren Arbeiten anderer Geometer. Eine systematische Untersuchung wird jedoch erst wieder in dem Lehrbuche von Emil Weyr: „Die Elemente der projectivischen Geometrie“ [2] gegeben. Der Charakter des Buches bedingt eine Beschränkung auf die wichtigsten Sätze, von welchen die auf die Ordnungspunkte bezüglichen durch Rechnung bewiesen werden. Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch einer rein geometrischen Theorie der cyklischen Projectivitäten. Sie hat mit der Lüroth'schen Abhandlung mancherlei Berührungspunkte, weicht jedoch von ihr sowohl durch die Darstellung als auch den Umfang des Inhaltes wesentlich ab.

Während Herr Lüroth den Satz an die Spitze stellt, dass eine cyklisch-projective Gruppe durch drei auf einander folgende Punkte bestimmt ist, wird hier der Satz zur Grundlage gemacht,

---

[1] Math. Annalen, Bd. 11, S. 84—103.

[2] I. Heft, S. 198—209 und II. Heft, S. 126.

dass unter den cyklischen Folgen einer Gruppe von n Elementen stets eine mit der Reihenfolge der Elemente auf dem Träger identisch ist, und der Lüroth'sche Hauptsatz erst am Schluss, bei der typischen Darstellung, angeführt. Dadurch wird einerseits der allerdings sehr scharfsinnige, aber auch langwierige Beweis, den Herr Lüroth für seinen Hauptsatz gibt, völlig erspart, andererseits werden die arithmetischen Hilfsmittel, die nicht vollständig zu entbehren sind und bei Lüroth an mehreren Stellen hervortreten, auf das nothwendige Minimum reducirt. Während ferner Herr Lüroth für das Imaginärsein der Ordnungselemente einer cyklischen Projectivität von $n \gtreqless 3$ elementigen Gruppen einen indirecten, arithmetischen Beweis erbringt, werden hier diese Ordnungselemente durch eine reelle Involution ersetzt, von der auf Grund des Hauptsatzes dieser Arbeit gezeigt wird, dass jedes Elementenpaar die Elemente eines jeden anderen trennt. Es werden somit hier nur reelle Gebilde betrachtet und benützt. Endlich leitet Herr Lüroth nur jene Beziehungen, welche eine Gruppe betreffen, unter Grundlage eines geraden Trägers ab und benützt bei der Untersuchung der cyklischen Involution, aus dem einstufigen Träger in die Ebene hinaustretend, die Abbildung auf einem Kegelschnitte. Hier wird dagegen das einstufige Gebiet nur zum Schluss an einer Stelle zu dem Zwecke verlassen, um für die cyklisch-projectiven Gruppen eine typische Darstellung in den Kreistheilungsgruppen zu geben.

Ermöglicht wurde diese rein geometrische Darstellung zum nicht geringen Theil durch die für die geometrische Untersuchung projectivischer Beziehungen im binären Gebiet grundlegende Monographie des Herrn Hermann Wiener: „Rein geometrische Darstellung der Theorie binärer Formen“,[1] der manche Bezeichnungen und auch einige Beweise (s. Absch. II) entnommen sind.

Materiell decken sich die drei ersten Abschnitte im Wesentlichen mit dem, was sich in der Lüroth'schen Abhandlung über cyklische Projectivitäten vorfindet. Völlig neu sind nur die Untersuchungen der Abschnitte IV und V, nämlich die Transformationen der cyklischen Involution in sich und die Zusammensetzung von cyklischen Projectivitäten mit primzahligen Perioden zu

[1] S. 17—27.

solchen mit zusammengesetzten Perioden. Der Abschnitt VI enthält die bekannte typische Darstellung für eine cyklisch-projective Gruppe, jedoch gleichfalls rein geometrisch und ohne Benützung des Imaginären entwickelt. Im VII. Abschnitt endlich wird der Zusammenhang erörtert, der zwischen der Klein-Lüroth'schen und der Staudt'schen Interpretation des Imaginären besteht.

I.

Die cyklischen Folgen einer Gruppe.

1. Eine Projectivität T' auf einer Geraden G ordnet zu einem beliebigen Punkte 1 den entsprechenden Punkt 2, zu diesem in demselben Sinne den Punkt 3 u. s. f. Derart erhält man eine im Sinne $(i, i+1)$ beliebig weit fortsetzbare Reihe:

$$1, 2, 3, \ldots n-1, n, n+1, \ldots 2n-1, 2n, 2n+1, \ldots \tag{1}$$

die den Relationen:

$$(1, 2, \ldots n, n+1, \ldots) \barwedge (2, 3, \ldots n+1, n+2, \ldots) \barwedge (1+k, 2+k, \ldots n+k, n+1+k, \ldots) \tag{2}$$

genügt.

2. Coïncidirt $n+1$ mit 1, ist also T' cyklisch, dann wird jede der folgenden Gruppen:

$$n+1, n+2, \ldots 2n-1, 2n,$$
$$2n+1, 2n+2, \ldots 3n-1, 3n,$$

Punkt für Punkt identisch mit der nun cyklisch-projectivischen Gruppe:

$$1, 2, \ldots n-1, n, \tag{3}$$

in der ein beliebiger Punkt i alle jene in (2) noch getrennten Punkte vereinigt, die den zu i nach dem Modul n congruenten Zahlen $g.n+i$ entsprechen.

3. Es ist (3) nicht die einzige cyklisch-projectivische Folge der n Punkte; jede arithmetische Reihe erster Ordnung:

$$1, 1+k, \ldots \quad 1+(n-2)k, 1+(n-1)k, \tag{4}$$

in der k relativ prim zu n ist, führt zu einer solchen.

Aus (2) folgt nämlich:

$$(1, 2, \ldots n-1, n) \barwedge (1+k, 2+k, \ldots n-1+k, n+k), \qquad (5)$$

d. h. je zwei Punkte i und $i+k$, die zwei Zahlen von constanter Differenz entsprechen, sind einander in derselben Projectivität T^k zugeordnet. Hiernach stellt (4) eine Reihe von der Art (1) vor, in der jeder Punkt dem vorhergehenden in demselben Sinne projectivisch entspricht. In dieser Reihe, die im Allgemeinen ebenso unbeschränkt wie (1) ist, coïncidirt der $(n+1)$. oder schon ein vorhergehender Punkt mit 1, weil wegen der in Art. 2 gemachten Voraussetzung rechts in (5) dieselben n Punkte stehen wie links. Der $(n+1)$. Punkt fällt dann in 1, wenn k prim zu n ist, da in diesem Falle $1+nk$ die kleinste unter den zu 1 nach dem Modul n congruenten Zahlen ist. Hat dagegen k mit n den grössten Theiler t gemein, dann schliesst sich die Reihe bereits mit dem $\frac{n}{t}$. Gliede ab, da nun schon $1+\frac{n}{t}.k$ zu 1 nach dem Modul $\frac{n}{t}$ congruent ist. In diesem Falle zerfällt die cyklisch-projective Folge (4) in t derartige Folgen von je $\frac{n}{t}$ Punkten, die alle von der Form:

$$1,\ 1+\frac{k}{t}, \qquad 1+\frac{\left(\frac{n}{t}-1\right)k}{t} \text{ sind.}$$

Die cyklischen Folgen, die man aus (4) für $k=2, 3, \ldots n-1$ erhält, sollen als aus (3) abgeleitet und zu (3) und unter einander conjugirt bezeichnet werden. Sie sind für k prim n irreductibel, für k nicht prim zu n reductibel. Ebenso mögen die cyklischen Projectivitäten T^k mit Bezug auf T' abgeleitete oder conjugirte Projectivitäten heissen. Die Anzahl der Punkte einer Gruppe heisse Periode; sie ist $\frac{n}{t}$, wenn t der grösste gemeinschaftliche Theiler von n und k ist.

Alles dies überträgt sich auf Träger, die sich auf G projectivisch abbilden lassen, insbesondere auf Kegelschnitte, kubische Raumcurven und Regelschaaren zweiten Grades.

Allgemein gefasst, lautet das Resultat dieser drei Artikel wie folgt:

Man erhält aus einer cyklisch-projectivischen Folge von n Elementen $1, 2, \ldots n-1$, n weitere Folgen dieser Art, indem man die Elemente nach einer arithmetischen Reihe erster Ordnung anreiht. Ist die Differenz der Reihe relativ prim zur Anzahl n der Elemente, so ist die abgeleitete Folge irreductibel, d. h. sie umfasst alle Elemente; in jedem andern Fall ist sie reductibel, u. zw. zerfällt sie, falls k und n den grössten gemeinschaftlichen Theiler t besitzen, in t cyklisch-projectivische Theilgruppen von je $\frac{n}{t}$ Elementen.

4. Eine Gerade G sei Träger einer cyklisch-projectivischen Gruppe (3), für die $n \gtreqless 3$ vorausgesetzt wird. Die zwei durch G gegebenen Richtungen mögen durch „$+$" und „$-$" unterschieden werden; ferner sei $1+k$ der Punkt der Gruppe, der in $+$ Richtung in G auf 1 folgt. Bewegt sich ein Punkt a auf G von 1 bis $1+k$ in $+$ Sinne, so passirt er, der Voraussetzung zufolge, keinen Punkt der Gruppe; ist die Bewegungsrichtung dagegen $-$, dann berührt er jeden Punkt der Gruppe einmal.

