Zum Normalenproblem der Ellipse

von

Carl Lauermann,

Lehrer an der Bürgerschule in Grulich.

(Mit 1 Tafel.)

Herr Professor Pelz hat in der Abhandlung „Zum Normalenproblem der Ellipse" (Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch., Jahrg. 1887) auf zwei mit den Axen der Ellipse gleiche Winkel einschliessende Diameter aufmerksam gemacht, von deren Punkten aus, nur mit Zirkel und Lineal allein, die vier möglichen Normalen auf den genannten Kegelschnitt gefällt werden können.

Diese Durchmesser sind nun nicht die einzigen geometrischen Örter, für welche das Problem der Normalenconstruction in zwei lösbare quadratische Aufgaben zerfällt; es gibt deren vielmehr sehr viele, die sich alle, wie aus der nachfolgenden Betrachtung hervorgeht, in einer bestimmten Gleichungsform vereinigen lassen und aus derselben durch entsprechende Substitution abgeleitet werden können.

Insbesondere bieten zwei Kreise, deren Mittelpunkte auf der grossen Axe der Ellipse liegen und welche den Halbmesser c gleich der Excentricität der Ellipse haben, ein Interesse, da von den Punkten derselben, mit gleicher Einfachheit wie bei den Pelz'schen Geraden, die Normalenconstruction ausgeführt werden kann.

Versteht man unter g, h die Coordinaten irgend eines Punktes P in der Ebene der Ellipse

$$E = b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = 0,$$

dann bestimmt bekanntlich die Gleichung

$$H = a^2 g\eta - b^2 h\xi - c^2 \xi\eta = 0,$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$

den Kegelschnitt (apollonische Hyperbel), dessen Schnittpunkte I, II, III, IV mit E die Fusspunkte der von P auf die Ellipse gefällten Normalen sind.

Betrachten wir die Ellipse E als affin entsprechend dem mit der Summe der Halbaxen $a + b$ als Halbmesser beschriebenen Kreis

$$K = x^2 + y^2 - (a + b)^2 = 0,$$

dann entspricht auch der gleichseitigen Hyperbel H wieder eine gleichseitige Hyperbel H', deren Gleichung

$$H' = agy - bhx - (a - b)\, xy = 0$$

erhalten wird, wenn wir in H die lineare Substitution

$$\xi = \frac{a}{a + b}\, x, \quad \eta = \frac{b}{a + b}\, y$$

zur Ausführung bringen.

Nun sind K und H' die das Normalenproblem lösenden Kegelschnitte. Da aber, wie sofort gezeigt werden soll, die Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 derselben ebenfalls Punkte der von P auf die Ellipse gefällten Normalen sind, so hat das vorliegende Problem durch diese Transformation an Einfachheit wesentlich gewonnen.

Durch eine kleine Umformung geben wir der Gleichung H' die Gestalt

$$(y - h)\, bx - (x - g)\, ay = 0$$

und erkennen, dass die Verbindungsgerade des Normalenausgangspunktes P mit einem beliebigen Punkte der Hyperbel H', einen Winkel w mit der Hauptaxe einschliesst, dessen

$$\operatorname{tang} w = \frac{ay}{bx}$$

ist. Für die Schnittpunkte von H' mit K ist jedoch

$$\operatorname{tang} w = \frac{a^2\eta}{b^2\xi},$$

wie man sich durch Einführung der Werthe x und y aus den Substitutionsgleichungen überzeugen kann, womit bewiesen erscheint, dass die von P zu den Punkten 1, 2, 3, 4 gezogenen Geraden Normalen der Ellipse E sind.

Soll das Normalenproblem der Ellipse mit Zirkel und Lineal allein sich lösen lassen, dann muss es möglich sein, die gleichseitige Hyperbel H' durch ein construirbares Geradenpaar zu ersetzen, welches die Schnittpunkte von K und H' miteinander verbindet.

