

# Über die Lemniscatentheilung

von

Emil Kohl,

*Lehramtsandidat für Mittelschulen.*

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Jänner 1889.)

Abel hat in seiner berühmten Abhandlung<sup>1</sup> über die durch Umkehrung aus den elliptischen Integralen hervorgehenden Functionen als specielle Anwendung seiner Entwicklungen die Theilung der Lemniscate untersucht, und spricht folgenden Satz aus:

Die Theilung des Lemniscatenumfanges ist stets mit Zirkel und Lineal allein durchführbar, wenn die Anzahl der Theile eine Primzahl von der Gestalt  $1 + 2^n$  ist.

Wie man leicht erkennt, haben diese Zahlen mit Ausschluss von 3 die Form  $1 + 2^{2^v}$ , wo  $v$  eine ganze positive Zahl bedeutet. Das Abel'sche Verfahren beruht im Wesentlichen darauf, den Radiusvector eines Curvenpunktes als elliptische Function des entsprechenden Bogens darzustellen und, um die Länge des Radiusvectors eines Theilungspunktes zu erhalten, die dazu gehörige Bogenlänge in zwei conjugirt-complexe Summanden zu zerlegen und sodann den zu dieser Bogenlänge als Argumente gehörigen Functionswerth nach dem Additionstheorem der betrachteten Function aus den beiden Functionswerthen zu berechnen, deren Argumente die erwähnten Summanden sind.

Im Anschlusse an den von Abel eingeschlagenen Gang der Rechnung hat Wichert<sup>2</sup> die Fünf- und Siebzehntheilung

<sup>1</sup> Oeuvres complètes, tome I, Recherches sur les fonctions elliptiques.

<sup>2</sup> Die Fünf- und Siebzehntheilung der Lemniscate. Programm des Conitzer Gymnasiums. (1846.)

behandelt; die vollständigste Durchführung der Siebzehntheilung jedoch hat Kiepert<sup>1</sup> gegeben. Kiepert wendet im Principe die Abelsche Methode an, führt aber eine grosse Vereinfachung der Rechnung dadurch ein, dass er sowohl die Gleichung für die Längen der Radienvectoren der Theilungspunkte durch eine sehr einfache Betrachtung ableitet, als auch die Lösung derselben durch eine elegante Benützung der rationalen Relationen zwischen den Wurzeln derselben bewerkstelligt.

In vorliegender Arbeit soll nun die von Kiepert für den speciellen Fall der Siebzehntheilung angedeutete Methode der Bestimmung der erwähnten Gleichung auf die Behandlung aller Abelschen Fälle ausgedehnt, und auf Grund derselben die Fünf- und Siebzehntheilung durchgeführt werden; im Anschlusse daran wird die Sechs- und mithin auch die Dreitheilung gelöst. Hierbei erwies sich die Anwendung der Weierstrass'schen Theorie der doppelt-periodischen Functionen von Vortheil, wodurch es auch möglich wurde, die Ausdrücke für die gesuchten Längen der Radienvectoren der Theilungspunkte direct ohne Einführung von Hilfsgrössen zu erhalten.

#### A. Aufstellung der Function für den Radiusvector eines beliebigen Curvenpunktes und Ableitung ihrer wichtigsten Eigenschaften.

Wird die Gleichung der Lemniscate in der Form

$$r^2 = \cos 2\varphi$$

geschrieben, so ergibt sich als Länge des Bogens zwischen dem Doppelpunkte und einem beliebigen Curvenpunkte mit dem Radiusvector  $r$

$$s = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}, \quad \dots 1)$$

---

<sup>1</sup> Die Siebzehntheilung des Lemniscatenumfanges durch alleinige Anwendung von Zirkel und Lineal. Crellé'sches Journal für reine und angewandte Mathematik, 75. Band.

oder, wenn

$$r = \pm \frac{1}{\sqrt{p}}$$

gesetzt wird,

$$s = \int_{\infty}^{\frac{1}{\sqrt{p}}} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - 4p}}. \quad \dots 2)$$

Wenn nun eine Function  $p(u)$  durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dp(u)}{du}\right)^2 = 4p(u)^3 - 4p(u) \quad \dots 3)$$

definiert wird, so erkennt man unmittelbar, dass sich der reciproke Werth aus der Wurzel eines beliebigen Functionswerthes  $p(u_0)$  geometrisch als die Länge des Radiusvectors jenes Lemniscatenpunktes deuten lässt, dem der zugehörige Argumentswerth  $u_0$  als Bogenlänge vom Doppelpunkte an gezählt, entspricht.

Was die primitiven Halbperioden der vorliegenden  $p$ -Function betrifft, so nehmen dieselben, da die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$4p^3 - 4p = 0, \\ e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -1$$

sind, die Form an: <sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}, \\ \omega' &= \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)}} = i \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}; \end{aligned} \right\} \dots 4)$$

Diese Ausdrücke verwandeln sich, wenn  $t = \sqrt{1-r^2}$  gesetzt wird, in die folgenden:

<sup>1</sup> Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, herausgegeben von H. A. Schwarz, S. 31.

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}, \\ \omega' &= i \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = i\omega. \end{aligned} \right\} \dots 5)$$

Es lässt sich somit der Satz aussprechen:

- I. Die beiden primitiven Perioden der betrachteten  $p$ -Function sind

$$2\omega = 2S, \quad 2\omega' = 2iS = 2i\omega,$$

wobei  $S$  den Werth des Lemniscatenquadranten als Zahl betrachtet bedeutet.

Die  $p$ -Function wird in der Umgebung der Nullstelle durch die Potenzreihe

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots c_\lambda u^{2\lambda-2} + \dots \quad \dots 6)$$

dargestellt, <sup>1</sup> deren Coëfficienten durch die Recursionsformel

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \sum_{\nu=2}^{\lambda-2} c_\nu c_{\lambda-\nu}, \quad \lambda > 3 \quad 7)$$

aus

$$c_2 = \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} \quad \text{und} \quad c_3 = \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} = 0$$

abgeleitet werden können. Aus der Form der Reihe folgt

$$p(u) = p(-u). \quad \dots 8)$$

Da ferner nach 7) die einzelnen Coëfficienten als ganze Functionen der vorhergehenden gegeben erscheinen, so müssen dieselben sämmtlich reell und positiv sein, da  $c_2$  und  $c_3$  diese Eigenschaft besitzen.