Gleichzeitig mit a bewegt sich der zu a vermöge T^k zugeordnete Punkt a' von $1+k$ bis $1+2k$, die continuirliche[1] Strecke $\overline{1+k, 1+2k}$ beschreibend. Wird a die $+$ Bewegungsrichtung vorgeschrieben, dann passirt a' während seiner Wanderung von $1+k$ bis $1+2k$ ebenfalls keinen Punkt der Gruppe. Die Strecke $\overline{1+k, 1+2k}$ schliesst sich folglich in $+$ Sinne an die Strecke $\overline{1, 1+k}$. Währe ihr Sinn $-$, dann würde entweder $1+2k$ sich auf der $+$ Strecke $\overline{1, 1+k}$ befinden, oder 1 würde auf der von a' durchlaufenen Strecke $\overline{1+k, 1+2k}$ liegen. Beides widerspricht der Voraussetzung, dass auf der in $+$ Sinne durchlaufenen Strecke $\overline{1, 1+k}$ sich kein Punkt der Gruppe befindet.

Das Ergebniss dieser Betrachtung ist, dass in G dem in $+$ Sinne auf 1 folgenden Punkte $1+k$ sich in dem gleichen Sinne der Punkt $1+2k$ anreiht.

---

[1] Staudt, Geometrie der Lage, S. 55.

Von $1+k$, $1+2k$ ausgehend, kann das Gleiche für $1+3k$ bewiesen werden. Es ergibt sich derart, dass die Punkte der cyklisch-projectivischen Gruppe (3) auf G in $+$ Sinne eine Reihenfolge der Art (4) bilden. Eine solche ist nach Art. 3 stets cyklisch. Die in $+$ Sinne sich an einander schliessenden Strecken:

$$\overline{1,\, 1+k},\ \overline{1+k,\, 1+2k}, \ldots \overline{1+(n-1)k,\, 1}$$

bedecken demnach die unbegrenzte Gerade G einfach und vollständig. Es ist folglich jeder der n Punkte (3) Trennungspunkt zweier benachbarten Strecken, die cyklische Folge somit n-punktig und also k relativ prim zu n.

Mit Bezugnahme auf den dritten Artikel kann man sagen:

Unter den irreductiblen cyklisch-projectivischen Folgen von n Elementen, die sich aus einer solchen Folge ableiten lassen, befindet sich stets eine, die natürliche, die mit der Reihenfolge der Elemente auf dem Träger identisch ist.

5. Führt man für die natürliche cyklische Folge die Bezeichnung:

$$(1), (2), \ldots (n-1), (n) \tag{6}$$

ein und entspricht in dieser dem Punkte 2 das Zeichen $(1+l)$, dann liegen auf der $+$ Strecke $\overline{1,2}$ zwischen 1 und 2 $l-1$ Punkte, die in der neuen Bezeichnung (2), (3), $\ldots$ (l) heissen. Ebenso viele Punkte der Gruppe liegen auf der der Strecke $\overline{1,2}$ in der Projectivität T' entsprechenden Strecke $\overline{2,3}$ zwischen 2 und 3; weil jedem Punkte der Gruppe vermöge T' sowohl im Sinne $(i, i+1)$ als auch im conträren Sinne $(i+1, i)$ immer wieder ein Punkt der Gruppe zugeordnet ist. Da nun wegen $n \gtreqless 3$ der Punkt 3 jedenfalls von 1 verschieden ist, so enthält die Strecke $-\overline{2,3}$ mindestens um einen Punkt, den Punkt 1, mehr als die Strecke $+\overline{1,2}$. Es ist folglich nicht $-\overline{2,3}$, sondern $+\overline{2,3}$ die $+\overline{1,2}$ entsprechende Strecke und daher $(1+2l)$ das zu 3 gehörige Zeichen. In gleicher Weise ergeben sich für die Punkte 4, 5, $\ldots n$ die neuen Zeichen $(1+3l)$, $(1+4l) \ldots (1+(n-1)l)$.

Hiernach stellt sich (3) als eine aus der natürlichen cyklischen Folge abgeleitete Folge heraus. Da (3) eine beliebige cyklisch-projectivische Folge ist, so ist ersichtlich, dass man derart aus (6) alle cyklischen Folgen der n Punkte erhalten kann.

Sind nun (1), $(1+l)$,. . und (1), $(1+m)$. zwei beliebige dieser Folgen, und identificirt man die erste mit 1, 2,. dann tritt an Stelle von (6) wieder 1, $1+k$,. . und folglich an Stelle von (1), $(1+m)$,. die Folge 1, $1+mk$,. . Das heisst:

Das in Art. 3 angegebene Verfahren liefert, auf irgend eine irreductible cyklische Folge einer Gruppe angewendet, die sämmtlichen weiteren cyklisch-projectivischen Folgen dieser Gruppe.

6. Die Anzahl der cyklischen Folgen, die sich aus (4) für die sämmtlichen incongruenten Werthe 0, 1, 2,. . $n-1$ von k ergeben, ist n. Je zwei von diesen Zahlen, die wie k und $n-k$ zur Summe n geben, liefern wegen $1+(n-i)k \equiv 1+i(n-k)$ (mod. n) zwei nur durch den Sinn verschiedene cyklische Folgen. Hievon ist erstens der Wert $k=0$ ausgenommen, dem die Identität oder der eingliederige Cyklus entspricht, und zweitens für ein gerades n der Werth $\frac{n}{2}$, für den die cyklische Folge, aus zwei Elementen bestehend, involutorisch ist.

Die Anzahl der cyklischen Folgen reducirt sich demnach für ein gerades n auf $\frac{n+2}{2}$, für ein ungerades auf $\frac{n+1}{2}$; irreductibel sind hievon $\frac{\varphi(n)}{2}$, alle anderen $\frac{n-\varphi(n)+2}{2}$ bzw. $\frac{n-\varphi(n)+1}{2}$ sind reductibel.

Für die Werthereihe $n=2, 3,. . 31$ enthält die nachstehende Tabelle die sprachlichen Anzahlen, in die jedoch die Identität hier nicht mit aufgenommen ist.

Bezeichnet 1, 2,. $n-1$, n die im + Sinne durchlaufene natürliche cyklische Folge, so hat k einen leicht angebbaren invarianten Charakter. Die Zahl k bestimmt nun eine cyklische Folge und zeigt für diese an, wie oftmal ein auf G in + Sinne sich fortbewegender Punkt a diese Gerade zu durchlaufen hat, um alle Punkte der Folge 1, $1+k$, . . in dieser Anordnung einmal zu passiren. Für 1, 2,. . n genügt ein einmaliges Durchlaufen; für 1, $1+k$, $1+(n-1)k$ (k prim n) muss es

k-mal geschehen, da a, um von i zu dem nächsten Punkt $i+k$ zu gelangen, die k Strecken $\overline{i, i+1}$; $\overline{i+1, i+2}, \ldots \overline{i+k-1, i+k}$ zu beschreiben hat. Hiernach können zwei cyklische Folgen nur dann projectivisch sein, wenn sie erstens demselben n, zweitens demselben k entsprechen.

	$\frac{\varphi(n)}{2}$	$\frac{n-\varphi(n)}{2}$, $\frac{n-\varphi(n)-1}{2}$	$\frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{2}$		$\frac{(\varphi)n}{2}$	$\frac{n-\varphi(n)}{2}$, $\frac{n-\varphi(n)-1}{2}$	$\frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{2}$
2	1	0	1	17	8	0	8
3	1	0	1	18	3	6	9
4	1	1	2	19	9	0	9
5	2	0	2	20	4	6	10
6	1	2	3	21	6	4	10
7	3	0	3	22	5	6	11
8	2	2	4	23	11	0	11
9	3	1	4	24	4	8	12
10	2	3	5	25	10	2	12
11	5	0	5	26	6	7	13
12	2	4	6	27	9	4	13
13	6	0	6	28	6	8	14
14	3	4	7	29	14	0	14
15	4	3	7	30	4	11	15
16	4	4	8	31	15	0	15

II.

Harmonisch-conjugirte Gruppen.

7. In dem Folgenden werde unter

$$1, 2, \ldots n-1, n \tag{8}$$

die natürliche cyklische Folge verstanden und die zugehörige Projectivität T' genannt.

Sind $i, i+1, i+2, i+3$ und $j, j+1, j+2, j+3$ je vier auf einander folgende Punkte dieser Folge, so ist nach (5):

$$(i, i+1, i+2, i+3) \barwedge (j, j+1, j+2, j+3),$$

ferner ist: [1]

$$(i, i+1, i+2, i+3) \overline{\wedge} (i+3, i+2, i+1, i)$$

und folglich:

$$(i, i+1, \ldots i+n-2, i+n-1) \overline{\wedge} (i+n-1, i+n-2, \ldots i+1, i). \quad (9)$$

Mit Rücksicht auf:

$$(i+n-1, i+n-2, \ldots i+1, i) \overline{\wedge} (i, i+n-1, \ldots i+2, i+1)$$

folgt hieraus die Relation:

$$(i, i+1, \ldots i+n-2, i+n-1) \overline{\wedge} (i, i+n-1, \ldots i+2, i+1). \quad (10)$$

Diese lehrt, dass je zwei zu verschiedenen Seiten von i befindlichen Punkte der Gruppe, die wie $i+l$ und $i+n-l$ von i durch gleich viele zwischenliegende Punkte getrennt werden und die folglich eine zu derselben Zahl $2i$ nach dem Modul n congruente Summe geben, in einer Involution J^{2i} conjugirt sind, die i zum Ordnungspunkt hat und durch diesen eindeutig bestimmt ist.