Angenommen, es wäre k jener veränderliche Parameter, für welchen die Curve des Kegelschnittsystems

$$R = x^2 + y^2 - (a+b)^2 + 2k\left(xy + \frac{bh}{a-b}\,x - \frac{ag}{a-b}\,y\right) = 0$$

in zwei gerade Linien degenerirt.

In diesem Falle muss k eine Wurzel der aus der verschwindenden Discriminante von R hervorgehenden cubischen Gleichung sein. Substituiren wir also in R für x und y, respective $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ und bringen auf diese Weise die Gleichung des Kegelschnittbüschels R in die homogene Form

$$R' = x^2 + y^2 - (a+b)^2 z^2 + 2k\left(xy + \frac{bh}{a-b}\,xz - \frac{ag}{a-b}\,yz\right) = 0,$$

so ergeben sich durch partielle Differentiation nach den Veränderlichen x, y, z drei lineare Gleichungen

$$\frac{\delta R'}{\delta x} = x + ky + k\,\frac{bh}{a-b}\,z = 0,$$

$$\frac{\delta R'}{\delta y} = kx + y - k\,\frac{ag}{a-b}\,z = 0,$$

$$\frac{\delta R'}{\delta z} = k\,\frac{bh}{a-b}\,x - k\,\frac{ag}{a-b}\,y - (a+b)^2 z = 0,$$

deren gleichzeitiges Bestehen an das Verschwinden ihrer Resultante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & k, & k\dfrac{bh}{a-b} \\ k, & 1, & -k\dfrac{ag}{a-b} \\ k\dfrac{bh}{a-b}, & -k\dfrac{ag}{a-b}, & -(a+b)^2 \end{vmatrix} = 0$$

gebunden ist.

Diese Resultante ist aber die Discriminante des erwähnten Systems und liefert, ausgerechnet, eine in k cubische Gleichung

$$\Delta = 2\,abgh\,k^3 + (a^2g^2 + b^2h^2 - c^4)k^2 + c^4 = 0.$$

Mit Rücksicht auf die bekannten Eigenschaften der Gleichungen dritten Grades führen die bisher angestellten Betrachtungen zu folgendem Resultate:

Für alle Werthe von g und h, d. h. Lagen des Punktes P in die Ebene der Ellipse E, für welche eine Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta = 0$ in rationaler Form oder in der Gestalt von Quadratwurzeln dargestellt werden kann, ist die Normalenconstruction bei der Ellipse mit Zirkel und Lineal allein durchführbar.

II.

Vorerst ist zu ersehen, dass jeder den Bedingungen des soeben ausgesprochenen Resultates genügende Werth von k, in $\Delta = 0$ substituirt, die Gleichung eines geometrischen Ortes liefert von der Eigenschaft, dass für jeden Punkt desselben das Problem der Normalenconstruction in zwei quadratische Aufgaben zerfällt. Wir wollen auf eine allgemeine Untersuchung dieser geometrischen Örter hier nicht eingehen und begnügen uns, zwei Fälle besonders hervorzuheben.

Für $k = \pm 1$ [1] verwandelt sich die Gleichung $\Delta = 0$ in ein vollständiges Quadrat

$$(ag \pm bh)^2 = 0$$

---

[1] Es ist

$$\frac{\partial \Delta}{\partial g} = 2a^2k^2g + 2ab\,k^3h = 0,$$

und zeigt, dass zwei durch den Mittelpunkt der Ellipse gehende und auf den gleichen conjugirten Durchmessern derselben normal stehende gerade Linien

$$L = ag + bh = 0$$

und

$$L' = ag - bh = 0$$

existiren, von deren Punkten aus die Normalenconstruction mit Zirkel und Lineal allein ausgeführt werden kann. Es sind dies die von Herrn Professor Pelz in seiner eingangs citirten Abhandlung erkannten Diameter der Ellipse.

Im zweiten Falle fragen wir uns nach jenen Werthen des k, für welche die Gleichung $\Delta = 0$, die in Bezug auf die Veränderlichen g und h vom zweiten Grade ist, die Form einer Kreisgleichung annimmt.