Hieraus folgt:

- II. Für conjugirt-complexe Argumente werden die Functionswerthe selbst conjugirt-complex.

<sup>1</sup> Formeln und Lehrsätze etc. S. 11.

Eine weitere Eigenschaft ergibt sich durch Betrachtung der Coëfficienten von der Gestalt

$$c_{2n+1} = \frac{3}{(4n+3)(2n-2)} \sum_{\nu=2}^{2n-1} c_{\nu} c_{2n+1-\nu}, \quad n > 1.$$

Diese sind, wie leicht zu zeigen ist, sämmtlich = 0. Es gelte dieser Satz für alle Coëfficienten mit ungeradem Index von  $c_3$  bis  $c_{2n+1}$ ; dann ist

$$c_{2n+3} = \frac{3}{(4n+7)2n} \sum_{\nu=2}^{2n+1} c_{\nu} c_{2n+3-\nu};$$

da nun  $2n+3$  eine ungerade Zahl ist, so muss stets eine der Grössen  $c_{\nu}$  oder  $c_{2n+3-\nu}$  in Folge der gemachten Voraussetzung = 0 werden, der behauptete Satz gilt also auch für  $c_{2n+3}$ ; nun besteht er für  $c_3$ , also allgemein. Die Reihe für  $p(u)$  erscheint demnach in folgender Form:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_4 u^6 + \dots$$

daraus ergibt sich für beliebige Argumentswerthe  $u$ :

$$p(iu) = -p(u). \quad \dots 9)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich, weil alle Coëfficienten reell sind, der Satz ableiten:

III. Für reelle oder rein imaginäre Argumente ist der Functionswerth reell, und zwar für erstere positiv, für letztere negativ.

Die durchgeführten Untersuchungen gelten zunächst bloss für solche  $u$ , welche der Bedingung

$$|u| < 2\omega$$

genügen, jedoch lässt sich bekanntlich der Geltungsbereich der abgeleiteten Sätze auf die ganze Ebene ausdehnen.

Das Additionstheorem der vorliegenden  $p$ -Function nimmt, da

$$g_2 = 1, \quad g_3 = 0, \quad p'(u) = 2\sqrt{p(u)} \sqrt{p(u)^2 - 1}$$

ist, die Form an: <sup>1</sup>d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$p(u \pm v) = \frac{[p(u)p(v) + 1]^2}{[p(u)p(v) - 1][p(u) + p(v) \pm 2\sqrt{p(u)p(v)}\sqrt{p(u)^2p(v)^2 - [p(u) + p(v)]^2 + 1}].} \quad 10)$$

Daraus folgt:

$$p(2u) = \frac{[1 + p(u)^2]^2}{4p(u)[p(u)^2 - 1]}. \quad 11)$$

Wird in 10)  $v = iu$  gesetzt, so erhält man

$$p(u \pm iu) = \pm i \frac{p(u)^2 - 1}{2p(u)}. \quad \dots 12)$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass nur für Argumentswerthe von der Form

$$u \pm iu,$$

die Function rein imaginär wird; denn bildet man

$$p(u \pm iv),$$

so ersieht man, dass  $p(u \pm iv)$  nur dann imaginär wird, wenn entweder

$$p(u) - p(v) = 0 \text{ oder}$$

$$1 + p(u)p(v) = 0$$

ist. Im ersteren Falle ist  $u = \pm v$ , also die ausgesprochene Behauptung erwiesen, die zweite Annahme ist aber unzulässig, da  $p(u)$  und  $p(v)$  für reelle  $u$  und  $v$  wesentlich positiv sind.

Von besonderer Wichtigkeit für das Theilungsproblem ist der Fall, wenn  $u$  und  $v$  conjugirt-complexe Grössen sind, die mit  $w^+$  und  $w^-$  bezeichnet werden mögen. Die Formel 10) enthält nun  $p(w^+)$  und  $p(w^-)$ , welche nach dem III. Satze selbst conjugirt-complex sind, nur in den Verbindungen

$$p(w^+)p(w^-) \quad \text{und} \quad p(w^+) + p(w^-),$$

<sup>1</sup> Formeln und Lehrsätze etc. S. 14, 6).

welche daher beide reell sind; es ergibt sich dann:

$$p(w^+ + w^-) = \frac{[1 + p(w^+)p(w^-)]^2}{[p(w^+)p(w^-) - 1][p(w^+) + p(w^-)] + 2\sqrt{p(w^+)p(w^-)}\sqrt{[p(w^+)p(w^-) + 1]^2 - [p(w^+) + p(w^-)]^2}} \quad \dots 13)$$

**B. Ableitung der Gleichung für die Längen der Radienvectoren der Theilungspunkte bei den Abel'schen Fällen.**

Um den Umfang der Lemniscate in  $1 + 2^{2^v}$  Theile zu theilen, hat man die Bogenlänge für den  $x^{\text{ten}}$  Theilungspunkt vom Doppelpunkte an gezählt in der Gestalt

$$\frac{4x\omega}{1 + 2^{2^v}} = \frac{2x\omega}{1 + i2^{2^v-1}} + \frac{2x\omega}{1 - i2^{2^v-1}} \quad x = 1, 2, \dots, 2^{2^v})$$

darzustellen und die Länge des entsprechenden Radiusvectors

$$R = \pm \frac{1}{\sqrt{p\left(\frac{4x\omega}{1 + 2^{2^v}}\right)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{p\left(\frac{2x\omega}{1 + i2^{2^v-1}} + \frac{2x\omega}{1 - i2^{2^v-1}}\right)}}$$

nach der Formel 10) aus den Grössen  $p\left(\frac{2x\omega}{1 + i2^{2^v-1}}\right)$  zu berechnen, welche nach dem II. Satze conjugirt-complex sind. Ferner ist nach dem III. Satze ersichtlich, dass  $R$  nur reell oder imaginär, nicht aber complex sein kann.