Der zweite Ordnungspunkt i' bildet mit i und jedem Paare

$$i+1, i+n-1; \; i+2, i+n-2; \ldots$$

eine harmonische Reihe, insbesondere auch mit demjenigen, das bei dieser Anordnung an letzter Stelle steht. Ist $n = 2m+1$, so besteht dieses Paar aus zwei auf G benachbarten Punkten $m+i$ und $m+i+1$ der Gruppe $1, 2, \ldots n$. Beide Punkte begrenzen folglich auf G zwei Strecken, von denen die eine, nämlich $-\overline{m+i, m+i+1}$ alle Punkte der Gruppe und auch i trägt, wesshalb die andere, d. i. $+\overline{m+i, m+i+1}$, i' enthalten muss. Ist $n = 2m$, so ist $m+i, m+i$ das letzte Paar und also i' mit $m+i$ identisch.

Im ersten Fall $(n = 2m+1)$ befinden sich die Punkte $1', 2'$, $.(n-1)', n'$ bezw. auf den Strecken

$$+\overline{m+1, m+2}, \; +\overline{m+2, m+3}, \ldots +\overline{m+n-1, m}, \; +\overline{m, m+1},$$

im zweiten bezw. in

$$m+1, m+2, \ldots m+n-1, m.$$

[1] Staudt, Geometrie der Lage, S. 59.

8. Setzt man in der harmonischen Reihe $(i—1, i, i+1, i')$ $i = 1, 2, . \; . n$, so erhält man die n untereinander projectivischen Quadrupel:

$$(n, 1, 2, 1') \overline{\wedge} (1, 2, 3, 2') \overline{\wedge} \qquad \overline{\wedge} (n-1, n, 1, n').$$

Die Beziehung zwischen je zwei aufeinander folgenden Quadrupeln wird durch T' vermittelt, da T' die ersten drei Punkte des einen Quadrupels in die ersten drei des zweiten überführt. Die Punkte $1', 2', . \; . (n—1)', n'$ bilden folglich eine zweite, zur ersten „harmonisch conjugirte", cyklisch-projectivische Gruppe von T', die nach Art. 7 für $n = 2m+1$ von der ersten völlig verschieden, und für $n = 2m$ mit ihr identisch ist.

Es ist somit:

$$(1, 2, 1', 2') \overline{\wedge} (2, 3, 2', 3'),$$

folglich wegen:

$$(2, 3, 2', 3') \overline{\wedge} (3', 2', 3, 2):$$

$$(1, 2, 3) \overline{\overline{\wedge}} (3', 2', 1').$$ [1]

Ebenso folgt: $(2, 3, 4) \overline{\overline{\wedge}} (4', 3', 2'),$

$$(n—2, n-1, n) \overline{\overline{\wedge}} (n', (n—1)', (n—2)').$$

Hier haben je zwei aufeinander folgende Involutionen zwei Punktepaare gemein und es bilden desshalb alle eine einzige Involution. Es ist:

$$(1, 2, . \; . n—1, n) \overline{\overline{\wedge}} (n', (n—1)', . \; . 2', 1'); \tag{11}$$

woraus unter Zuziehung von (9) die Projectivität:

$$(1, 2, . \; . n—1, n) \overline{\wedge} (1', 2', . \; . (n—1)', n') \tag{12}$$

sich ergibt.

Eine Gruppe einer cyklischen Projectivität und ihre harmonisch conjugirte Gruppe sind hiernach stets projectivisch verwandt.

9. Fügt man zur Gruppe links in (10) die Punkte: $i', (i+1)', (i+2)', \dots,$ die mit je drei auf einander folgenden Punkten: $i+n—1, i, i+1; i, i+1, i+2; i+1, i+2, i+3; . \; .$ dieser Gruppe eine harmonische Reihe bilden, so entsprechen diesen rechts in

---

[1] $\overline{\overline{\wedge}}$ Zeichen für involutorische Beziehungen.

(10) die gleich definirten Punkte: i', $(i+n-1)'$, $(i+n-2)'$ d. h. es ist:

$$(i, i+1, \ldots i+n-1, i', (i+1)', \ldots (i+n-1)') \barwedge$$
$$\barwedge (i, i+n-1, \ldots i+1, i', (i+n-1)', \ldots (i+1)'). \quad (13)$$

In der Involution mit den Ordnungspunkten i, i' sind demnach auch $(i+1)'$, $(i+n-1)'$; $(i+2)'$, $(i+n-2)'$; . . . Paare; es ist folglich der Punkt i in demselben Sinne zu i' conjugirt, wie i' zu i.

10 Der an (10) vollzogene Erweiterungsprocess soll nun auch an (12) vorgenommen werden. Links werden vermittelst der harmonischen Reihen: n, 1, 2, 1'; 1, 2, 3, 2'; die Punkte: 1', 2' hinzugefügt; dann reihen sich rechts, entsprechend den harmonischen Reihen: n', 1', 2', 1; 1', 2', 1', 2; . . ., die Punkte: 1, 2, . . an, und man erhält:

$$(1, 2, \ldots n-1, n, 1', 2', \ldots (n-1)', n') \barwedge$$
$$\barwedge (1', 2', \ldots (n-1)', n, 1, 2, \ldots n-1, n), \quad (14)$$

d. h. 1, 1'. 2, 2'. ... $(n-1)$, $(n-1)'$. n, n' ist eine Involution (i, i').

Eine cyklisch-projective Gruppe und ihre harmonisch conjugirte Gruppe sind durch eine Involution verbunden.

Die natürliche Reihenfolge der $2n$ Punkte der Involution ist für $n = 2m+1$ nach Art. 7 die folgende:

$$1, (m+2)', 2, \ldots i-1, (m+i)', i, \ldots m', 2m+1, (m+1)'. \quad (15)$$

Man erhält nach Art. 3 und mit Rücksicht auf Art. 8 eine zu ihr projective Anordnung, indem man alle Zahlen um dieselbe Constante $m+1$ vermehrt. Diese lautet [s. Art. 2]:

$$m+2, 2', m+3, \ldots m+i, i', m+i+1, \ldots (2m+1)', m+1, 1' \quad (16)$$

und wird aus (15) durch $T^{(m+1)}$ gewonnen. Ihr ist

$$(m+2)', 2, (m+3)', \ldots (m+i)', i, (m+i+1)', \ldots 2m+1, (m+1)', 1 \quad (17)$$

in (i, i') involutorisch zugeordnet. Diese zu (15) projective Reihe entsteht aus (15) nun auch dadurch, dass man jeden Punkt durch den folgenden ersetzt, insbesondere tritt hiebei an Stelle des letzten wieder der erste Punkt. Es ist also (15) eine cyklisch-projective Gruppe und die Verbindung oder Folge von $T^{(m+1)}$ und (i, i') die zugehörige cyklische Projectivität τ'.

Die harmonisch conjugirte Gruppe einer cyklisch-projectivischen Gruppe ist also entweder mit dieser identisch $[n = 2m]$, oder sie ergänzt dieselbe zu einer cyklisch-projectivischen Gruppe von doppelt so vielen Elementen $[n = 2m+1]$.

Mit Hilfe dieses Satzes kann der Fall $n = 2m+1$ auf den anderen, $n = 2m$, zurückgeführt werden, was für alle jene Untersuchungen sich nützlich erweist, die den Zusammenhang einer Gruppe und ihrer conjugirten betreffen.

III.

Die cyklische Involution.