Ist m ein vorläufig noch näher zu bestimmender, von g und h jedoch unabhängiger Factor, dann lässt die Substitution $k = \frac{m}{h}$ [1] den Grad der Gleichung unverändert, bewirkt jedoch das Verschwinden des Productes gh, einer für den Kreis nothwendigen Bedingung.

Wir erhalten

$$2abm^3g + (a^2g^2 + b^2h^2 - c^4)m^2 + c^4h^2 = 0$$

und weiter, da die Coefficienten der höchsten Potenzen gleiche Werthe haben müssen, wenn die vorliegende Gleichung einem Kreise angehören soll,

$$m^2a^2 = m^2b^2 + c^4$$

und

$$m = \pm c.$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial h} = 2abk^3g + 2b^2k^2h = 0$$

und daraus

$$\begin{vmatrix} 1, & k \\ k, & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } k = \pm 1.$$

[1] Die Substitution $k = \frac{m}{g}$ führt zu imaginären Kreisen.

Hiermit ist bewiesen:

Von allen Punkten der durch die Gleichung

$$T = \left(g \pm \frac{bc}{a}\right)^2 + h^2 - c^2 = 0$$

dargestellten zwei Kreise lassen sich, ohne dass die Ellipse gezeichnet vorliegt, nur mit Zirkel und Lineal allein, die vier möglichen Normalen auf den genannten Kegelschnitt fällen.

III.

Wir gehen nun zu dem constructiven Theil dieser Arbeit über und stellen folgende Betrachtungen an. Ist k eine Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta = 0$, dann muss sich

$$R = x^2 + y^2 - (a+b)^2 + 2k\left(xy + \frac{bh}{a-b}x - \frac{ag}{a-b}y\right) = 0$$

als das Product zweier linearer Factoren, nämlich der Gleichungen des Geradenpaares darstellen lassen, welches die gemeinschaftlichen Punkte 1, 2, 3, 4 der Kegelschnitte K und H' miteinander verbindet.

Setzen wir in R abwechselnd x und y gleich Null, so bestimmen die Wurzeln der beiden auf diese Art gewonnenen quadratischen Gleichungen

$$\text{I)} \qquad y^2 - 2k\frac{ag}{a-b}y - (a+b)^2 = 0$$

und

$$\text{II)} \qquad x^2 + 2k\frac{bh}{a-b}x - (a+b)^2 = 0$$

die Abschnitte des bewussten Geradenpaares auf den Axen der Ellipse E.

Die ganz gleichen Stücke schneidet aber auch der Kreis K_1, dessen Gleichung

$$K_1 = x^2 + y^2 + 2k\frac{bh}{a-b}x - 2k\frac{ag}{a-b}y - (a+b)^2 = 0$$

durch leichtverständliche Combination der Formen I und II gewonnen werden kann, von den Axen ab, und bildet somit ein bequemes und elegantes Hilfsmittel zur Construction der beiden Geraden.

Vor allem ist zu ersehen, dass die Mittelpunktssehne S der Ellipse, deren Gleichung

$$S = agy - bhx = 0$$

ist, mit dem Kreise

$$K = x^2 + y^2 - (a + b)^2 = 0$$

zwei Punkte s und s' gemeinschaftlich hat, welche auch dem Kreise K_1 angehören; und dass in Folge dessen auf der durch das Centrum 0 der Ellipse gehenden und zu S normal stehenden Geraden G der Mittelpunkt V des Kreises K_1 sich befinden muss.

Angenommen, der Winkel, den die Gerade oP mit der grossen Axe der Ellipse bildet, wäre φ. Dann lässt sich die Gleichung der Sehne S auch in der Form

$$S = a \cos \varphi y - b \sin \varphi x = 0$$

oder, da $a \cos \varphi$ und $b \sin \varphi$ Coordinaten eines Ellipsenpunktes r (x', y') sind,

$$S = x' y - y' x = 0$$

schreiben.

Die Sehne S erscheint somit als die Verbindungsgerade des Ellipsenmittelpunktes 0 mit dem Curvenpunkte r, welch' letzterer aus seinem excentrischen Winkel φ leicht bestimmbar ist.