Um nun die erwähnten Functionswerthe zu bestimmen, hat man eine definirende Eigenschaft derselben aufzusuchen, welche sie von allen Grössen ähnlicher Art unzweideutig unterscheidet und diese sodann durch eine Gleichung auszudrücken. Es ist daher vor Allem nothwendig, einige Sätze über diese Functionswerthe zu entwickeln.

Betrachtet man

$$p\left(\frac{2x\omega}{1 \pm i 2^{2^y-1}}\right),$$

worin  $x$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so lassen sich stets zwei ganze Zahlen  $n$  und  $x'$  so finden, dass

$$x = 2^{2^y} \cdot n + x'$$

wird und  $x' < 1 + 2^{2^y}$  und positiv ist; wird dieser Werth für  $x$  eingeführt, so ergibt sich

$$p\left(\frac{2x\omega}{1 \pm i 2^{2^y-1}}\right) = p\left(\frac{2x'\omega}{1 \pm i 2^{2^y-1}} + \frac{2^{2^y}n\omega}{1 \pm i 2^{2^y-1}}\right) = p\left(\frac{2x'\omega}{1 \pm i 2^{2^y-1}}\right).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{2x\omega}{1 \pm i 2^{2^y-1}} = w_x^\pm,$$

so gilt demnach die Gleichung

$$p(w_{2^{2^y}n+x'}^\pm) = p(w_x^\pm). \quad \dots 14)$$

Es resultirt hieraus der Satz:

IV. Unter den sämtlichen Functionswerthen von der Gestalt  $p\left(\frac{2x\omega}{1 \pm i 2^{2^y-1}}\right)$ , wobei  $x$  eine beliebige ganze Zahl ist, gibt es nur  $2 \cdot 2^{2^y}$  möglicherweise verschiedene, welche den Werthen

$$x = 1, 2, \quad 2^{2^y}$$

entsprechen; für jedes andere  $x$  nimmt die Function einen bereits unter diesen enthaltenen Werth an.



Wie man unmittelbar sieht, sind dies die bei der untersuchten Theilung auftretenden  $2^{2^v}$  conjugirt-complexen Werthe-paare, aus denen  $R$  zu bestimmen ist. Nun sollen diese Grössen selbst näher untersucht werden. Es ist

$$\begin{aligned} p\left(\frac{2\lambda\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}\right) &= p\left(\frac{2\lambda\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}} - 2\lambda\omega\right) = p\left(\frac{2\lambda\omega - 2\lambda\omega \mp i 2^{2^v-1} \cdot 2\lambda\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}\right) \\ &= p\left(\pm i \frac{2^{2^v-1} \cdot 2\lambda\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}\right) = -p\left(\frac{2^{2^v-1} \cdot 2\lambda\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}\right); \end{aligned}$$

diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$p(w_x^\pm) = -p(w_{2^{2^v-1} \cdot x}^\pm). \quad \dots 15)$$

Wenn nun für  $x$  der Reihe nach die Zahlen 1 bis  $2^{2^v}$  eingesetzt werden, so lassen sich die Functionswerte unter Zuziehung der Gleichung 14) so in Gruppen scheiden, dass die Grössen einer Gruppe sich höchstens durch das Zeichen unter einander unterscheiden, von denen einer anderen Gruppe jedoch vollkommen verschieden sind; dabei entspricht jedem Functionswerte  $p(w^+)$  ein ihm conjugirt-complexer  $p(w^-)$ . Zugleich lässt sich aber leicht zeigen, dass durch diese Gleichung eine definirende Eigenschaft der gesuchten Grössen  $p\left(\frac{2\lambda\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}\right)$  gegeben ist, so dass sich alle Functionswerte, welche durch die Beziehung

$$p(w) = -(2^{2^v-1} w) = p(i 2^{2^v-1} w)$$

verknüpft sind, aber auch nur diese, in die Form  $p\left(\frac{2\lambda\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}\right)$  bringen lassen.

Soll nämlich diese Gleichung bestehen, so dürfen sich die Argumentswerthe nur um eine Periode unterscheiden, es muss also

$$w = \mp 2^{2^v-1} w + 2\lambda\omega + 2\mu i\omega,$$

also

$$w = \frac{2\lambda\omega + 2\mu i\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}$$

sein. Bildet man nun mit diesem Argumente

$$p(w - 2\mu i\omega) = p(w),$$

so folgt

$$p(w) = p\left(\frac{2z\omega}{1 \pm i 2^{2^v-1}}\right), \quad z = \lambda \pm 2^{2^v-1} \mu,$$

wodurch die obige Behauptung bewiesen ist. Die bei der  $1+2^{2^v}$  Theilung auftretenden Werthe paare sind also durch die Gleichung

$$p(w) = -p(2^{2^v-1}w)$$

definiert. Um dieselbe aufzustellen, hat man zuerst mit Hilfe der Relation

$$p(2^{2^v-1}w) = p\left(\frac{2^{2^v-1}w}{2} + \frac{2^{2^v-1}w}{2}\right)$$

nach der Formel 11)  $p(2^{2^v-1}w)$  als rationale Function von  $p\left(\frac{2^{2^v-1}w}{2}\right)$  auszudrücken, diese Grösse wieder in ähnlicher Art als rationale Function von  $p\left(\frac{2^{2^v-1}w}{2}\right)$  darzustellen und dieses Verfahren so lange fortzusetzen, bis man endlich zu

$$p\left(\frac{2^{2^v-1}w}{2^{n-1}}\right) = p\left(\frac{2^{2^v-1}w}{2^n} + \frac{2^{2^v-1}w}{2^n}\right)$$

gelangt, wobei

$$\frac{2^{2^v-1}}{2^n} = 1, \quad n = 2^{v-1}$$

ist. Auf diese Weise ist  $p(2^{2^v-1}w)$  rational durch  $p(w)$  ausgedrückt, und die gesuchte Gleichung lautet

$$-p(w) = \Re[p(w)]. \quad \dots 16)$$

Bedenkt man nun, dass durch die Additionsformel  $p(2x)$  rational durch  $p(x)$  so ausgedrückt wird, dass die höchste Potenz von  $p(x)$  im Zähler steht und  $= 4$  ist und dass in der daraus resultirenden Gleichung  $p(x)$  nur im Quadrate vorkommt, so erkennt man leicht, dass der Grad der Endgleichung  $= 4^n = 2^{2^v}$  in  $p(w)$ , also  $= 2^{2^v-1}$  in  $p^2(w)$  ist. Dieselbe ist wegen der rationalen Beziehungen zwischen gewissen Wurzelgruppen, die sich aus der Formel 11) ergeben, eine Abel'sche Gleichung, ihre Auflösung kann also auf die von Gleichungen niedrigeren Grades zurückgeführt werden.

