

Über die Steiner'schen Mittelpunktscurven

(II. Mittheilung)

von

Karl Bobek in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Jänner 1889.)

In der vorliegenden Mittheilung erlaube ich mir der hohen Akademie die Beweise der Sätze vorzulegen, welche Steiner im §. 26 seiner Abhandlung vorbringt, soweit die Beweise nicht von ihm selbst gegeben wurden, oder durch die angegebenen Andeutungen leicht erbracht werden können. Auch werden die meisten daselbst aufgeworfenen Fragen beantwortet. Ich will hiebei nur erwähnen, dass in diesem Paragraph Steiner einige Zahlen vorbringt, welche einer Correctur bedürfen und dass auch seine Fragestellung nicht mehr derartig ist, dass die Vermuthung nahe liegt, er habe das Resultat gekannt, wie es bezüglich des §. 17 von mir hervorgehoben wurde. Ich verweise diessbezüglich auf den §. 1, 8 und den §. 7 der vorliegenden Mittheilung.

§. 1. Die Ortscurven $Q^{m(m-1)}$

1. Es wird eine Curve m^{ter} Ordnung C^m ohne vielfache Punkte vorausgesetzt. Lässt man eine Transversale sich um einen willkürlichen Punkt Q der Ebene drehen, so begränzen die m Schnittpunkte mit C^m auf jeder derselben $\mu = \frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen, deren Mitten auf einer Curve $Q^{2\mu}$ der $2\mu^{\text{ten}}$ Ordnung liegen, indem Q ein μ-facher Punkt dieser Curve wird. Die μ Tangenten von $Q^{2\mu}$ in Q sind die μ Sehnen von C^m, welche halbirt werden, und deren Endpunkte durch die innere Polare des Punktes Q auf C^m ausgeschnitten werden.

Die Tangente $\mathfrak{Q}$ von $Q^{2\mu}$ in einem Punkte q, welcher in der Mitte der Sehne ab gelegen ist, wird auf folgende Art construirt.

Sind A und B die Tangenten von C^m in a und b, so wird die Curve, welche man erhält, wenn man auf den Strahlen durch Q die Mitte des Segmentes bestimmt, das durch A und B ausgeschnitten wird, eine Hyperbel H^2 sein, welche $Q^{2\mu}$ in q berührt. H^2 geht durch Q und den Schnittpunkt Q' von AB, hat A und B zu Asymptotenrichtungen und die Mitte M der Strecke $\overline{QQ'}$ zum Mittelpunkte. Zieht man daher durch M die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallel zu A und B, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Asymptoten von H^2 und die Tangente $\mathfrak{Q}$ in q ist parallel zu der Diagonale des, von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und der zu A und B durch q gezogenen Parallelen, gebildeten Parallelogrammes, die nicht durch q geht.

Ist T eine durch Q gehende Tangente von C^m und a ihr Berührungspunkt, b einer ihrer Schnittpunkte, so ist T auch Tangente von $Q^{2\mu}$ in q, der Mitte von $\overline{ab}$. Die Hyperbel H^2 besteht hier, wie ersichtlich aus T und aus der zu B durch M, die Mitte von $\overline{Qb}$, gezogenen Parallelen $\mathfrak{B}$, hat also in q die Tangente T. Für den Berührungspunkt a, in welchem zwei Schnittpunkte a, a' liegen, versagt die obige Tangentenconstruction, indem H^2 aus der doppelt gezählten T besteht.

Ist die Transversale T durch Q zu der Asymptote A_s von C^m parallel, so schneidet sie C^m nur in $m-1$ Punkten im Endlichen und enthält daher nur $\frac{1}{2}(m-1)(m-2) = \mu-(m-1)$ Punkte im Endlichen von $Q^{2\mu}$, ausser den μ-fachen Punkte Q. Die $m-1$ im Unendlichen, in dem Punkte a_∞ von C^m liegenden Schnittpunkte entsprechen einem $(m-1)$-fachen Punkte von $Q^{2\mu}$, dessen $(m-1)$ Zweige sich berühren, so wie $(m-1)$ hindurchgehende Kegelschnitte. Der Punkt a_∞ ist für $Q^{2\mu}$ ein $(m-2)$-facher Selbstberührungspunkt. Denn sei b einer der $m-1$ im Endlichen gelegenen Schnittpunkte von T mit C^m, dessen Tangente die A_s in Q' schneiden möge. Die Hyperbel H^2 hat in der Mitte M von $\overline{QQ'}$ ihren Mittelpunkt und $\mathfrak{A}_s$, welches durch M zu A_s parallel gezogen ist, ist ihre Asymptote, berührt also daselbst auch den Zweig von $Q^{2\mu}$, welcher der Mitte zwischen b und a_∞ entspricht. Da nun alle Punkte Q' auf A_s liegen, so liegen alle Mittelpunkte der Hyperbeln, welche den $(m-1)$ Schnittpunkten von T mit C^m zugehören, auf $\mathfrak{A}_s$, oder $\mathfrak{A}_s$ ist Asymptote aller $(m-1)$ Zweige der $Q^{2\mu}$ a in$_\infty$. Wir haben daher:

Die Curve $Q^{2\mu}$ hat in Q einen $\mu = \frac{1}{2}\, m\ (m-1)$ - fachen Punkt mit μ getrennten Tangenten und in jedem der unendlich fernen Punkte a_∞ von C^m einen $(m-2)$-fachen Selbstberührungspunkt. Die Asymptote $\mathfrak{A}_s$ dieses Selbstberührungspunktes ist parallel zu der Asymptote A_s von C^m und halbirt den Abstand zwischen Q und A_s. Die Curve $Q^{2\mu}$ geht durch die $2\,\mu = m\,(m-1)$ Schnittpunkte der ersten (äusseren) Polare A^{m-1} von Q in Bezug auf C^m und hat die 2μ durch Q gehenden Tangenten von C^m zu $(m-2)$-fachen Tangenten. [Steiner §. 26, III. a, pag. 585.]

2. Liegt der Punkt Q auf einer Asymptote A_s von C^m, so zerfällt die Curve $Q^{2\mu}$ in der Asymptote A_s und eine $Q_s{}^{2\mu-1}$, welche Q zu $(\mu-1)$-fachem Punkte hat. Sie hat in a_∞, dem Berührungspunkte von A_s, einen $(m-3)$-fachen Selbstberührungspunkt, geht durch die $\frac{1}{2}\ (m-2)\ (m-3)$ Mitten q der $(m-2)$ endlichen Sehnen und schneidet A_s noch in einem Punkte q', welcher dem Zuge der C^m entspricht, der in a_∞ von A_s berührt wird. Die übrigen Punkte b_∞ sind $(m-2)$-fache Selbstberührungspunkte, deren Asymptoten $\mathfrak{B}_s$ in der Mitte zwischen Q und B_s parallel laufen.

3. Liegt Q auf C^m, so zerfällt die $Q^{2\mu}$ in eine Q^m und $Q^{2\mu-m}$. Q^m enthält die Mitten der Sehnen, deren ein Endpunkt Q ist, berührt die Tangente Q der C^m in Q und schneidet Q noch in $(m-2)$ Punkten q, den Mitten zwischen Q und den $(m-2)$ übrigen Schnittpunkten mit C^m. Die Asymptoten $\mathfrak{A}_s$ von Q^m sind parallel zu den Asymptoten A_s von C^m und halbiren den Abstand zwischen Q und A_s.

Die $Q^{2\mu-m}$ enthält die Mitten der $\frac{1}{2}\,(m-1)\ (m-2)$ Sehnen, deren Endpunkt nicht in Q liegt. Sie hat in Q einen $(\mu-1)$-fachen Punkt und in den Punkten a_∞ $(m-3)$-fache Selbstberührungspunkte mit denselben Asymptoten $\mathfrak{A}_s$ wie Q^m. Sie geht durch die auf T liegenden Punkte q und durch die Schnittpunkte der ersten Polare A^{m-1} des Punktes Q in Bezug auf C^m.

Die Schnittpunkte $\tilde{Q}$ von C^m und $Q^{2\mu-m}$, welche weder in Q noch in den a_∞, noch in den Schnittpunkten von A^{m-1} mit C^m liegen, sind an Zahl

$$(2\mu-m)\,m-(\mu-1)-m\,(m-2)-[m\,(m-1)-2]=$$
$$=m\,(m-1)\,(m-3)-(\mu-3).$$

Da durch die Punkte a_∞ die Gerade $(G_\infty)^{m-2}$ und durch die $m\,(m-1)-2$ Schnittpunkte der ersten Polare A^{m-1} mit C^m diese A^{m-1} geht, welche C^m in Q berührt, so liegen die übrigen Punkte $\tilde{Q}$ noch auf Curven der Ordnung:

$$2\mu-m-(m-2)-(m-1)=(m-1)\,(m-3)$$

$\tilde{Q}^{m-1\,(m-3)}$, welche in Q die C^m in $\mu-3=\frac{1}{2}\,(m+2)(m-3)$ aufeinander folgenden Punkten schneiden, d. h. $(\mu-4)$-punktig berühren.