Die Bedingungen zur Construction einer zweiten den Mittelpunkt des Kreises K_1 enthaltenden Geraden G_1 erschliessen wir aus den Coordinaten x_0, y_0 des Mittelpunktes selbst.

Dieselben, in bekannter Weise gefunden, haben die Form

$$x_0 = -k \frac{bh}{a - b}, \; y_0 = k \frac{ag}{a - b}.$$

Indem wir durch h, respective g, dividiren und nachher addiren, ergibt sich

$$G_1 = \frac{x_0}{h} + \frac{y_0}{g} - k = 0,$$

die Gleichung einer Geraden, welche auf den Axen die Stücke hk und gk abschneidet und demnach leicht gefunden werden kann.

Was nun die Normalenfusspunkte I, II, III, IV anbelangt, so können wir zur Bestimmung derselben entweder ihre excentrischen Winkel, welche durch die den Kegelschnitten K und H' gemeinschaftlichen Punkte 1, 2, 3, 4 gegeben sind, benützen, oder auch in folgender Weise verfahren.

Bilden wir nämlich aus den schon früher verwendeten Substitutionsgleichungen

$$\xi = \frac{a}{a+b}x, \quad \eta = \frac{b}{a+b}y,$$

in welchen x, y die Coordinatensymbole der Punkte 1, 2, 3, 4 und ξ, η jene der Fusspunkte I, II, III, IV bedeuten, durch Addition die neue Form

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} - 1 = 0,$$

so ist aus derselben zu erkennen, dass die Verbindungsgeraden der Axenprojectionen der Normalenpunkte 1, 2, 3, 4 die ihnen entsprechenden Normalen in ihren Fusspunkten I, II, III, IV schneiden.

1. Eine Ellipse E (siehe Fig. 1) ist durch ihre Axen aa_1 bb_1 gegeben; von dem Punkte P, der auf dem Durchmesser oP senkrecht zu a_1b liegt, sollen die Normalen auf die Ellipse gefällt werden.

Hier ist $k = 1$ und die Gerade G halbirt den Winkel zwischen den Axen.

Der Mittelpunkt v des Kreises K_1 ergibt sich als Schnitt von G mit der Geraden

$$G_1 = \frac{x}{h} + \frac{y}{g} - 1 = 0,$$

welche, wie ihre Gleichung darlegt, von den Axen die Stücke h und g abschneidet.

2. Eine Ellipse E (siehe Fig. 2) ist durch ihre Axen aa_1 bb_1 gegeben; man construire von dem Punkte P die vier möglichen Normalen an dieselbe.

Der Punkt P liegt auf dem mit dem Halbmesser c gleich der Excentricität der Ellipse beschriebenen Kreise T, dessen Mittelpunkt O_1 um das Stück $oo_1 = -\frac{bc}{a}$ von o absteht.

Wir machen $om = b$, der halben kleinen, $on = a$, der halben grossen Axe der Ellipse, ziehen von m und n zu den Axen Parallele und erhalten den Curvenpunkt r.

Der Mittelpunkt des Kreises K_1 ergibt sich als Schnitt der zu dem Durchmesser or normal stehenden Geraden ov (G) mit der Geraden

$$G_1 = y + \frac{g}{h}(-x + c) = 0,$$

welche, wie aus ihrer Gleichung erschlossen werden kann, durch den positiven Brennpunkt t von E geht und auf oP senkrecht steht.

Ausserdem sei noch bemerkt, dass t auch ein Punkt des Kreises K_1 ist.

Ich behalte mir vor, zu zeigen, dass auch bei der Hyperbel ähnliche Beziehungen sich aufstellen lassen; dass insbesondere bei diesem Kegelschnitt zwei zur Hauptaxe parallele gerade Linien nachgewiesen werden können, von deren Punkten aus die Normalenconstruction mit Zirkel und Lineal allein durchgeführt werden kann.

Fig. 1.