Von diesen allgemeinen Betrachtungen soll nun eine Anwendung auf die Fünf- und Siebzehntheilung gemacht werden.

### C. Die Fünftheilung des Lemniscatenumfanges.

Es ist für die  $z$  Theilungspunkte

$$R_z = \pm \frac{1}{\sqrt{p\left(\frac{4z\omega}{5}\right)}}, \quad z = 1, 2, 3, 4).$$

Bildet man

$$\frac{4z\omega}{5} = \frac{2z\omega}{1+2i} + \frac{2z\omega}{1-2i},$$

so ist  $p\left(\frac{4z\omega}{5}\right)$  aus  $p\left(\frac{2z\omega}{1\pm 2i}\right)$  zu berechnen.

Die Gleichung 14) wird

$$p(w_{5n+z}^{\pm}) = p(w_z^{\pm}). \quad \dots 17)$$

Die definirende Eigenschaft der gesuchten Functionswerte wird nach 15)

$$p(w_z^{\pm}) = -p(w_{2z}^{\pm}), \quad \dots 18)$$

oder

$$p(w) = -p(2w).$$

Setzt man für  $z$  die Werthe 1 bis 4, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Formel 17):

$$p(w^{\pm}) = -p(w_{\frac{z}{2}}^{\pm}) = p(w_{\frac{z}{4}}^{\pm}) = -p(w_{\frac{z}{3}}^{\pm}).$$

Die Gleichung für diese Werthe wird nach 16)

$$-p(w) = \frac{[1+p(w)^2]^2}{4p(w)[p(w)^2-1]}$$

oder nach einigen Reductionen

$$p(w)^4 - \frac{2}{5}p(w)^2 + \frac{1}{5} = 0.$$

Daraus folgt:

$$p(w)^2 = \frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i.$$

Durch den einen Wurzelwerth werden die vier Grössen

$$p(w_1^+)^2 = p(w_2^+)^2 = p(w_3^+)^2 = p(w_4^+)^2$$

durch den anderen

$$p(w_1^-)^2 = p(w_2^-)^2 = p(w_3^-)^2 = p(w_4^-)^2$$

gegeben. Es ist nun

$$p(w^+) - p(w^-) = + \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$p(w^+) + p(w^-) = \pm \sqrt{2 \left[ \frac{1}{5} + \sqrt{\frac{1}{5}} \right]}$$

Um nun die Dimension von Strecken, also geometrisch construierbaren Gebilden, zu erhalten, werde  $R$  in der Form geschrieben:

$$R_x = \pm \frac{As}{s \sqrt{p(w^+ + w^-)}} \quad x = 1, 2, 3, 4$$

wobei  $A$  die halbe Länge der Lemniscatenaxe, also die Länge der Einheit als Linie betrachtet, darstellt und  $s$  eine beliebig gewählte Strecke bedeutet. Dann erhält man aus der Gleichung 13):

$$R = \pm \frac{A}{s + \sqrt{s \cdot \frac{s}{5}}}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left( \pm \left[ \sqrt{s \cdot \frac{s}{5}} - s \right] \sqrt{2s \left[ \frac{s}{5} + \sqrt{s \cdot \frac{s}{5}} \right]} + \right.} \\ & \left. + 2 \sqrt{s \cdot \frac{s}{5}} \sqrt{\left[ \sqrt{s \cdot \frac{s}{5}} + s \right]^2 - 2 \frac{s^2}{5} - 2s \sqrt{s \cdot \frac{s}{5}}} \right). \end{aligned}$$

Wie man sieht, erhält man zwei verschiedene Längen für die gesuchten Radienvectoren, wenn man berücksichtigt, dass als geometrisch verwendbare Lösung der absolute Betrag von  $R$  zu betrachten ist. Jede derselben ist mit dem Doppelzeichen  $\pm$  behaftet. Nun ist die Gleichung der Lemniscate gegeben durch

$$r^2 = A^2 \cos 2\varphi, \quad \text{also} \quad r = A \sqrt{\cos 2\varphi};$$

$r$  ist hierbei nur reell für solche Werthe von  $\varphi$ , welche zwischen  $\pm \frac{\pi}{4}$  liegen. Dadurch ist aber erst die eine geschlossene Hälfte der Curve gegeben; soll durch dieselbe Gleichung auch die andere Hälfte definirt werden, so muss dem  $r$  für die Punkte im 2. und 3. Quadranten das Zeichen — beigelegt werden. Unter Anwendung dieser Bemerkung erkennt man also aus dem Doppelzeichen für  $R$ , dass jedem Theilungspunkte im 1. und 4. Quadranten ein solcher im 3. und 2. Quadranten so entspricht, dass die Radienvectoren derselben gleiche Längen haben und mit dem Doppelpunkte in einer Geraden liegen; letzterer ist dann als der fünfte Theilungspunkt zu betrachten. In der That wird für  $z = 5$   $R_5 = 0$ , wie die allgemeine Formel zeigt.