4. Liegt Q in einem Wendepunkte W von C^m, so wird die $Q^{2\mu-m}$ die Wendetangente W berühren. Da auch einer der übrigen Schnittpunkte von A^{m-1} in W fällt, so haben die $\tilde{Q}^{(m-1)\,(m-3)}$ in W nur wieder eine $(\mu-4)$-punktige Berührung.

5. Es sei T° ein Punkt der Curve C^m, dessen Tangente $\mathfrak{T}^\circ$ die Curve C^m in zwei Punkten t, t_1 schneidet, die von T° gleich weit abstehen. Die zugehörige Curve $Q^{2\mu-m}$ hat $\mathfrak{T}^\circ$ zur Tangente in T°, und da die Polare A^{m-1} in T° nur die C^m einfach berührt, so müssen die $\tilde{Q}^{(m-1)\,(m-3)}$ daselbst in $(\mu-2)$ aufeinanderfolgenden Punkten schneiden, oder sie berühren die C^m in T° $(\mu-3)$-punktig.

6. Ist Q_∞ ein Punkt der unendlich fernen Geraden G_∞ der Ebene, so zerfällt die Curve $Q^{2\mu}$ in die μ-fach gezählte G_∞ und eine Curve Q^μ_∞, welche die Mitten der auf jedem durch Q_∞ gezogenen Strahle liegenden $\frac{1}{2}\,m\,(m-1)$ Sehnen enthält. Q^μ_∞ geht durch die $2\mu=m\,(m-1)$ Schnittpunkte der ersten Polare A^{m-1} von Q_∞ und hat die der Richtung Q_∞ parallelen Tangenten zu $(m-2)$-fachen. Die in 1. gegebene Tangentenconstruction in dem Punkte q der Mitte der Sehne $\overline{ab}$ aus den Tangenten A und B der Basis C^m in a und b vereinfacht sich hier, nachdem die dort construirte Hyperbel in G_∞ und die Tangenten T des Punktes q zerfällt. Die letztere geht durch den Schnittpunkt Q' von A und B, wodurch sie bestimmt ist. Sie ist durch A, B von der Richtung $\overline{Q'Q_\infty}$ harmonisch getrennt. Sind A_s und B_s daher

zwei Asymptoten von C^m, die sich in Q_s' schneiden, so wird der Strahl $\mathfrak{A}_s$, welcher die Richtung $\overline{Q_s' Q_\infty}$ von A_s und B_s harmonisch trennt, die Asymptote von Q_∞^μ sein. Auf diese Art ergeben sich alle $\mu = \frac{1}{2} m(m-1)$ Asymptoten $\mathfrak{A}_s$ [Steiner §. 26, III. a, p. 584].

Ist schliesslich der Punkt Q ein unendlich ferner Punkt a_∞ von C^m, dessen Asymptote A_s ist, so zerfällt Q_∞^μ in die Asymptote A_s und eine $a_\infty^{\mu-1}$, welche a_∞ zu einem $(m-3)$-fachen Selbstberührungspunkt hat. Die übrigen $\mu-1-(m-2) = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Asymptoten $\mathfrak{B}_s$ ergeben sich nach 6. aus den $m-1$ anderen B_s von C^m. Die $Q^{2\mu}$ des Absatzes 1. ist nach 3. zerfallen, in eine Q^m, welche aus der Asymmtote A_s und der $(m-1)$-fach gezählten G_∞ besteht, und eine $Q^{2\mu-m}$, die aus $a_\infty^{\mu-1}$ und der $(\mu-m+1)$-fach gezählten G_∞ sich zusammensetzt.