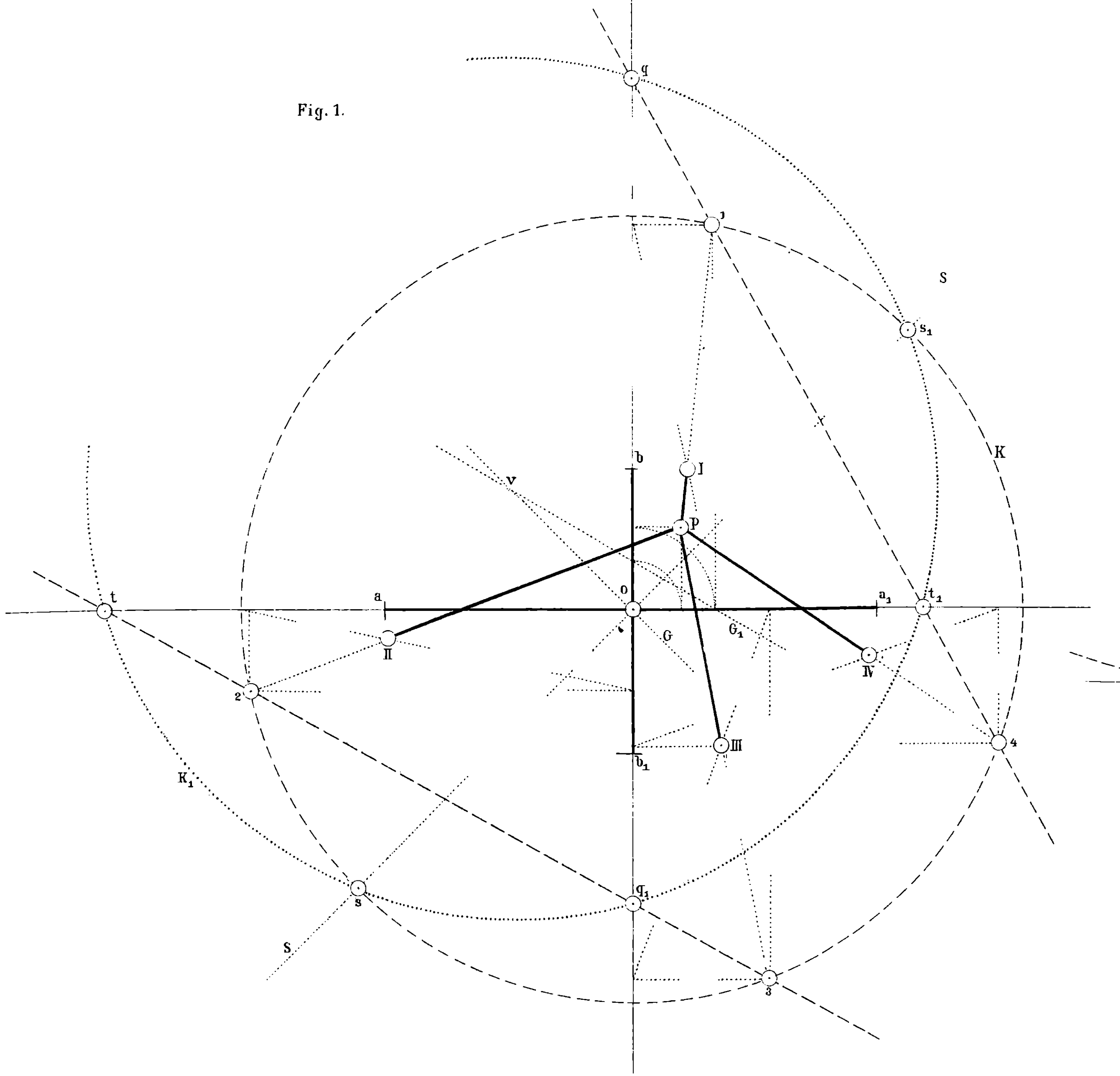