#### D. Die Siebzehntheilung des Lemniscatenumfanges.

Für die  $z$  Theilungspunkte ergibt sich als Länge der zugehörigen Radienvectoren:

$$R_z = \pm \frac{1}{\sqrt{p\left(\frac{4z\omega}{17}\right)}}, \quad z = 1, 2 \quad (16)$$

bildet man

$$\frac{4z\omega}{17} = \frac{2z\omega}{1+4i} + \frac{2z\omega}{1+4i},$$

so ist  $p\left(\frac{4z\omega}{17}\right)$  aus  $p\left(\frac{2z\omega}{1\pm 4i}\right)$  zu berechnen. Die Gleichung 15) gibt

$$p(w_{17}^{\pm n+z}) = p(w_z^{\pm}), \quad \dots (19)$$

und die definirende Eigenschaft der gesuchten Functionswerte wird

$$p(w_z^{\pm}) = -p(w_{4z}^{\pm}), \quad \dots (20)$$

respective

$$p(w) = -p(4w).$$

Setzt man hierin für  $z$  der Reihe nach die Zahlen 1 bis 16, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Formel 19) folgende Tabelle:

$$\left. \begin{aligned} p(w_1^\pm) &= -p(w_4^\pm) = p(w_{16}^\pm) = -p(w_{13}^\pm) \\ p(w_2^\pm) &= -p(w_8^\pm) = p(w_{15}^\pm) = -p(w_9^\pm) \\ p(w_3^\pm) &= -p(w_{12}^\pm) = p(w_{14}^\pm) = -p(w_5^\pm) \\ p(w_6^\pm) &= -p(w_7^\pm) = p(w_{11}^\pm) = -p(w_{10}^\pm) \end{aligned} \right\} \dots 21)$$

Die in den Verticalreihen stehenden Functionswerthe sind wesentlich von einander verschieden, da sich die Argumente, wie leicht zu übersehen ist, nicht um eine Periode unterscheiden können. Es lässt sich somit folgender Satz aussprechen:

Die zur Lösung des vorliegenden Problems nöthigen 16 conjugirt-complexen Werthe paare theilen sich in vier Gruppen so, dass die in einer Gruppe stehenden vier Werthe paare sich höchstens durch das Zeichen unterscheiden, von denen der anderen Gruppen aber wesentlich verschieden sind.

Die Gleichung für diese Functionswerthe lautet nach 16):

$$-p(w) = p(4w) = p(2w + 2w) = \frac{[1 + p(2w)^2]^2}{4p(2w)[p(2w)^2 - 1]},$$

also

$$-p(w) = \frac{\left[1 + \left\{\frac{[1 + p(w)^2]^2}{4p(w)[p(w)^2 - 1]}\right\}^2\right]^2}{\frac{4[1 + p(w)^2]^2}{4p(w)[p(w)^2 - 1]} \left[1 - \left\{\frac{[1 + p(w)^2]^2}{4p(w)[p(w)^2 - 1]}\right\}^2\right]};$$

Dieselbe liefert für  $p(w)^2 = x$ :

$$17x^8 - 136x^7 + 748x^6 - 408x^5 + 886x^4 - 1400x^3 + 524x^2 + 24x + 1 = 0. \dots 22)$$

Da durch dieselbe die Quadrate der in der Tabelle 21) stehenden Functionswerthe gegeben sind, so erkennt man, dass diese Gleichung acht verschiedene Wurzeln besitzt, wovon je zwei zu einander conjugirt-complex sind.

Zur Auflösung dieser Gleichung soll nun ein dem Kiepert'schen ähnliches Verfahren eingeschlagen werden, welches auf den beiden Relationen:

$$\left. \begin{aligned} p(2w) &= \frac{[1+p(w)^2]^2}{4p(w)[p(2w)^2-1]} \\ p(w) &= -p(4w) = -\frac{[1+p(2w)^2]^2}{4p(2w)[p(2w)^2-1]} \end{aligned} \right\}, \dots 23)$$

beruht. Betrachtet man nun die Functionswerthe, welche gleichzeitig diesen beiden Beziehungen genügen, so müssen es die Wurzeln der vorliegenden Gleichung 8. Grades sein, da auch diese durch dieselben Relationen definirt erscheinen. Wenn nun  $p(w)$  der Gleichung 22) genügt, so erfüllt auch  $p(2w)$  dieselbe, wie aus der Tabelle 21) hervorgeht; da ferner die Functionswerthe  $p(2w)$  von den Werthen  $p(w)$  wesentlich verschieden sind und auch nicht die diesen entsprechenden conjugirt-complexen Grössen darstellen, so sind die vier Werthepeare, welche durch die Beziehungen 23) gegeben sind, die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} p(w_1^+), & \quad p(w_1^-), & p(w_3^+), & \quad p(w_3^-) \\ p(w_2^+), & \quad p(w_2^-), & p(w_6^+), & \quad p(w_6^-) \end{aligned} \right\} \dots 24)$$

Das Gesagte gilt in gleicher Weise und aus demselben Grunde auch für die Wurzeln  $x = p(w)^2$ . Bezeichnet man nun die Quadrate der Werthepeare 24) mit  $x_1$  und  $x_2$ , so ergeben sich aus 23) leicht die Gleichungen:

$$\frac{1}{p(w)p(2w)} = \frac{4(x_1-1)}{(1+x_1)^2} = -\frac{4(x_2-1)}{(1+x_2)^2}$$

$$\frac{p(w)}{p(2w)} = \frac{4(x_1-1)x_1}{(1+x_1)^2} = -\frac{(1+x_2)^2}{4(x_2-1)x_2};$$

daraus ergibt sich

$$(x_1-1)(1+x_2)^2 + (1+x_1)^2(x_2-1) = 0,$$

$$16x_1x_2(x_1-1)(x_2-1) + (1+x_1)^2(1+x_2)^2 = 0.$$

Wird nun  $x_1+x_2 = y$ ,  $x_1x_2 = z$  gesetzt, so folgt daraus nach einigen Reductionen:

$$2+y+y^2-6z-zy = 0, \quad \dots 25)$$

$$18z^2-14zy+17z^2+2y+y^2+1 = 0. \quad \dots 26)$$

Subtrahirt man 25) von 26), so erhält man

$$y = \frac{17z^2 + 24z - 1}{13z - 1}; \quad \dots 27)$$

setzt man diesen Werth in 25) ein, so resultirt schliesslich

$$17z^4 - 68z^3 + 342z^2 - 36z + 1 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind nach den vorhergehenden Betrachtungen