11. Nun werde die Projectivität T' auf einen weder zu $(1, 2, . . n-1, n)$ noch zu $(1', 2', \quad (n-1)', n')$ gehörigen Punkt 1_1 von G $n$mal successive angewendet. Da 1_1 auf einer von den n die Gerade einfach und vollständig bedeckenden Strecken $+\overline{1, 2}$, $+\overline{2, 3}, . \quad +\overline{n, 1}$, etwa $+\overline{i, i+1}$, sich befinden muss, so liegt 2_1 auf $+\overline{i+1, i+2}$, 3_1 auf $+\overline{i+2, i+3}$ u. s. f., endlich $(n+1)_1$, der n. Transformierte, wieder auf $+\overline{i, i+1}$. Die ersteren n Punkte $1_1, 2_1, . . (n-1)_1, n_1$ sind also jedenfalls verschieden, es liegt ja auf jeder der n Strecken $+\overline{1, 2}$, $+\overline{2, 3}, . \quad +\overline{n, 1}$ ein und nur ein Punkt dieser Reihe. Der letzte Punkt, $(n+1)_1$, dagegen, der mit dem Anfangspunkte 1_1 auf derselben Strecke $+\overline{i, i+1}$ liegt, coïncidirt stets, d. h. für alle Lagen von 1_1 mit diesem, denn er entspricht ihm in der Projectivität T^n, und diese hat mindestens drei sich selbst entsprechende Punkte,[1] nämlich alle Punkte $1, 2, . . n-1, n$. Wie in Art. 3 für $(1, 2, . . n-1, n)$, so lässt sich auch hier für $(1_1, 2_1, . . (n-1)_1, n_1)$ zeigen, dass die durch k-malige successive Wiederholung von T' erzeugte Projectivität T^k in dieser Gruppe die cyklische Folge $(1, (1+k)_1, .$
$(1+(n-2)k)_1, (1+(n-1)k)_1)$ veranlasst. Diese umfasst alle Elemente, wenn k prim zu n ist und also T^k dieselbe Periode n besitzt, wie T'. In diesem Falle kann man $(1_1, 2_1, . . (n-1)_1, n_1)$

[1] Staudt, Geometrie der Lage, S. 50.

aus 1_1 auch durch T^k hervorrufen, und da aus T^k auch T' sich ableiten lässt, so ist damit der folgende Satz bewiesen:

Eine cyklische Projectivität T^k erzeugt eine einstufige Schaar von cyklisch-projectivischen Gruppen von je n getrennten Elementen, die alle in gleicher Weise durch jede zu T^k conjugirte cyklische Projectivität T^{mk} von derselben Periode n hervorgerufen werden können.

Die Gesammtheit dieser Gruppen kann man mit Herrn Lüroth cyklische Involution C_n nennen und n als ihre Ordnung bezeichnen. Dieselbe bleibt erhalten, sobald m prim zu n ist, sie reducirt sich dagegen auf $\frac{n}{t}$, falls m und n den grössten Theiler t gemein haben. Ersichtlich werden in allen Gruppen die Elemente durch T^k in $+$ Sinne angeordnet, da $1_1, 2_1, .\ .(n-1)_1, n_1$ so wie $1, 2, .\ .n-1, n$ $+$ Sinnes sind.

12. Ist $n = 2m$, so werden je zwei harmonisch conjugirte Punkte i und $m+i$ [s. Art. 7] beiderseits durch $m-1$ zwischen liegende Punkte, nämlich $i+1, \ldots m+i-1$, resp. $m+i+1, \ldots i-1$, getrennt. Die m-malige successive Wiederholung von T', d. i. T^m, führt also von i über $i+1$ zu $m+i$ und von $m+i$ über $m+i+1$ wieder zu i und ist folglich mit (i, i') gleichbedeutend. Da T^m auch bei der zweiten Gruppe den Punkt j' in $(m+j)'$ und $(m+j)'$ wieder in j' überführt, so ist die Involution (i, i') für beide Gruppen dieselbe.

Ist $n = 2m+1$, dann füge man zu $(1, 2, .\ \cdot n-1, n)$ die harmonisch conjugirte Gruppe $(1', 2', .\ .(n-1)', n')$ hinzu, bezeichne $1, 2, .\ .n-1, n$ mit den ungeraden Zahlen: $1, 3, .\ .2n-3, 2n-1$ und $1', 2', .\ .(n-1)', n'$ in der Anordnung $(m+2)', (m+3)', .\ m', (m+1)'$ mit den geraden Zahlen: $2, 4, .\ 2n-2.\ 2n$. Nun construire man mit Hilfe von τ' [s. Art. 10], von 1_1 ausgehend, die Gruppe $(1_1, 2_1, .\ .(2n-1)_1, 2n_1)$. In dieser sind nach dem Vorstehenden $[n = 2m]$ je zwei Punkte i_1 und $(n+i)_1$ in der Involution $T^n \equiv (i, i')$ zu einander conjugirt, die i in $n+i$ transformirt. Nun ist τ^2 äquivalent T^1, also $1_1, 3_1 .\ .\ .(2n-3)_1, (2n-1)_1$ die durch 1_1 bestimmte Gruppe dieser cyklischen Projectivität und $2_1, 4_1, .\ .(2n-2)_1, 2n_1$, in der Anordnung: $(n+1)_1, (n+3)_1, .\ .(n-3)_1, (n-1)_1$, ihre harmonisch conjugirte. Nennt man die erste Gruppe: $1_1, 2_1, . \; . (n-1)_1, n_1$, so heisst die zweite: $(m+2)'_1$, $(m+3)'_1, \ldots m'_1$, $(m+1)'_1$ oder, anderst geordnet, $1'_1$, $2'_1, \ldots (n-1)'_1$, n'_1. Damit ist für jedes $n \gtreqless 3$ bewiesen: Die Involution (i, i') ist für alle Gruppen der cyklischen Involution dieselbe. Sie heisse zu dieser adjungirt.

13. Bei weiterer Untersuchung von (i, i') genügt es, den Fall $n = 2m$ zu betrachten [s. Art. 11]. Hier wird der Punkt 1_1 von seinem harmonisch conjugirten Punkte $(m+1)_1$ beiderseits durch m Punkte von $(1, 2, \ldots n-1, n)$ getrennt, da sich 1_1 auf $\overline{+i, i+1}$ und $(m+1)_1$ auf $\overline{+m+i, m+i+1}$ befindet. Diese trennenden Punkte sind für $\overline{+1_1, (m+1)_1}$ $: i+1, i+2, \quad i+m-1, i+m$ und für $\overline{+(m+1)_1, 1_1}$ $: i+m+1, i+m+2, \quad i-1, i$. Ersichtlich ist jedem Punkte $(i+l)$ der einen Reihe der gleichstellige Punkt $(i+m+l)$ der andern in (i, i') conjugirt; die Punkte eines jeden solchen in $(1, 2, \quad n-1, n)$ enthaltenen Paares von (i, i') werden folglich durch 1_1 und $(m+1)_1$ getrennt. Da nun $(1, 2, . \; . n-1, n)$ als eine beliebige Gruppe der cyklischen Involution gelten kann und 1_1 ein beliebiger Punkt von G ist, so gilt allgemein:

Die Elemente eines beliebigen Paares der Involution (i, i') trennen die eines jeden andern Paares derselben.

14. Nach Art. 11 wird die natürliche cyklische Folge bei allen Gruppen der cyklischen Involution durch dieselbe Projectivität T' hervorgerufen. In Folge dessen ist:

$$(1, 2, (i+1)_1, (i+2)_1) \barwedge (2, 3, (i+2)_1, (i+3)_1) \barwedge \quad \barwedge (n, 1, i_1, (i+1)_1)$$

Hieraus ergibt sich (wie in Art. 8) zunächst die Involution $J_1^{(i+1)}$:

$$1, 2, \ldots n-1, n \doublebarwedge i_1, (i+n-1)_1, \ldots (i+2)_1, (i+1)_1 \qquad (18)$$

und aus dieser vermöge (10) die Projectivität $T_1^{(i-1)}$:

$$1, 2, \ldots n-1, n \barwedge i_1, (i+1)_1, . \; . (i+n-2)_1, (i+n-1)_1. \qquad (19)$$

Da i alle Werthe von 1 bis n annehmen kann, so folgt:

Zwei beliebige Gruppen einer cyklischen Involution n. Ordnung sind n-fach projetivisch und n-fach involutorisch verwandt.

Idendificirt man insbesondere $(1_1, 2_1, \quad (n-1)_1, n_1)$ mit $(1, 2, . \; . (n-1), n)$, so stellen die rechten Seiten in (18) und (19) bloss andere Anordnungen der Folge $(1, 2, — n—1, n)$ vor. Man erhält die Transformationen einer Gruppe in sich. Die n Projectivitäten $T_1^{(i-1)}$ werden zu den n cyklischen Projectivitäten $T^{(i-1)}$ und — falls n ungerade ist — die n Involutionen $J_1^{(i+1)}$ zu den n Involutionen $J^{(i+1)}$ des Artikels 7. Ist jedoch n gerade, so ist die Anzahl der $J^{(i+1)}$ nur $\frac{n}{2}$, da je zwei harmonisch conjugirte Punkte der Gruppe dieselbe $J^{(i+1)}$ veranlassen. In diesem Falle treten zu den $\frac{n}{2}$ $J^{(i+1)}$ weitere $\frac{n}{2}$ J_1^{i+1} hinzu, die wie die ersteren $(1, 2, .\; n—1, n)$ in sich überführen, allerdings mit dem Unterschiede, dass hiebei kein Punkt der Gruppe fest bleibt. Für jene $J^{(i+1)}$ ist $(i+1)$ nothwendig gerade [s. Art. 7], für diese dagegen ungerade. Die Ordnungspunkte der letzteren bilden eine neue Gruppe der cyklischen Involution [s. Art. 16].

Als Specialfall des obigen Satzes hat man demnach:

Eine jede cyklisch-projectivische Gruppe von n Elementen besitzt n cyklisch-projectivische und n involutorische Transformationen in sich.

Ordnet man $(1, 2, .\; . n—1, n)$ zur cyklischen Folge $(1, 1+k, .\; 1+(n—2)k, 1+(n—1)k)$ an, so setzen sich die rechten Seiten in (18) und (19) in $i_1, (i+n—k)_1, \ldots (i+n—(n—2)k_1, (i+(n—1)k)_1$ und $i_1, (i+k)_1, .\; . (i+(n—2)k)_1, (i+(n—1)k)_1$ um.