Die Punkte $\tilde{Q}$ bestehen für a_∞ aus den

$$(\mu-1)\,m-m\,(m-1)+2-2\,(m-2)$$

Schnittpunkten von $a_\infty^{\mu-1}$, die nicht in a_∞ oder auf A^{m-1} liegen und aus den $(m-1)$ übrigen Schnittpunkten von G_∞ mit C^m ausser a_∞ jeder $[\mu-m-1-(m-2)]$-fach gezählt, indem von $Q^{2\mu-m}$ nach 3. die G_∞ $(m-2)$-fach abgezogen werden muss.

Es ist

$$(\mu-1)m-m(m-1)+2-2(m-2)+(\mu-2m+3)(m-1) =$$
$$= m(m-1)(m-3)-(\mu-3)$$

und da diese Punkte $\tilde{Q}$ auf Curven $\tilde{Q}^{(m-1)(m-3)}$ liegen, welche in $Q = a_\infty$ berühren, so ersieht man, dass diese Curven in a_∞ in $(\mu-3)$ aufeinanderfolgenden Punkten schneiden oder $(\mu-4)$-punktig daselbst berühren. Zu diesen $\tilde{Q}^{(m-1)(m-3)}$ gehören auch folgende Curven. Die $a_\infty^{\mu-1}$ schneidet ausser in den auf A^{m-1} gelegenen Punkten C^m noch in

$$(\mu-1)\,m-m(m-1) = \frac{1}{2}\,m^2(m-3)$$

Punkten, die auf einer Curve $\tilde{a}_\infty^{\frac{1}{2}m(m-3)}$ liegen, da $\mu-1-(m-1) = \frac{1}{2}m(m-3)$ ist. Die $\tilde{a}_\infty^{\frac{1}{2}m(m-3)}$ hat auch in a_∞ mit C^m noch

$2(m-2)-2=2(m-3)$ Schnittpunkte gemeinschaftlich, da A^{m-1} daselbst berührt. Die Curven $\tilde{a}_{\infty}^{\frac{1}{2}m(m-3)}$ bilden mit der $(\mu-2m+3)$-fach gezählten Geraden G_∞ zusammengenommen specielle $\tilde{Q}^{(m-1)\,m-3)}$. Es ist auch

$$\frac{1}{2}m(m-3)+\mu-2m+3=(m-1)(m-3)$$

und diese Curven haben auch in a_∞ mit C^m

$$2(m-3)+\mu-2m+3=\mu-3$$

aufeinanderfolgende Schnittpunkte gemeinschaftlich.

8. Wir haben in 3. zu jedem Punkte Q Curven $\tilde{Q}^{(m-1)\,(m-3)}$ construirt, welche im Punkte Q die C^m in $\mu-3=\frac{1}{2}(m+2)(m-3)$ aufeinanderfolgenden Punkten schneiden und auf C^m überdies noch $m(m-1)(m-3)-(\mu-3)$ Punkte $\tilde{Q}$ bestimmen. Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, dass ein Punkt $\tilde{Q}$ mit Q nur zusammenfallen kann, wenn Q der Berührungspunkt T^0 einer Tangente $\mathfrak{T}^0$ von C^m ist, die in zwei Punkten t, t_1 schneiden, so dass T^0 Mitte der Sehne $\overline{tt_1}$ ist (Vgl. 5). Die Anzahl τ_0 dieser Punkte T^0 lässt nach der gemachten Bemerkung leicht angeben. Die Curven $\tilde{Q}^{(m-1)\,(m-3)}$ schneiden nämlich auf C^m eine Wertigkeitscorrespondenz[1] aus zwischen den Punkten Q und $\tilde{Q}$. Jedem Punkte Q entsprechen $m(m-1)(m-3)-(\mu-3)$ nicht i. A. in ihm liegende Punkte $\tilde{Q}$. Damit aber $\tilde{Q}^{(m-1)\,(m-3)}$ durch einen Punkt $\tilde{Q}$ geht, muss Q offenbar einer der $(m-3)$ übrigen Schnittpunkte einer Sehne $\overline{ab}=S_1$ von C^m sein, die in $\tilde{Q}$ halbirt. Da nun durch $\tilde{Q}$ ausser der Tangente von C^m noch $\mu-1$ Sehnen S_1 gehen, so entsprechen $\tilde{Q}$ noch $(\mu-1)(m-3)$ Lagen von Q derart, dass jede einem solchen Q zugehörige $\tilde{Q}^{(m-1)\,(m-3)}$ durch $\tilde{Q}$ geht. Die Punkte $Q, \tilde{Q}$ bilden daher eine Correspondenz

$$[m(m-1)(m-3)-(\mu-3), (\mu-1)(m-3)]_{\mu-3}$$

---

[1] Vergl. hiefür und für das Folgende:

Hurwitz: Über algebraische Correspondenzen. Berichte der königl. sächs. Gesellsch. d. W. 1886 oder Math. Annalen, Bd. 28, pag. 561 oder meine Abhandlung in den Sitzungsberichten 1886, oder Brill Math. Annalen, Bd. 31, pag. 376.

und diese besitzt:

$$m(m-1)(m-3)-(\mu-3)+(\mu-1)(m-3)+(\mu-3)(m-1)(m-2)$$
$$=\frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+4)$$

Coïncidenzen oder es ist

$$\tau_0=\frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+4).$$

Nach einem bekannten Satze liegen diese τ_0 Berührungspunkte T^0 der Tangenten $\mathfrak{T}^0$ von C^m auf Curven der Ordnung $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m+4)$. Steiner gibt in §. 26, VI, pag. 591 irrthümlich die Zahl τ_0 mit $m(m-3)(m^2-m-4)$ an, für die sich ihm ein Wahrscheinlichkeitsgrund bietet. Für $m=4$ ist diese Zahl von Steiner in §. 17, pag. 541 richtig angegeben.

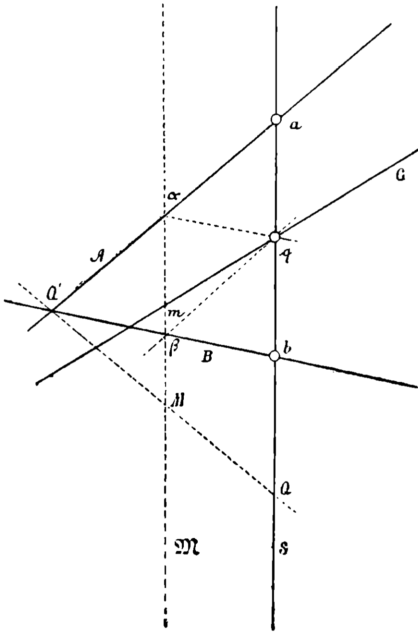
§. 2. Die Enveloppen $S^{m(m-1)}$.

1. Durchlauft der Punkt q eine Gerade G, so hüllen die Sehnen S der Curve C^m, welche in q halbirt werden, eine Curve $S^{2\mu}$ der $2\mu=m(m-1)$ten Classe ein. Denn ist Q ein willkürlicher Punkt der Ebene, so wird die ihm nach §. 1 zugehörige Curve $Q^{2\mu}$ die G in 2μ Punkten q schneiden. Die G ist μ-fache Tangente von $S^{2\mu}$ in den $\mu=\frac{1}{2}m(m-1)$ Mittelpunkten der μ Sehnen, welche durch die m Schnittpunkte von G mit C^m begrenzt werden. Durch jeden Punkt q von G gehen auch nur μ Tangenten von $S^{2\mu}$ die Tangenten des μ-fachen Punktes der dem q zugehörigen $Q^{2\mu}$. Aber auch durch einen Punkt Q_∞ von G_∞ gehen nur μ Tangenten von $S^{2\mu}$, indem G_∞ μ-fache Tangente von $S^{2\mu}$ ist. Die μ Berührungspunkte sind die Schnittpunkte derjenigen Q^{μ}_∞ mit G_∞, welche dem unendlich fernen Punkte von G zugehört, wie aus Nachstehendem sich ergibt. Sie trennen Q_∞ harmonisch von den Paaren $a_\infty b_\infty$.

Im §. 1. wurde im Abschnitt 1. eine Construction angegeben der Tangente von $Q^{2\mu}$ im Punkte q, aus der sich auch die Construction des Berührungspunktes einer Tangente der $S^{2\mu}$ ableiten lässt. Offenbar gehört dem Berührungspunkte der Tangente $\overline{ab}$

von $S^{2\mu}$ eine $Q^{2\mu}$ zu, welche G in q berührt, und es kommt daher nur darauf an, den Punkt Q derjenigen $Q^{2\mu}$ zu construiren, welche G berührt. Denken wir uns, der Punkt Q durchlauft die Gerade $\overline{ab}$, dann werden die Hyperbeln H^2, welche in q die $Q^{2\mu}$ berühren

Fig. 1.