$$\begin{aligned} p(w_1^+)^2 p(w_2^+)^2, & \quad p(w_3^+)^2 p(w_6^+)^2, \\ p(w_1^-)^2 p(w_2^-)^2, & \quad p(w_3^-)^2 p(w_6^-)^2. \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, besitzt dieselbe zwei Paare complexer Wurzeln, kann also in die Gestalt

$$17[z^2 + (a_1 + ib_1)z + (a_2 + ib_2)] \cdot [z^2 + (a_1 - ib_1)z + (a_2 - ib_2)] = 0$$

gebracht werden. Durch Vergleichung der Coëfficienten dieses Gleichungspolynoms mit dem gegebenen werden diese beiden Factoren

$$z^2 + (-2 + 4i)z + \frac{1 - 4i}{17} = 0, \quad \dots 28)$$

$$z^2 + (-2 - 4i)z + \frac{1 + 4i}{17} = 0 \quad \dots 29)$$

Der eine liefert die Producte

$$p(w_1^+)^2 p(w_2^+)^2, \quad p(w_3^+)^2 p(w_6^+)^2,$$

der andere die Grössen

$$p(w_1^-)^2 p(w_2^-)^2, \quad p(w_3^-)^2 p(w_6^-)^2,$$

es werden also durch die Wurzeln der einen Gleichung in Verbindung mit den sich daraus aus 27) ergebenden Werthen von  $y$  die Grössen

$$p(w_1^+)^2, \quad p(w_2^+)^2, \quad p(w_3^+)^2, \quad p(w_6^+)^2,$$

durch die andere die Werthe



$$p(w_1^-)^2, \quad p(w_2^-)^2, \quad p(w_3^-)^2, \quad p(w_6^-)^2$$

definiert.

Die wirkliche Ausrechnung ergibt nun unter Berücksichtigung, dass

$$17 = (1+4i)(1-4i)$$

ist, folgende Resultate:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 1-2i + (4-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ z_2 &= 1-2i - (4-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ z_3 &= 1+2i + (4+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \\ z_4 &= 1+2i - (4+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \end{aligned} \right\} \dots 30)$$

Aus 27) folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2-2i + (8-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ y_2 &= 2-2i - (8-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ y_3 &= 2+2i + (8+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \\ y_4 &= 2+2i - (8+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \end{aligned} \right\} \dots 31)$$

Mit diesen Werthen lassen sich nun die quadratischen Gleichungen für die Werthepeare 24) in der Form

$$x^2 - y_i x + z_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4)$$

aufstellen und dieselben daraus bestimmen. Wenn durch einen unteren Index angedeutet wird, aus welchen der Grössen  $y$  und  $z$  die Werthe für  $x$  hervorgegangen sind, so erhält man als Lösungssystem:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1-i+(4-i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \pm i(1+2i+\sqrt{1+4i}) \sqrt[4]{\frac{1-4i}{17}} \\ x_2 &= 1-i-(4-i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \pm (1+2i-\sqrt{1+4i}) \sqrt[4]{\frac{1-4i}{17}} \\ x_3 &= 1+i+(4+i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \pm i(1-2i+\sqrt{1-4i}) \sqrt[4]{\frac{1+4i}{17}} \\ x_4 &= 1+i-(4+i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \pm (1-2i-\sqrt{1-4i}) \sqrt[4]{\frac{1+4i}{17}} \end{aligned} \right\} \dots 32)$$

Es handelt sich nun um die Berechnung von

$$\sqrt{\frac{1\pm 4i}{17}}, \quad \sqrt[4]{\frac{1\pm 4i}{17}}.$$

Setzt man

$$\sqrt{\alpha \pm i\beta} = \mu + i\nu,$$

so folgt daraus

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu^2 - \nu^2, \\ \pm \beta &= 2\mu\nu; \end{aligned}$$

aus diesen Gleichungen erhält man

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}, \quad \nu = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}};$$

dabei richtet sich das Zeichen von  $\mu$  und  $\nu$  nach dem Werthe von  $\beta$ , wie aus obiger Beziehung ersichtlich ist.

Wird nun der Kürze wegen

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} = a, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} = b \quad \dots 33)$$

gesetzt, so folgt

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\alpha + i\beta} &= \pm(a + ib) \\ \sqrt{\alpha - i\beta} &= \pm(a - ib) \end{aligned} \right\} \dots 34)$$

Daraus lässt sich

$$\sqrt[4]{\alpha \pm i\beta} = \sqrt{\pm(a \pm ib)}$$

$$p(w_1^-)^2, \quad p(w_2^-)^2, \quad p(w_3^-)^2, \quad p(w_6^-)^2$$

definiert.

Die wirkliche Ausrechnung ergibt nun unter Berücksichtigung, dass

$$17 = (1+4i)(1-4i)$$

ist, folgende Resultate:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 1-2i + (4-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ z_2 &= 1-2i - (4-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ z_3 &= 1+2i + (4+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \\ z_4 &= 1+2i - (4+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \end{aligned} \right\} \dots 30)$$

Aus 27) folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2-2i + (8-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ y_2 &= 2-2i - (8-2i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \\ y_3 &= 2+2i + (8+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \\ y_4 &= 2+2i - (8+2i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \end{aligned} \right\} \dots 31)$$

Mit diesen Werthen lassen sich nun die quadratischen Gleichungen für die Werthepeare 24) in der Form

$$x^2 - y_i x + z_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4)$$

aufstellen und dieselben daraus bestimmen. Wenn durch einen unteren Index angedeutet wird, aus welchen der Grössen  $y$  und  $z$  die Werthe für  $x$  hervorgegangen sind, so erhält man als Lösungssystem:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1-i+(4-i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \pm i(1+2i+\sqrt{1+4i}) \sqrt[4]{\frac{1-4i}{17}} \\ x_2 &= 1-i-(4-i) \sqrt{\frac{1-4i}{17}} \pm (1+2i-\sqrt{1+4i}) \sqrt[4]{\frac{1-4i}{17}} \\ x_3 &= 1+i+(4+i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \pm i(1-2i+\sqrt{1-4i}) \sqrt[4]{\frac{1+4i}{17}} \\ x_4 &= 1+i-(4+i) \sqrt{\frac{1+4i}{17}} \pm (1-2i-\sqrt{1-4i}) \sqrt[4]{\frac{1+4i}{17}} \end{aligned} \right\} \dots 32)$$