Die cyklische Folge wird also weder durch eine projectivische Transformation $T_1^{(i-1)}$ noch durch eine involutorische $J_1^{(i+1)}$ geändert; der Sinn der Folge bleibt dagegen nur bei einer $T_1^{(i-1)}$ erhalten, bei einer $J_1^{(i+1)}$ erleidet er eine Inversion.

Die Constante k ist in der That [s. Art. 6] eine Invariante.

IV.

Transformationen der cyklischen Involution in sich.

15. Es sei $(1_2, 2_2, .\; . (n—1)_2, n_2)$ die in + Sinne geordnete natürliche cyklische Folge irgend einer anderen Gruppe von C_n und $i_3, (i+1)_3, \quad (i+n—2)_3, (i+n—1)_3$ ihre Transformirte in $T_1^{(i-1)}$. Dann ist:

$$1, 2, \ldots n-1, n, 1_2, 2_2, \ldots (n-1)_2, n_2 \wedge i_1, (i+1)_1, \ldots (i+n-2)_1,$$
$$(i+n-1)_1, i_3, (i+1)_3, \ldots (i+n-2)_3, (i+n-1)_3, \quad (20)$$

ferner:

$$1, 2, \ldots n-1, n, 1_2, 2_2, \ldots (n-1)_2, n_2 \barwedge$$
$$\barwedge 2, 3, \ldots n, 1, 2_2, 3_2, \ldots n_2, 1_2 \quad (21)$$

und folglich:

$$i_1, (i+1)_1, \ldots (i+n-2)_1, (i+n-1)_1, i_3, (i+1)_3, \ldots (i+n-2)_3,$$
$$(i+n-1)_3 \barwedge (i+1)_1, (i+2)_1, \ldots (i+n-1)_1, i_1, (i+1)_3,$$
$$(i+2)_3, \ldots (i+n-1)_3, i_3.$$

D. h. $(i_3, (i+1)_3, \ldots (i+n-2)_3, (i+n-1)_3)$ ist eine durch T' erzeugte Gruppe. Sie gehört demzufolge C_n an, ist $+$ Sinnes und von natürlicher cyklischer Folge. Eine Projectivität $T_1^{(i-1)}$, die eine Gruppe von C_n in eine zweite transformirt, führt hiernach auch jede weitere Gruppe von C_n wieder in eine solche über. Die $T_1^{(i-1)}$ bilden folglich ein die cyklischen Projectivitäten $T^{(i-1)}$ umfassendes System erster Stufe (T) von Transformationen. Von diesen $T_1^{(i-1)}$ sind je n insoferne „associirt", als sie jede Gruppe von C_n in dieselbe zweite Gruppe transformiren. Man erhält sie aus (20), indem man i die Werthe von 1 bis n ertheilt.

Um die Beschaffenheit des Systems (T) kennen zu lernen, transformire man $i_1, (i+1)_1, \ldots (i+n-2)_1, (i+n-1)_1$ vermittelst $T_1^{(i-1)}$ in $(2i-1)_2, 2i_2, \ldots (2i+n-2)_2, (2i+n-1)_2$.

Es ist:

$$(i-1)_1, i_1, \ldots (i+n-2)_1, 1 \barwedge (2i-2)_2, (2i-1)_2, \ldots (2i+n-3)_2, i,$$

ferner in $J_1^{(3i-1)}$:

$$(2i-2)_2, (2i-1)_2, \ldots (2i+n-3)_2, i_1 \doublebarwedge (i+1)_1, i_1, \ldots (i+2)_1, (2i-1)_2,$$

daher:

$$(i-1)_1, i_1, \ldots (i+n-2), 1 \barwedge (i+1)_1, i_1, \ldots (i+2)_1, (2i-1)_2,$$

d. h. $i_1, i_1 . (i-1)_1, (i+1)_1 . 1, (2i-1)_2$ ist eine Involution.

Der zweite Ordnungspunkt ist, als harmonisch conjugirter zu i_1 bezüglich $(i-1)_1$ und $(i+1)$, nach Art. 7 identisch mit i'_1. (i, i') ist folglich für T' die Involution „harmonisch conjugirter

Punkte.“[1] Dessgleichen ist sie dies für $T_1^{(i-1)}$, da i'_1 zu i_1 auch bezüglich 1 und $(2i-1)_2$ harmonisch liegt und 1 und $(2i-1)_2$ zu i_1 vermöge $T_1^{(i-1)}$ in dem einen und dem andern Sinne zugeordnet sind. Alle die Projectivitäten des Systems (T) haben also (i, i') zur Involution harmonisch conjugirter Punkte; dieses System ist folglich ein Büschel. Durch (i, i') und ein Paar entsprechender Punkte ist, wie auch aus Art. 11 hervorgeht, eine $T_1^{(i-1)}$ völlig bestimmt. Den n Paaren $1, 1; 1, 2; \ldots 1, n-1; 1, n$ entsprechend, gibt es daher ausser den n aufgezählten cyklischen Projectivitäten $T^{(i-1)}$ keine weiteren.

16. Nennt man die zu $1_2, 2_2, \ldots (n-1)_2, n_2$ in $J_1^{(i+1)}$ conjugirten Punkte $i_3, (i-1)_3, \ldots (i-n+1)_3, (i-n)_3$, so ist:

$$1, 2, \ldots n-1, n, 1_2, 2_2, \ldots (n-1)_2, n_2 \,\overline{\overline{\wedge}}\, i_1, (i-1)_1, \ldots (i-n+1)_1, (i-n)_1, i_3, (i-1)_3, \ldots (i-n+1)_3, (i-n)_3. \quad (22)$$

Dies liefert mit (21):

$$i_1, (i-1)_1, \ldots (i-n+1)_1, (i-n)_1, i_3, (i-1)_3, \ldots (i-n+1)_3, (i-n)_3 \,\overline{\wedge}\, \overline{\wedge}\, (i-1)_1, (i-2)_1, \ldots (i-n)_1, i_1, (i-1)_3, (i-2)_3, \ldots (i-n)_3, i_3,$$

woraus erhellt, dass $i_3, (i-1)_3, \ldots (i-n+1)_3, (i-n)_3$ eine in „—“ Sinne angeordnete durch T' erzeugte Gruppe ist. Da $1_2, 2_2, \ldots (n-1)_2, n_2$ + Sinnes ist, so sind die Ordnungspunkte von $J_1^{(i+1)}$ stets reell. Jeder derselben bestimmt eine Gruppe von C_n, die durch $J_1^{(i+1)}$ in sich transformirt wird. Der eine von ihnen ist durch die zwei Paare $1_2, i_3 . 2_2, (i-1)_3$ und durch die Bestimmung, auf der Strecke $+\overline{1_2, i_3}$ zu liegen, völlig bestimmt. Nun wird durch T' $1_2, i_3 . 2_2, (i-1)_3$ in $2_2, (i+1)_3 . 3_2, i_3$ transformirt. Es entspricht also in der cyklischen Projectivität T' der Involution $J_1^{(i+1)}$ die Involution $J_1^{(i+3)}$ und dem auf $+\overline{1_2, i_3}$ befindlichen Ordnungspunkt der ersteren der auf $+\overline{2_2, (i+1)_3}$ liegende Ordnungspunkt der letzteren. Jede der zwei Gruppen von C_n, die von

---

[1] Für allgemeine Projectivitäten weist auf die Existenz dieser Involution wohl zuerst Herr Schröter in Crelle, Bd. 77, S. 120; einen Beweis für den Schröter'schen Satz gibt Herr Pasch in Crelle, Bd. 91, S. 349 und „Vorlesungen über neuere Geometrie“, S. 132; die Bezeichnung „Involution harmonisch conjugirter Punkte“ rührt von Herrn Hermann Wiener her „Rein geometrische Theorie etc.,“ S. 22.

den Ordnungspunkten der n Involutionen $J_1^{(i+1)}$ $(i=1, 2, \ldots n-1, n)$ gebildet werden, entspricht sich somit in allen n Involutionen. Ist n ungerade, so entnimmt jede Gruppe von jeder Involution einen Ordnungspunkt, und es sind die Gruppen harmonisch conjugirt. Wenn dagegen n gerade ist, so bilden beide Ordnungspunkte aller $J_1^{(i+1)}$ mit geradem $(i+1)$ eine Gruppe und die jener mit ungeradem $(i+1)$ eine zweite, die der ersten coordinirt ist. Geht man von den n $J_1^{(i+1)}$ aus, die eine Gruppe in sich transformiren, indem man in (22) i_1, $(i-1)_1$, $\ldots$ $(i-n+1)_1$, $(i-n)_1$ durch i, $(i-1)$, $\ldots$ $(i-n+1)$, $(i-n)$ ersetzt, so überzeugt man sich in gleicher Weise, dass diese ebenfalls jeder weitern Gruppe dieselbe zweite zuordnen. Das heisst:

Dieselben n involutorischen Transformationen, die zwei Gruppen von C_n auf einander beziehen, transformiren auch jede andere Gruppe von C_n in dieselbe zweite, insbesondere transformiren sie dieselben zwei Gruppen in sich.