einen Büschel beschreiben, indem sie die Asymptotenrichtungen, den Punkt q und Q', Schnittpunkt von A und B_1, gemeinschaftlich haben. Die durch q zu A und B gezogenen Parallelen Fig. 1. mögen diese in α und β schneiden, dann durchlauft der Mittelpunkt M der Hyperbeln H^2 die Gerade $\overline{\alpha\beta} = \mathfrak{M}$ und da $\overline{Q'M}$ auf $\overline{ab}$ den Punkt Q bestimmt, so beschreibt Q eine zum Tangentenbüschel der $Q^{2\mu}$ in q projectivische Punktreihe. Schneidet eine dieser Tangenten die $\mathfrak{M}$ im m, so ist der Mittelpunkt M der zugehörigen Hyperbel H^2 von m durch α, β harmonisch getrennt, da $\overline{Mq}$ und die Tangente in q conjungirt in Bezug auf H^2 sind. Ist also $\overline{ab} = S$ Tangente der $S^{2\mu}$, welche zu G gehört und schneidet diese $\overline{\alpha\beta}$ in m, so bestimme man zu m den Punkt M, welcher ihn von α, β harmonisch trennt, dann schneidet $\overline{Q'M}$ die $\overline{ab}$ im Berührungspunkte Q von $S^{2\mu}$ in $\overline{ab}$. Hiernach kann der Punkt Q auch genau so wie in der ersten Mittheilung §. 1. gezeigt wurde, construirt werden. Liegt Q_∞ auf G_∞, so geht die Tangente von Q^μ_∞ durch Q', wird also durch A, B von $\overline{Q'Q_\infty}$ harmonisch getrennt. $S^{2\mu}$ berührt die m Asymptoten A_s von C^m, sowie die m Tangenten von C^m in den m Schnittpunkten von C^m mit G.

2. Ist G eine Tangente von C^m, so wird die $S^{2\mu}$ dieselbe im Berührungspunkte a, und in den $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Mitten der Sehnen berühren, deren Endpunkt nicht in a liegt. Die $(m-2)$ Mitten der Sehnen, deren ein Endpunkt a ist, sind Wendepunkte von $S^{2\mu}$, so dass G in $(m-2)$ Punkten Wendetangente von $S^{2\mu}$ wird.

3. Es sei G parallel zur Asymptote A_s der C^m. Dann zerfällt $S^{2\mu}$ in den $(m-1)$-fach gezählten Punkt a_∞ und eine $S^{2\mu-m+1}$, welche G zu $(\mu-m+1)$-facher Tangente hat, indem die $Q^{2\mu}$ stets die G in a_∞ in $(m-1)$ Punkten schneiden, also durch Q nur $2\mu-(m-1)$ Sehnen gehen, deren Mitten auf G im Endlichen liegen. Die Berührungspunkte von $S^{2\mu-m+1}$ auf G sind die $\frac{1}{2}(m-1)(m-2) = \mu-m+1$ Mitten der endlichen Sehnen auf G. Die $S^{2\mu-m+1}$ hat noch eine $(m-1)$-fache Tangente G', welche parallel zu G ist und so liegt, dass G in der Mitte zwischen G' und A_s verlauft. Denn nimmt man Q auf G' an, so wird die $Q^{2\mu}$ die G zur Tangente im Selbstberührungspunkt a_∞ haben, also fallen von den $(2\mu-m+1)$ Tangenten der $S^{2\mu-m+1}$ noch $(m-1)$ auf G'. $S^{2\mu-m+1}$ berührt A_s nicht, wohl aber die übrigen Asymptoten.

4. Ist G eine Asymptote A_s von C^m, so zerfällt $S^{2\mu}$ wieder in den $(m-1)$-fach gezählten Punkt a_∞ und eine $S^{2\mu-m+1}$, welche A_s zu $(\mu-m+2)$-fachen Tangente hat. Die Berührungspunkte derselben sind: 1. die $\frac{1}{2}(m-2)(m-3) = \mu-2m+3$ Mitten der durch die $(m-2)$ im Endlichen gelegenen Schnittpunkte von A_s mit C^m begrenzten Sehnen, 2. ein Punkt, welcher dem Punkte a_∞ entspricht, als Mitte der Sehne der in a_∞ zusammenfallenden Schnittpunkte von A_s mit C^m und 3. die $(m-2)$ in a_∞ fallenden Mitten, der unendlich langen Sehnen, welche a_∞ mit den $(m-2)$ Schnittpunkten von A_s und C^m begrenzt. Der Punkt a_∞ ist daher für $S^{2\mu-m+1}$ ein $(m-3)$-facher Selbstberührungspunkt.