Es handelt sich nun um die Berechnung von

$$\sqrt{\frac{1\pm 4i}{17}}, \quad \sqrt[4]{\frac{1\pm 4i}{17}}.$$

Setzt man

$$\sqrt{\alpha \pm i\beta} = \mu + i\nu,$$

so folgt daraus

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu^2 - \nu^2, \\ \pm \beta &= 2\mu\nu; \end{aligned}$$

aus diesen Gleichungen erhält man

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}, \quad \nu = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}};$$

dabei richtet sich das Zeichen von  $\mu$  und  $\nu$  nach dem Werthe von  $\beta$ , wie aus obiger Beziehung ersichtlich ist.

Wird nun der Kürze wegen

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} = a, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} = b \quad \dots 33)$$

gesetzt, so folgt

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\alpha + i\beta} &= \pm(a + ib) \\ \sqrt{\alpha - i\beta} &= \pm(a - ib) \end{aligned} \right\} \dots 34)$$

Daraus lässt sich

$$\sqrt[4]{\alpha \pm i\beta} = \sqrt{\pm(a \pm ib)}$$

berechnen; wird

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} \right]} &= m \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} \right]} &= n \end{aligned} \right\} \dots 35)$$

gesetzt, so ist

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[4]{\alpha \pm i\beta} &= m \pm in, & -m \mp in \\ &im \mp n, & -im \pm n \end{aligned} \right\} \dots 36)$$

Diese Entwicklungen lassen sich nun benützen, um

$$\sqrt{\frac{1 \pm 4i}{17}}, \quad \sqrt[4]{\frac{1 \pm 4i}{17}}$$

zu berechnen und dieselben dann in die Ausdrücke für  $x$  zu substituieren.

Da nun die Vieldeutigkeit der Wurzeln bereits in die Formeln für die Grössen  $x$  eingegangen ist, so genügt es, einen der zulässigen Wurzelwerthe zu wählen und denselben durch die ganze weitere Rechnung beizubehalten. Es ist nun nach den gefundenen Formeln 33) und 34)

$$\sqrt{\frac{1 \pm 4i}{17}} = a \pm ib, \quad \dots 37)$$

wo

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2 \cdot 17}}, \quad b = \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2 \cdot 17}}$$

bedeutet, ferner nach 35) und 36)

$$\sqrt[4]{\frac{1 \pm 4i}{17}} = m \pm in, \quad \dots 38)$$

wo

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt[4]{\frac{1}{17}} + \sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2 \cdot 17}} \right]},$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{1}{17}} - \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2 \cdot 17}} \right]}$$

gesetzt wurde.

Setzt man diese Ausdrücke in die gefundenen Werthe für  $x$ , 32), ein, so können dieselben in der Gestalt conjugirt-complexer Grössen

$$\left. \begin{aligned} x_1^\pm &= P_1 \pm i Q_1 \\ x_2^\pm &= P_2 \pm i Q_2 \\ x_3^\pm &= P_3 \pm i Q_3 \\ x_4^\pm &= P_4 \pm i Q_4 \end{aligned} \right\} \dots 39)$$

dargestellt werden, wobei

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 1 + 4a - b - 2m + n + \sqrt{17} (an - bm) \\ P_2 &= 1 + 4a - b + 2m - n - \sqrt{17} (an - bm) \\ P_3 &= 1 - 4a + b + m + 2n - \sqrt{17} (am + bn) \\ P_4 &= 1 - 4a + b - m - 2n + \sqrt{17} (am + bn) \\ Q_1 &= 1 + a + 4b - m - 2n - \sqrt{17} (am + bn) \\ Q_2 &= 1 + a + 4b + m + 2n + \sqrt{17} (am + bn) \\ Q_3 &= 1 - a - 4b - 2m + n - \sqrt{17} (an - bm) \\ Q_4 &= 1 - a - 4b + 2m - n + \sqrt{17} (an - bm) \end{aligned} \right\} \dots 40)$$

bezeichnet wurde und  $a, b, m, n$  die in den Formeln 37) und 38) gegebene Bedeutung haben; der obere Index von  $x$  soll hiebei nur anzeigen, dass

$$x_i^+ \quad \text{und} \quad x_i^- \quad i = 1, 2, 3, 4)$$

conjugirt-complex sind; diese Grössen sind die Wurzeln  $x = p(w)^2$  der Gleichung 22) in entwickelter Form.

Es ist nun

$$\begin{aligned} p(w^+) \cdot p(w^-) &= + \sqrt{x^+ \cdot x^-} = + \sqrt{P^2 + Q^2}, \\ d(w^+) + p(w^-) &= \pm \sqrt{x^+ + 2\sqrt{x^+ x^-} + x^-} \\ &= \pm \sqrt{2[P + \sqrt{P^2 + Q^2}]}. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck für

$$R = \pm \frac{As}{s \sqrt{p \left( \frac{4z\omega}{17} \right)}},$$

so erhält man unter Berücksichtigung der Formel 13):

$$R = \pm \frac{A}{s + \sqrt{s^2 P^2 + s^2 Q^2}}.$$

$$\sqrt{(\pm [\sqrt{s^2 P^2 + s^2 Q^2} - s] \sqrt{2s [sP + \sqrt{s^2 P^2 + s^2 Q^2}] + 2\sqrt{s \sqrt{s^2 P^2 + s^2 Q^2}})} \\ \sqrt{[\sqrt{s^2 P^2 + s^2 Q^2} + s]^2 - 2s [sP + \sqrt{s^2 P^2 + s^2 Q^2}]}$$