Die n Involution $J_1^{(i+1)}$ sind, sowie die n $T_1^{(i-1)}$ in Art. 15, „associrt"; sie sind ferner von den n $J^{(i+1)}$ der Art. 7 und 14 nicht verschieden.

17. Fügt man links in (18) und (19) die Punkte $1'$, $2'$, $\ldots$ $(n-1)'$, n' hinzu, so erweitern sich [s. Art. 9] die rechten Seiten um i'_1, $(i+n-1)'_1$, $\ldots$ $(i+2)'_1$, $(i+1)'_1$ bezw. i'_1, $(i+1)'_1$, $\ldots$ $(i+n-2)'_1$, $(i+n-1)'_1$, und man erhält:

$$1, 2, \ldots n-1, n, 1', 2', \ldots (n-1)', n' \;\overline{\wedge}\; i_1, (i+n-1)_1, \ldots (i+2)_1, (i+1)_1, i'_1, (i+n-1)'_1 \ldots (i+2)'_1, (i+1)'_1 \quad (23)$$

und:

$$1, 2, \ldots n-1, n, 1', 2', \ldots (n-1)' n' \;\overline{\wedge}\; i_1, (i+1)_1, \ldots (i+n-2)_1, (i+n-1)_1, i'_1, (i+1)'_1, \ldots (i+n-2)'_1, (i+n-1)'_1. \quad (24)$$

Hieraus folgt, dass jede von den projectivischen Transformationen $T_1^{(i-1)}$ und $J_1^{(i+1)}$ von C_n in sich auch die adjungirte Involution (i, i') in sich transformirt.

Irgend ein Paar entsprechender Punkte, etwa x, x_1, legt eine $T_1^{(i-1)}$ und eine $J_1^{(i+1)}$ fest, und es wird die von x ausgehende harmonische Darstellung x, y, x', y' von (i, i') in die von x_1 ausgehende x_1, y_1, x'_1, y'_1 transformirt, und zwar ist

$$T_1^{(i-1)} \equiv (x, y, x', y') \barwedge (x_1, y_1, x_1', y_1')$$

und

$$J_1^{(i+1)} \equiv (x, y, x', y') \barwedge (x_1, y_1', x_1', y_1),$$

wenn xyx' und $x_1y_1x_1'$ Anordnungen gleichen Sinnes für G sind.

Da $(i, i') \equiv 1, 1' . i_1, i_1'$ und $J_1^{(i+1)} \equiv 1, i_1 . 1', i_1'$ ist, so ist $J_1^{(i+1)}$ harmonisch zugeordnet zu (i, i') und folglich die Gesammtheit der $J_1^{(i+1)}$ ein Büschel mit (i, i') als Jacobi'scher Covariante.

Das Hauptsächlichste aus den Art. 15, 16 und 17 kann wie folgt zusammengefasst werden:

Eine cyklische Involution n Ordnung C_n besitzt ein Büschel (T) von projectivischen und ein Büschel (J) von involutorischen Transformationen in sich. Das erste Büschel umfasst die n cyklischen Projectivitäten und besitzt eine feste Involution harmonisch conjugirter Elemente (i, i'), die für das zweite Büschel die Jacobi'sche Covariante ist.

Eine T-Transformation führt entweder keine oder jede Gruppe von C_n in sich über, u. zw. ohne Änderung des Sinnes; wogegen eine J-Transformation stets zwei Gruppen in sich und jede weitere Gruppe in eine andere mit Inversion des Sinnes überführt.

18. Ausser diesen Transformationen von C_n in sich treten keine weiteren projectivischen Umformungen auf. Irgend eine Projectivität, sie heisse N, führt nämlich eine cyklisch-projectivische Gruppe $(1, 2, \ldots n-1, n)$ in eine Reihe $(a, b, \ldots r, s)$ über, die wegen $(1, 2, \ldots n-1, n) \barwedge (2, 3, \ldots n, 1)$ der Relation $(a, b, \ldots r, s) \barwedge (b, c, \ldots s, a)$ genügt und folglich auch cyklisch-projectivisch ist. Wie in (23) und (24), so erhellt auch hier, dass durch N die zu $(1, 2, \ldots n-1, n)$ gehörige Involution (i, i') in die zu $(a, b, \ldots r, s)$ gehörige $(l, l')_1$ überführt wird. Soll nun $(a, b, \ldots r, s)$ der durch $(1, 2, \ldots n-1, n)$ bestimmten C_n angehören, so muss $(l, l')_1 \equiv (i, i')$ sein, d. h. N muss (i, i') in sich transformiren. Weil nun irgend ein Punkt x von G eine harmonische Darstellung x, y, x', y' für (i, i') völlig bestimmt und in jeder projectiven Umformung von (i, i') in sich einer harmonischen Darstellung wieder eine solche x_1, y_1, x_1', y_1' entspricht, so ist jede N mit einer der Projectivitäten:

$(x, y, x', y') \overline{\wedge} (x_1, y_1, x'_1, y'_1)$ oder $(x, y, x', y') \overline{\wedge} (x_1, y'_1, x'_1\, y_1)$,

d. h. mit einer T- oder J-Transformation identisch.

19. Eine Aufeinanderfolge von zwei der sprachlichen Transformationen liefert stets wieder eine solche. Denn eine derartige Verbindung transformirt C_n in sich, und zwar ohne Änderung des Sinnes, wenn die Transformationen gleichartig sind, und mit Änderung desselben, wenn sie ungleichartig sind.

Es folgt aus (18) und der Involution:

$$i_1, (i+n-1)_1, .\,.(i+2)_1, (i+1)_1 \overline{\overline{\wedge}} (k-i+1)_2, (k-i+2)_2, \ldots (k-i+n-1)_2, (k-i+n)_2 \tag{25}$$

$$1, 2, .\,.n-1, n \overline{\wedge} (k-i+1)_2, (k-i+2)_2, . (k-i+n-1)_2, (k-i+n)_2;$$

ferner aus (18) und der Projectivität:

$$i_1, (i+n-1)_1, \ldots (i+2)_1, (i+1)_1 \overline{\wedge} (i+k+n-1)_2, (i+k+n-2)_2, (i+k+1)_2, (i+k)_2: \tag{26}$$

$$1, 2, .\,.n-1, n \overline{\wedge} (i+k+n-1)_2, (i+k+n-2)_2, . (i+k+1)_2, (i+k)_2,$$

wobei wegen des „—“ Sinnes der rechten Seite das Zeichen $\overline{\wedge}$ durch das Involutionszeichen $\overline{\overline{\wedge}}$ zu ersetzen ist [s. (18)].

Ebenso ergibt sich aus (19) und (25) bezw. (26):

$$1, 2, .\,.n-1, n \overline{\wedge} (k-i+1)_2, (k-i)_2, .\,.(k-i+3)_2, (k-i+2)_2$$

und

$$1, 2, .\,.n-1, n \overline{\wedge} (i+k-1)_2, (i+k)_2, .\,.(i+k+n-3)_2, (i+k+n-2)_2.$$

Das heisst es ist:

$$J_1^{(i+1)} . J_1^{(k+1)} \equiv T_1^{(k-i)}; \tag{27}$$

$$J_1^{(i+1)} . T_1^{(k-1)} \equiv J_1^{(i+k)},\ T_1^{(i-1)} . J_1^{(k+1)} \equiv J_1^{k-i+2}; \tag{28}$$

$$T_1^{(i-1)} . T_1^{(k-1)} \equiv T_1^{(i+k-2)}. \tag{29}$$

Gehören in (27) die Ordnungselemente der zwei J-Transformationen zur selben Gruppe von C_n, so ist $T_1^{(k-1)}$ eine von den n cyklischen Projectivitäten, u. zw. $T^{(k-i)}$. Das Gleiche gilt für

$T_1^{(i+k-2)}$ in (29), wenn die links stehenden T-Transformationen den cyklischen T entnommen sind. Die sämmtlichen projectivischen und involutorischen Transformationen einer cyklischen Involution in sich bilden eine Gruppe; die projectiven für sich eine continuirliche Gruppe, und die cyklisch-projectivischen eine in dieser enthaltene discontinuirliche Gruppe.

V.

Zusammensetzung von niederen cyklischen Projectivitäten zu höheren.

20. Eine projective Transformation T_m, die mit einer aus dem Büschel (T), etwa T_n, die Involution (i, i') gemein hat, gehört gleichfalls in dieses Büschel und transformirt folglich irgend eine Gruppe $(1_1, 2_1, \ldots (n-1)_1, n_1)$ von C_n in eine zweite, $(1_2, 2_2, \ldots (n-1), n_2)$, diese in eine dritte, $(1_3, 2_3, \ldots (n-1)_3, n_3)$, u. s. f. Ist T_m cyklisch und ihre Periode m relativ prim zu n, so bilden die m Gruppen:

$$(1_1, 2_1, \ldots (n-1)_1, n_1), (1_2, 2_2, \ldots (n-1)_2, n_2) \ldots (1_m, 2_m, \ldots (m-1)_m, n_m) \qquad (30)$$

einen m-gliederigen Cyklus, der in die n cyklisch-projectivischen Gruppen:

$$(1_1, 1_2, \ldots 1_{m-1}, 1_m), (2_1, 2_2, \ldots 2_{m-1}, 2_m), \ldots (n_1, n_2, \ldots n_{m-1}, n_m) \qquad (31)$$

der Projectivität T_m zerfällt, die ihrerseits gleichfalls sich zu einem Cyklus anordnen.