Die Gerade G_∞ ist für $S^{2\mu-m+1}$ wieder $(\mu-m+1)$-fache Tangente. Die Berührungspunkte derselben sind die Schnittpunkte der Curve $a_\infty^{\mu-1}$ (§. 1, 7), die in a_∞ einen $(m-3)$-fachen Selbstberührungspunkt hat. Durch a_∞ gehen ausser A_s und G_∞ keine Tangenten von $S^{2\mu-m+1}$. Da A_s für a_∞ als $\mu-m+2+m-2$ Tangenten zählt, so erschöpfen beide vielfache Tangenten die Classe der Curve.

5. Es sei T eine Tangente von $S^{2\mu}$, die auch C^m in a berührt. Ist a ein Endpunkt der Sehne $\overline{ab}$, deren Mitte q auf G liegt, so ist er auch Berührungspunkt der $S^{2\mu}$, denn die a zugehörige $Q^{2\mu}$ hat in Q einen Doppelpunkt, indem sie in Q^m und $Q^{2\mu-m}$ zerfällt. (§. 1, 3). Da also $Q^{2\mu}$ für a die G berührt (alle übrigen $Q^{2\mu}$ der Punkte von $\overline{ab}$ berühren in q die $\overline{ab}$ selbst), so ist a ein Punkt von $S^{2\mu}$. Ist der Punkt q Mittelpunkt einer Sehne auf T, die nicht a zum Endpunkt hat, so liegt der Berührungspunkt von $S^{2\mu}$ nicht in a. Sind also unter den gemeinschaftlichen Tangenten von $S^{2\mu}$ und C^m x solche der ersten und y der zweiten Art, so ist:

$$y+2x = m^2(m-1)^2-2m.$$

Für die $S^{2\mu-m+1}$, welche einen zu A_s parallelen Geraden G nach 3 zugehört, ergibt sich die Relation, wenn die Zahlen y' und x' bezeichnet werden:

$$y'+2x' = m(m-1)^3-2(m-1).$$

Für die $S^{2\mu-m+1}$, welche einer A_s zugehört, folgt nach 4, wenn die analogen Zahlen mit y'' und x'' bezeichnet werden:

$$y''+2x'' = (2\mu-m+1)\,m(m-1)-(2m-3)-\mu =$$
$$= (m^2-2m+1)\,m(m-1)-(2m-3)-\frac{1}{2}m(m-1),$$

indem A_s für μ gemeinschaftliche Tangenten von $S^{2\mu-m+1}$ und C^m zählt.

§. 3. Die Ortscurve $Q_0^{m(m+1)(m-2)}$ und die Enveloppe $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)}$.

1. Es sei $\overline{ab}$ eine Sehne $\mathfrak{S}$ der C^m, in deren Endpunkten a, b die Tangenten von C^m einander parallel sind, dann ist der Ort der Mitten Q_0, solcher Sehnen S, eine Curve Q_0^τ, deren Ordnung τ sich folgendermassen einfach bestimmt. Soll ein Punkt von G_∞

auf ihr liegen, so kann es nur einer der m Schnittpunkte von C^m sein, denn fällt die Mitte einer Sehne von C^m auf G_∞, so liegt ein Endpunkt derselben auch auf G_∞, ist also ein Punkt von C^m. Jeder Punkt a_∞ ist aber $m(m-1)-2=(m+1)(m-2)$-facher Punkt der obigen Curve Q_0^τ, denn zu seiner Asymptote A_s gehen noch $m(m-1)-2$ parallele Tangenten von C^m, deren Berührungspunkte mit a_∞ verbunden Sehnen $\mathfrak{S}$ liefern, deren Punkte Q_0 in a_∞ fallen. Die Curve schneidet daher die G_∞ nur in $m(m+1)(m-2)$ Punkten, ist also von der $m(m+1)(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Um die Tangente dieser Curve im Punkte Q_0 zu construiren, hat man nur zu beachten, dass sie die Curve Q_∞^μ in Q_0 berührt, welche dem unendlich fernen Punkte Q_∞ von S zugeordnet ist nach §. 1, 6., dass also nach §. 2, 1. diese Tangente zu den Tangenten von C^m in den Endpunkten der Sehne parallel ist. Hieraus ergibt sich auch die Construction ihrer Asymptoten, welche in der Mitte zwischen A_s und den zu ihr parallelen Tangenten der C^m verlaufen. Ebenso folgt, dass $Q_0{}^{m(m+1)(m-2)}$ die C^m in ihren $3m(m-2)$ Wendepunkten berührt. [Steiner §. 26, Vd, pag. 589.]