Setzt man der Reihe nach die in 40) angegebenen vier zusammengehörigen Werthepaare

$$P_i \text{ und } Q_i \quad i = 1, 2, 3, 4)$$

ein, so erhält man acht verschiedene Längen für die Radien-vectoren, deren absolute Beträge die Lösungen für die Siebzehntheilung darstellen. Da jeder solcher Radiusvector in Folge des Doppelzeichens nach den bei der Fünftheilung gemachten Bemerkungen einen Punkt im 1. und 3., respective 4. und 2. Quadranten in der dort angegebenen Weise bestimmt, so erhält man im Ganzen 16 Punkte, welche mit dem Doppelpunkte zusammen die gesuchten 17 Theilungspunkte darstellen. Bemerkenswerth ist hiebei, dass nach den Ausdrücken 40) die Theilung blos von den vier Strecken

$$sa, sb, sm, sn$$

abhängt, aus welchen sich leicht  $sP$  und  $sQ$  und somit  $R$  nach den elementaren Methoden construiren lassen.

#### E. Die Sechs- und Dreitheilung des Lemniscaten-umfanges.

Wie erwähnt, ist der Fall der Dreitheilung zwar in den Abel'schen Fällen enthalten, lässt sich jedoch durch die durchgeführte Methode nicht lösen, da sich 3 nicht in die Summe zweier conjugirt-complexer Grössen rational zerlegen lässt. Die

Lösung kann aber auf eine ähnliche Art bewerkstelligt werden, indem man die Gleichung

$$p(w) = p(2w),$$

also nach 11)

$$p(w) = \frac{[1 + p(w)^2]^2}{4p(w)[p(w)^2 - 1]}$$

betrachtet. Da die Functionswerthe gleich sind, können sich die Argumente höchstens um eine Periode unterscheiden, es muss also

$$2w = \pm w + 2\lambda\omega + 2\mu i\omega$$

sein. Für  $w$  ergibt sich dann entweder

$$w = 2\lambda\omega + 2\mu i\omega$$

oder

$$w = \frac{2\lambda\omega + 2\mu i\omega}{3}.$$

Im ersten Falle ist aber  $w$  eine zur Nullstelle congruente Stelle, die Function wird dort unendlich gross; thatsächlich genügt dieser Werth der betrachteten Gleichung. Sieht man von dieser Lösung ab, so hat  $w$  den Werth

$$w = \frac{2\lambda\omega + 2\mu i\omega}{3};$$

betrachtet man hiebei zuerst den Fall, dass  $\lambda$  und  $\mu$  nicht  $= 0$  sind, so erkennt man leicht, dass bloß die Functionswerthe

$$p\left(\frac{2}{3}\omega + \frac{2}{3}i\omega\right) \quad \text{und} \quad p\left(\frac{2}{3}\omega - i\omega\right)$$

verschieden sind und dieser Gleichung genügen. Denn da sich jede ganze Zahl  $\lambda$  und  $\mu$  in der Form

$$\lambda = 3n_1 + \varepsilon_1, \quad \mu = 3n_2 + \varepsilon_2$$

darstellen lässt, wobei  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  zwei von den Zahlen  $+1$  und  $-1$  bedeuten, so folgt



$$\begin{aligned}
 p\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu i\omega}{3}\right) &= p\left(2n_1\omega + 2n_2i\omega + \frac{2}{3}\varepsilon_1\omega + \frac{2}{3}\varepsilon_2i\omega\right) \\
 &= p\left(\frac{2}{3}\varepsilon_1\omega + \frac{2}{3}\varepsilon_2i\omega\right)
 \end{aligned}$$

Nach Gleichung 8) reduciren sich die vier möglichen Werthe auf die beiden erwähnten.

Es kann aber auch  $\lambda$  oder  $\mu = 0$  werden, dann gibt es aus demselben Grunde nur die zwei verschiedenen Werthe

$$p\left(\frac{2}{3}\omega\right), \quad p\left(\frac{2}{3}i\omega\right),$$

welche die betrachtete Gleichung erfüllen.

Dieselbe liefert nun

$$p(w)^4 - 2p(w)^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

woraus folgt:

$$p(w) = \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

und

$$p(w) = \pm i \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1}$$

Da nun nach dem III. Satze die Functionswerthe  $p\left(\frac{2}{3}\omega\right)$  und  $p\left(\frac{2}{3}i\omega\right)$  reell sind, so sind sie durch die Lösung

$$p(w) = \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

gegeben, während entsprechend der Gleichung 12) den Werthen  $p\left(\frac{2}{3}\omega + \frac{2}{3}i\omega\right)$  die imaginären Wurzeln angehören.

Um nun die Radienvectoren der Theilungspunkte zu finden, hat man zu bilden:

$$R = \pm \frac{1}{\sqrt{p\left(\frac{2z\omega}{3}\right)}} \quad z = 1, 2, \quad 6)$$

Da für jene Werthe von  $x$ , welche nicht einem ganzen Vielfachen von 3 gleich sind, aus dem bereits angeführten Grunde

$$p\left(\frac{2x\omega}{3}\right) = p\left(\frac{2\omega}{3}\right)$$

ist, für  $x = 3$  und  $x = 6$

$$p\left(\frac{2x\omega}{3}\right) = \infty$$

wird, so erkennt man, dass die aus der betrachteten Gleichung resultirenden reellen Wurzeln die zur Lösung des Problems nöthigen Functionswerthe darstellen.

Beschreibt man also aus dem Doppelpunkte der Lemniscate mit dem Radius

$$R = \frac{A \cdot s}{\sqrt{s} \sqrt{s^2 + \frac{2}{3}s} \sqrt{3s^2}}$$

einen Kreis, so schneidet derselbe die Lemniscate in vier Punkten, welche in Verbindung mit dem Doppelpunkte, der in der Formel für  $R$  durch die Werthe von  $x = 3$  und  $x = 6$  gegeben erscheint, die Sechstheilung bewerkstelligen. Damit ist auch zugleich das Problem der Dreitheilung erledigt.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: [98\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Kohl Emil

Artikel/Article: [Über die Lemniscatentheilung 364-387](#)