Die sämmtlichen $m.n$ Punkte der Gruppen (30) oder (31) bilden eine einzige neue cyklisch-projective Gruppe, die aus 1_1 durch die Verbindung $T_m . T_n$ abgeleitet werden kann. Die durch $T_m . T_n$ bedingte Folge ist:

$$1_1, 2_2, 3_3, \ldots p_p, \ldots m.n_{m.n}; \qquad (32)$$

in ihr coïncidirt der $(m.n+1)$. Punkt und kein früherer mit 1_1, da $m.n+1$ die kleinste nach den Moduln m und n zu 1 congruente Zahl ist: $T_m . T_n$ ist eine neue in dem Büschel (T) enthaltene cyklische Projectivität $T_{m.n}$ mit der Periode $m.n$.

Hiernach kann man aus den mit primzahligen Perioden $m, n, p,.$ behafteten cyklischen Projectivitäten eines Büschels cyklische Projectivitäten mit vielfachen Perioden $m.n, m.p, n.p,$ ableiten, indem man die ersteren mit einander auf alle möglichen Arten verbindet.

Ersichtlich sind die resultirenden cyklischen Projectivitäten nicht specieller Natur. Denn es wird eine jede cyklisch-projective Folge von $m.n$ Punkten, die durch eine T' erzeugt wird, nach Art. 3 durch $T^{(m)}$ in m cyklisch-projective Folgen von je n Punkten und durch $T^{(n)}$ in n solche Folgen von je m Punkten aufgelöst, und es haben $T^{(m)}$ und $T^{(n)}$ als Abgeleitete von T' mit dieser stets (i, i') gemein. Die obige diesbezügliche Voraussetzung ist also nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig.

Haben m und n den grössten gemeinsamen Theiler t, dann fällt schon der $\left(\frac{m.n}{t}+1\right)$. Punkt mit 1_1 zusammen. Im Übrigen gilt das Gesagte. Das heisst:

Die sämmtlichen cyklischen Projectivitäten mit gemeinsamer Involution harmonisch conjugirter Elemente (i, i') bilden eine discontinuirliche Transformationsgruppe, u. zw. liefern zwei Projectivitäten mit den Perioden m und n, falls diese den grössten Theiler t besitzen, in ihrer Aufeinanderfolge eine Projectivität mit der Periode $\frac{m.n}{t}$.

Die ganze Gruppe ist durch eine cyklische Projectivität oder auch durch (i, i') völlig bestimmt.

VI.

Typische Darstellung der cyklisch-projectivischen Gruppen.

21. Eine cyklisch-projective Gruppe von n Punkten kann bei natürlicher Folge $1, 2, . . n-1, n$ mit denjenigen n Strahlen $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$ eines Büschels in perspectivische Lage egbracht werden, die erstens den vollen Winkel um den Scheitel s in $2n$ gleiche Theile zerlegen und die zweitens in dem der

+ Richtung von G entsprechenden Drehungssinne auf einander folgen. Um dies zu bewerkstelligen, wird man s derart anordnen, dass die Involution harmonisch conjugirter Punkte $1, 1'.2, 2'$ $(n-1), (n-1)'.n, n'$ aus s durch eine Involution rechter Winkel $B_1B'_1.B_2B'_2..B_{n-1}B'_{n-1}.B_nB'_n$ projicirt wird. Da jedes Paar aus zwei harmonisch conjugirten Strahlen des cyklischen Büschels $B_1, B_2,..B_{n-1}, B_n$ besteht, so sind die Gruppen:

$$B_n, B_1, B_2, B'_1;\ B_1, B_2, B_3, B'_2;\ldots B_{n-1}, B_n, B_1, B'_n$$

sämmtlich harmonisch, in Folge dessen, die den gestreckten Winkel B_nB_n um s ausfüllenden Winkel $B_nB_1, B_1B_2, \ldots B_{n-1}B_n$ unter einander gleich und daher $B_1, B_2, \quad B_{n-1}, B_n$ congruent $A_1, A_2..A_{n-1}, A_n$.

Bringt man das Büschel mit einem durch s laufenden Kreis K in $a_1, a_2,\ldots a_{n-1}, a_n$ zum Schnitt, so erhält man in dem Linienzug $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3},..\overline{a_{n-1}a_n}, \overline{a_na_1}$ ein gewöhnliches reguläres n.Eck $a_1a_2 \;.\; a_{n-1}a_n$, da die unter einander gleichen Kreisbogen $\widehat{a_1a_2}, \widehat{a_2a_3},..\widehat{a_{n-1}a_n}, \widehat{a_na_1}$ sich in + Drehungssinne an einander schliessen und die Kreisperipherie bloss einfach bedecken.

Ordnet man die Punkte $(1, 2,..n-1, n)$ nach einer andern irreductibeln cyklischen Folge an, etwa $1, 1+k,\ldots 1+(n-2)k, 1+(n-1)k$, so geschieht das Gleiche mit den Strahlen $(B_1, B_2, ..B_{n-1}, B_n)$ und den Punkten $(a_1, a_2, .. a_{n-1}, a_n)$. Die Bogen $\widehat{a_1a_{1+k}}, \widehat{a_{1+k}a_{1+2k}},. \quad \widehat{a_{1+(n-2)k}a_{1+(n-1)k}}\widehat{a_{1+(n-1)k}a_1}$ bedecken nun den Kreisumfang k-fach, und der Linienzug

$$\overline{a_1a_{1+k}}, \overline{a_{1+k}a_{1+2k}},..\overline{a_{1+(n-2)k}a_{1+(n-1)k}}, \overline{a_{1+(n-1)k}a_1}$$

stellt folglich kein gewöhnliches, sondern ein Stern-n-Eck vor.

Das Gleiche gilt für jede weitere Gruppe $1_1, (1+k)_1,. (1+(n-2)k)_1, (1+(n-1)k)_1$ von C_n. Dieselbe wird aus s durch ein Büschel projicirt, das aus $B_1, B_{1+k},..B_{1+(n-2)k}, B_{1+(n-1)k}$ durch Rotation um s entsteht; ihr Bild auf K ist folglich ein mit $(a_1, a_{1+k},..a_{1+(n-2)k}, a_{1+(n-1)k})$ congruentes n-Eck.

22. Da jedes einfache reguläre n-Eck $b_1, b_2,\ldots b_{n-1}, b_n$ aus einem beliebigen Punkte s_1 des umschriebenen Kreises K_1 durch ein gleichwinkeliges Büschel der Art $B_1, B_2,..B_{n-1}, B_n$ projicirt wird und sich die Folgen $b_1, b_{1+k}, \quad b_{1+(n-2)k}, b_{1+(n-1)k}$ und $B_1, B_{1+k},..B_{1+(n-2)k}, B_{1+(n-1)k}$ eindeutig bedingen, so sind alle

regulären n-Ecke mit demselben k zu A_1, A_{1+k}, $A_{1+(n-2)k}$, $A_{1+(n-1)k}$ und folglich auch unter einander projectivisch verwandt. Verschiedenen k entsprechen dagegen verschiedene cyklische Folgen von $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$ und daher [s. Art. 6 und 14] nicht projective reguläre n-Ecke.

Die Construction einer cyklisch-projectivischen Gruppe ist dadurch auf die Winkel- oder Kreistheilung zurückgeführt. Alle cyklisch-projectivischen Gruppen von n Elementen sind mit der Gruppe der Theilungspunkte für die n-Theilung eines beliebigen Kreises und folglich auch unter einander projectivisch verwandt. Die Kreistheilungsgruppe kann daher als Typus für alle n-elementigen Gruppen betrachtet werden. Die regulären Polygone, die sich aus den n Theilungspunkten bilden lassen, treten dann als Typen der einzelnen cyklisch-projectivischen Folgen auf. Die cyklische Folge wird bei gegebenem Drehungssinne durch die Polygonseiten eindeutig bestimmt.

23. Der cyklischen Involution C_n entspricht die Schaar der sämmtlichen n-Theilungsgruppen von K. Jede C_n kann demnach in eine solche Schaar und folglich auch in jede andere C'_n projectivisch transformirt werden. Zur Fixirung einer solchen Transformation genügt es, einer Gruppe $(1, 1+k, \ldots 1+(n-1)k$ von C_n irgend einer Gruppe $(1', (1+k)', \ldots 1+(n-1)k)')$ von C'_n vermittelst der Projectivität $R^{(i)}$:

$$\big(1, 1+k, \ldots 1+(n-1)k\big) \barwedge \big((1+ik)', (1+(i+1)k)', \ldots (1+(i+n-1)k)' \qquad (33)$$

oder der Projectivität $S^{(i)}$:

$$\big(1, 1+k, \ldots 1+(n-1)k\big) \barwedge \big((1+ik)', (1+(i-1)k)', \ldots (1+(i+1)k)'\big) \qquad (34)$$

zuzuweisen.