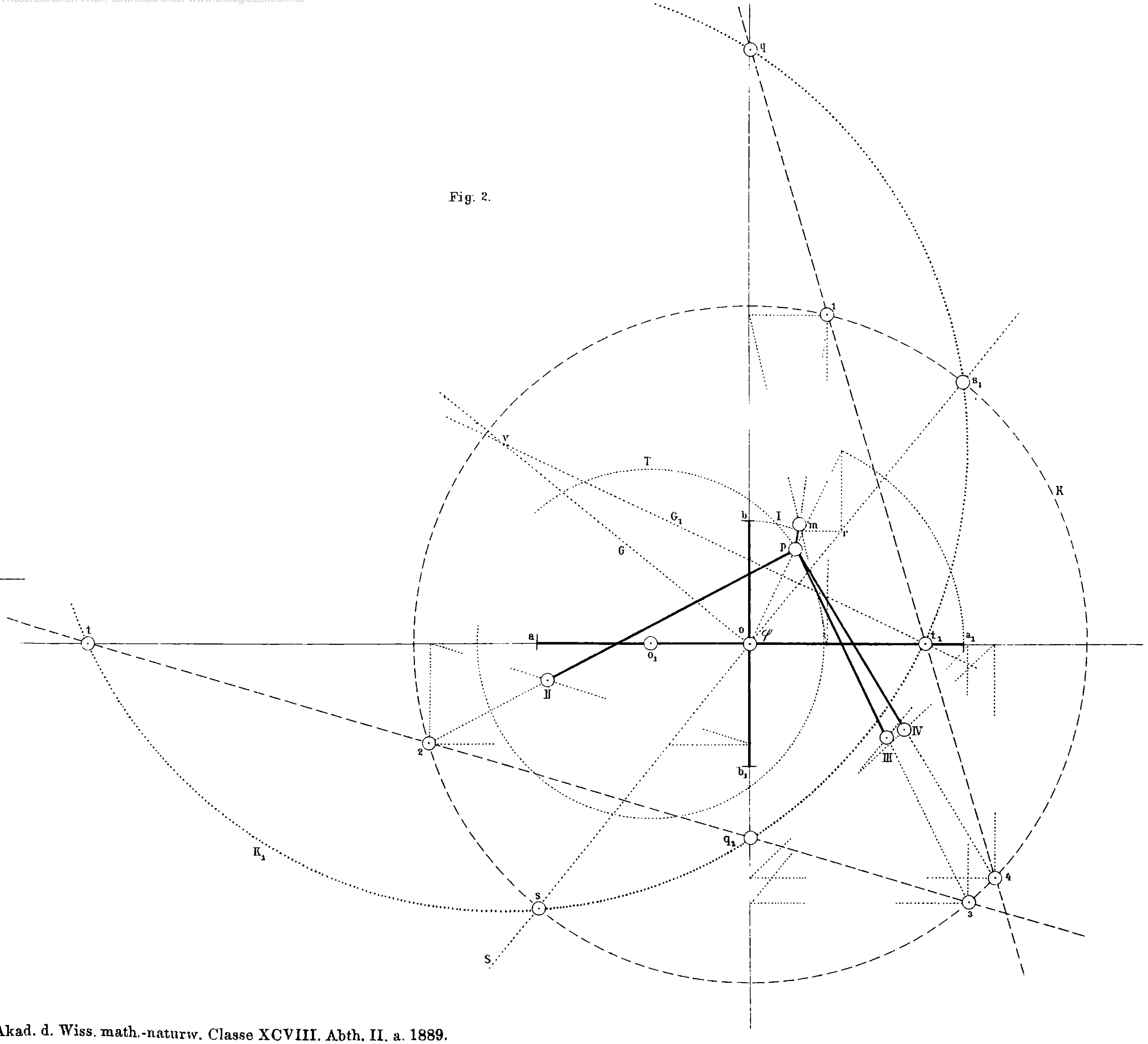