Man erhält ein einstufiges System von R- und von S-Transformationen. Unter Zuziehung einer weiteren Gruppe $\big(1_1, (1+k)_1, \ldots (1+(n-1)k)_1\big)$ von C_n und Construction ihrer entsprechenden in C'_n wird nun hier so wie in den Art. 15 und 16 gezeigt, dass sowohl die n $R^{(i)}$ in (33) als auch die n $S^{(i)}$ in (34) associirt sind, d. h. dass sie jede Gruppe von C_n in dieselbe zweite Gruppe von C'_n überführen.

24. Durch die Abbildung auf K werden auch die projectivischen „Umformungen in sich" für eine Gruppe und für die cyklische Involution veranschaulicht.

Die T-Transformationen stellen sich als Congruenzen dar:

$$(a_1, a_{1+k}, \ldots a_{1+(n-1)k}) \overline{\wedge} (b_{1+ik}, b_{1+(i+1)k}, \ldots b_{1+(i+n-1)k}), \qquad (35)$$

da die Bogen $\widehat{a_1 b_{1+ik}}$, $\widehat{a_{1+k} b_{1+(i+1)k}}, \ldots$ unter einander gleich sind. Sehnen, die homologe Punkte verbinden, tangiren einen mit K concentrischen Kreis. Die Involution harmonisch conjugirter Punkte (a_j, a'_j) hat den Kreismittelpunkt c zum Centrum.

Eine Jede J-Transformation ist hier eine Symmetrie:

$$(a_1, a_{1+k}, \ldots a_{1+(n-1)k}) \overline{\overline{\wedge}} (b_{1+ik}, b_{1+(i-1)k}, \ldots b_{1+(i+1)k}) \qquad (36)$$

und führt zu einer Schaar paralleler Sehnen. Die Centra aller J befinden sich auf der unendlich fernen Geraden w. Für n associirte $J^{(j)}$ erhält man diese Centra u_j durch Projection der n Ecken des einen der zwei Polygone (36) aus irgend einer Ecke des andern. Sie bilden demzufolge auf w eine von dem Typus der Polygone [von k] unabhängige cyklisch-projectivische Gruppe. Nimmt man die Projection aus einem auf K fortrückenden Punkte vor oder projicirt alle Polygonecken der Schaar aus einem festen Punkte von K, so erhält man auf w eine cyklische Involution O_n. Die zugehörige Involution harmonisch conjugirter Punkte (u_j, u'_j) ergibt sich als Projection von (a_j, a'_j). Diese beiden Involutionen können also durch dieselbe Rechtwinkel-Involution auf w und K ausgeschnitten werden.

25. Der Lüroth'sche Hauptsatz, dass eine „ordentliche" cyclisch-projective Gruppe $(1, 2, \ldots n-1, n)$ durch Angabe von drei auf einander folgenden Punkten 1, 2, 3 völlig bestimmt ist, ergibt sich nun aus Art. 22 ohne weiters. Zur Vervollständigung der Gruppe hat man 1, 2, 3 als die projectiv entsprechenden Elemente von drei auf einander folgenden Ecken a_1, a_2, a_3 des gewöhnlichen regulären n-Ecks aufzufassen und in dieser Projectivität zu $a_4, a_5 \ldots a_n$ die zugehörigen Elemente $4, 5, \ldots n$ zu

ermitteln. Ersichtlich ist hieraus, dass dieser Satz auch für die anderen cyklischen Folgen gilt und dass an Stelle der drei aufeinander folgenden Elemente drei beliebige, mit Stellenzeigern i, k, l versehene, gesetzt werden können.

VII.

Stellung der Klein-Lüroth'schen Interpretation des Imaginären zur Staudt'schen.

26. Die Ordnungspunkte der Involution (i, i') sind nach Art. 13 imaginär. In Staudt'schem Sinne entspricht dem einen die „+“, dem andern die „—“ Richtung der Geraden G. Sind j, j'; l, l' zwei Paare von (i, i'), so ist die „+“ Richtung nach Art. 4 etwa durch die Folge j, l, j', l', die „—“ durch die inverse Folge j', l, j, l' bestimmt. Nach Art. 17 wird (i, i') durch jede T ohne Änderung des Sinnes in sich transformirt. Eine T führt also j, l, j', l' und j', l, j, l' in äquivalente Darstellungen über, nämlich in $(j+i)$, $(l+i)$, $(j+i)'$, $(l+i)'$ und $(j+i)'$, $(l+i)$, $(j+i)$, $(l+i)'$. Alle T haben sonach mit (i, i') die Ordnungspunkte gemeinschaftlich, insbesondere alle cyklischen T. In Folge dessen kann man anstatt (i, i') irgend eine der cyklischen Projectivitäten T zur Festlegung der imaginären Ordnungspunkte benützen. Als Repräsentation genügt eine Gruppe der Projectivität. Der „+“ Sinn $(1, 2, \ldots n-1, n)$ derselben, der sich mit j, l, j', l' und mit der „+“ Richtung von G deckt, stellt den einen, der „—“ Sinn $(1, n, \ldots 3, 2)$ den andern Ordnungspunkt vor. In der That bleiben beide Sinne bei allen T [s. Art. 17] erhalten. Eine Involution J vertauscht dagegen gleichzeitig die „+“ Richtung von G mit der „—“, die Darstellung j, l, j', l' mit einer zu j', l, j, l' äquivalenten, endlich den Sinn $(1, 2, \ldots n-1, n)$ mit dem inversen $(1, n, \ldots 3, 2)$.

Damit ist die Stellung der Klein-Lüroth'schen Interpretation des Imaginären zur Staudt'schen charakterisirt. Der ersteren entspricht die ganze Schaar cyklischer Projectivitäten, der letzteren die allen diesen Projectivitäten zugeordnete Involution harmonisch conjugirter Punkte. Diese ist kein Specialfall jener, sondern wird erst unter einer besonderen Annahme zu einem solchen, dann nämlich, wenn j, j' durch l, l' harmonisch getrennt werden. Man hat dann die harmonische Darstellung von Staudt, und diese erhält man aus der Klein-Lüroth'schen, indem man $n = 4$ setzt.

Wie bei der Staudt'schen, so hat man auch bei der Klein-Lüroth'schen Interpretation unendlich viele äquivalente Darstellungen; denn die Gruppe $(1, 2, \ldots n—1, n)$ kann einerseits durch jede mit ihr zur selben cyklischen Involution gehörige Gruppe ersetzt werden, anderseits durch jede in ihr enthaltene oder sie enthaltende Gruppe.

27. Eine allgemeinere Darstellung als die Klein-Lüroth'sche erhält man, wenn man von einer nicht cyklischen Projectivität T ausgeht. Eine solche führt zu unendlich vielen unbeschränkten cyklischen Reihen, von denen jede, im „+“ Sinne beschrieben, den einen, im „—“ Sinne beschrieben, den andern Ordnungspunkt liefert. Wie man eine derartige Darstellung für einen im Staudt'schen oder Klein-Lüroth'schen Sinne gegebenen imaginären Punkt herstellen kann, ist nach dem Vorstehenden klar: Es muss T dem durch die entsprechende cyklische Projectivität, oder die entsprechende Involution harmonisch conjugirter Punkte festgelegten Büschel von Projectivitäten entnommen werden. Es mag nur noch angedeutet werden, wie man direct eine derartige cyklische Reihe herstellen kann. Man wählt auf G drei Punkte, nennt sie in „+“ natürlicher Folge 1, 2, 3 und fixirt den zu 2 bezüglich 1 und 3 harmonisch liegenden Punkt 2'. Wird nun irgend ein innerhalb der Strecke $+\overline{2'1}$ befindlicher Punkt mit 4 bezeichnet, so ist $(1, \dot{2}, 3) \,\overline{\wedge}\, (2, 3, 4)$ eine Projectivität mit imaginären Ordnungspunkten. Sie führt, auf 4 angewendet, zu 5, hierauf angewendet, zu 6 u. s. f.

Aus dieser Projectivität lässt sich nun, so wie aus einer cyklischen, ein Büschel von Projectivitäten ableiten, das cyklische Projectivitäten jeder Periode und eine Involution harmonisch conjugirter Punkte enthält.

28. Denkt man sich zwei conjugirt imaginäre Punkte auf jede dieser drei Arten interpretirt, d. h. durch eine elliptische Involution, durch eine cyklisch-projectivische Gruppe und durch eine cyklisch-projective Reihe, und projicirt man dann diese Gebilde aus demselben Punkte s [s. Art. 21], so erhält man eine

Rechtwinkel-Involution, ferner n Strahlen von der in Art. 21 besprochenen Art, endlich ein Büschel, das durch Rotation eines unveränderlichen Winkels um seinen Scheitel entsteht. Dies alles sind nun bloss der Form nach verschiedene Darstellungen der imaginären Kreispunkte. Die obigen Darstellungen conjugirt imaginärer Punkte beruhen somit auf der Möglichkeit, derartige Punkte als Projectionen der imaginären Kreispunkte herzustellen, und die verschiedenen Interpretationen sind einzig und allein ermöglicht und bedingt durch die verschiedenen Bestimmungsarten der Kreispunkte.