Fig. 2.



Lith. Anst. J. Barth, Wien, Fünfhaus.

Fig. 1.

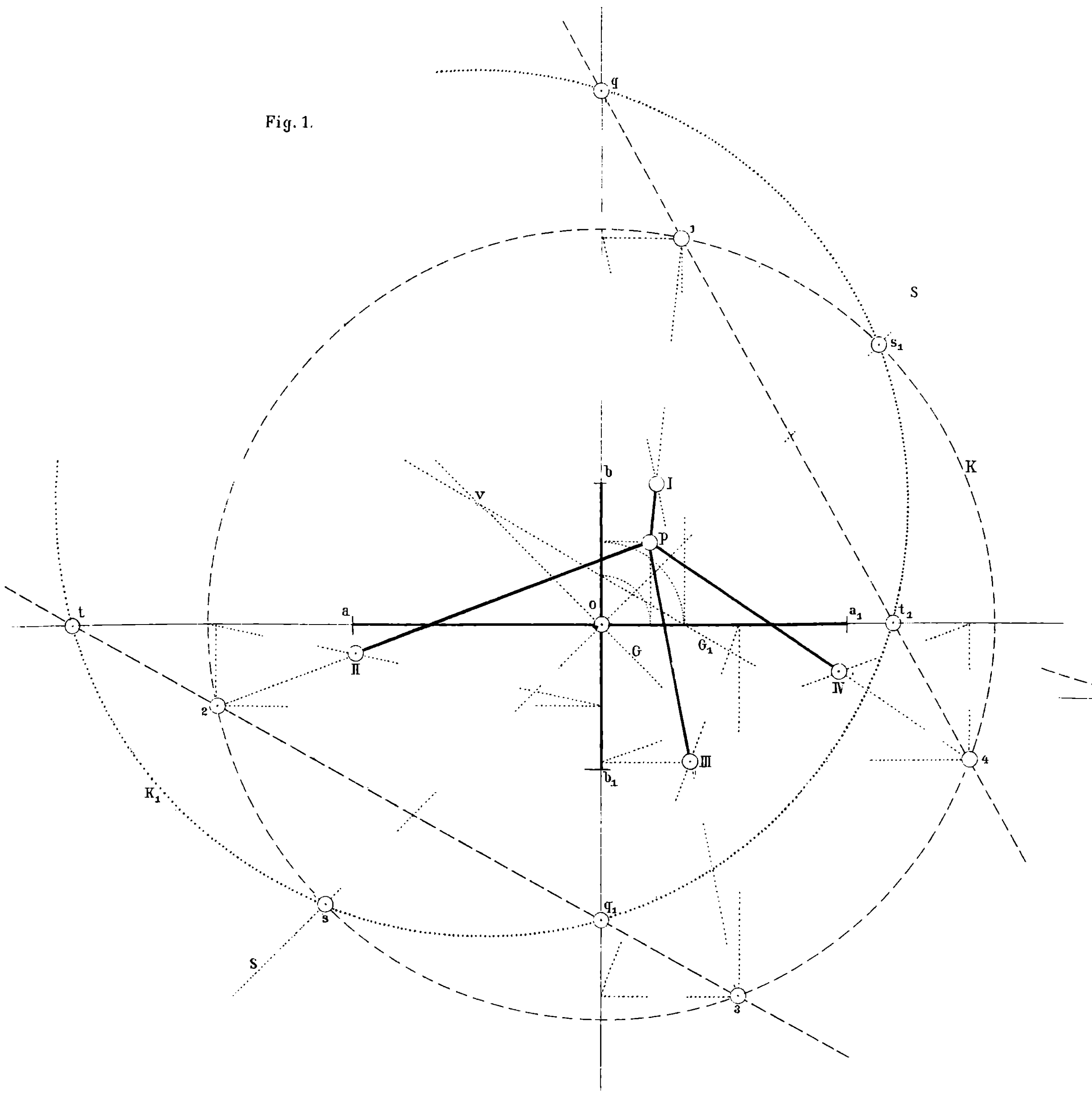
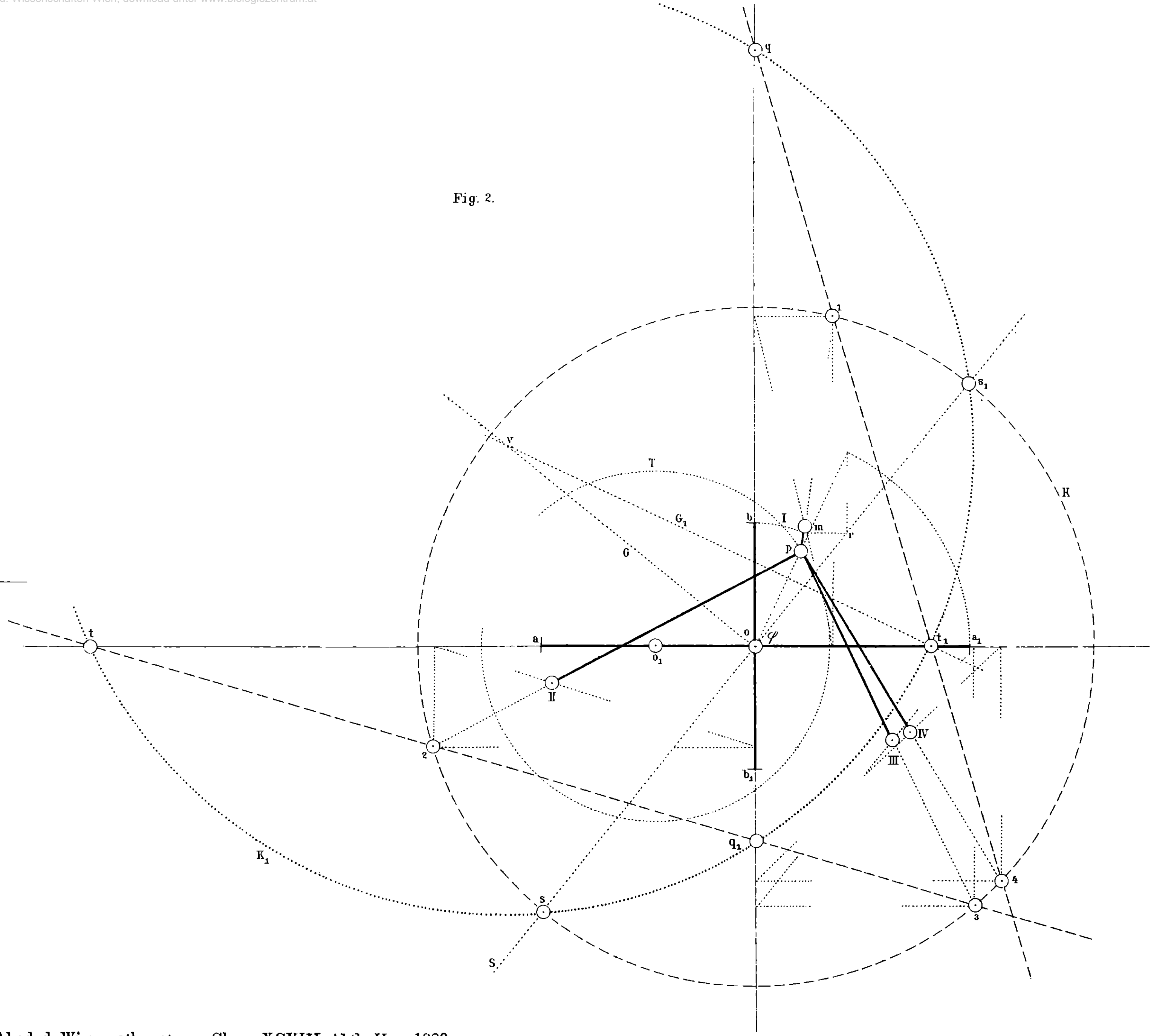


Fig. 2.



Lith. Anst. J. Barth, Wien, Fünfhaus.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: 98_2a

Autor(en)/Author(s): Lauermann Carl

Artikel/Article: Zum Normalenproblem der Ellipse 318-326