2. Die Classe σ der Enveloppe $\mathfrak{S}^\sigma$ der Sehnen $\mathfrak{S}$, in deren Endpunkten a, b die Tangenten von C^m einander parallel sind, liefert folgende Betrachtung. Jedem Punkte Q_∞ entsprechen auf C^m $2\mu=m(m-1)$ Punkte, deren Tangenten durch Q_∞ gehen, einander also parallel sind. Man erhält so auf C^m eine Schaar von Gruppen zu 2μ Punkten ausgeschnitten durch den Büschel erster Polaren der Punkte von G_∞. In diesen Gruppen gibt es[1] $2\mu-1+2\mu-1+(m-1)(m-2)=[3m(m-2)+m]$ Gruppen, in denen zwei Punkte coïncidiren, oder in welchen die ersten Polaren die C^m berühren: die $3m(m-2)$ Wendepunkte und die m Punkte a_∞. Projicirt man nun die obigen Gruppen von 2μ Punkten aus einem Punkte P der Ebene, so tritt im Strahlenbüschel (P) eine Correspondenz $[m(2\mu-1), m(2\mu-1)]$ auf, deren Coïncidenzstrahlen aus den Tangenten von $\mathfrak{S}^\sigma$, doppelt gezählt, und aus den Strahlen bestehen, welche P mit den oben gefundenen $3m(m-2)$ $+m$ Punkten verbinden. Die Classe der Enveloppe ist also

---

[1] Da die Gruppen eine Correspondenz $[2\mu-1, 2\mu-1]_1$ auf C^m veranlassen.

gegeben durch

$$2\sigma + 3m(m-2) + m = 2m(2\mu-1)$$

woraus

$$\sigma = \frac{1}{2} m(m-1)(2m-3)$$

folgt. [Vergl. die Anmerkung von Steiner zu §. 26, VI *d*, pag. 589.]

Die Construction des Berührungspunktes der $\mathfrak{S}^\sigma$ ist bereits in der I. Mittheilung §. 1, von mir bewiesen worden.

§. 4. Die Enveloppe $S_2^{\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)}$.

1. Die Doppelsehnen S_2 einer Curve C^m hüllen eine Curve S_2^s der Classe s ein. Die s Tangenten von S_2^s, welche durch den Punkt Q gehen, liefern s Punkte Q_2 als gemeinschaftlichen Mitten der Sehnen $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'}$, welche auf ihnen liegen und diese s Punkte sind Doppelpunkte von $Q^{2\mu}$. Die Tangenten der beiden Zweige von $Q^{2\mu}$ in Q_2 ergeben sich nach §. 1, 1. aus den Tangenten A, B und A', B' von C^m mittels der Hyperbeln H^2 und H'^2, wie in 3. gezeigt werden soll.

Der Ort der Mitten Q_1 auf den Strahlen S durch Q ist eine $Q^{2\mu}$. Zwei Mitten Q_1 können auf S nur zusammenfallen, 1. wenn S Tangente von C^m ist, oder 2. zu einer Asymptote A^s von C^m parallel ist oder 3. schliesslich, wenn S eine Doppelsehne S_2 ist. Hieraus folgt: von Q gehen an $Q^{2\mu}$ nur die Tangenten, welche auch C^m berühren, und zwar ist jede derselben nach §. 1, 1. für $Q^{2\mu}$ $(m-2)$-fach. Der Punkt Q ist μ-fach und die m Punkte a_∞ sind $(m-2)$-fache Selbstberührungspunkte. Überdies hat $Q^{2\mu}$ noch s Doppelpunkte Q_2. Also gilt für die erste Polare des Punktes Q in Bezug auf $Q^{2\mu}$:

$$2\mu(2\mu-1) = \mu(\mu+1) + m(m-1)(m-2) + m2(m-1)(m-2) + 2s$$ [1]

[1] Ein $(\nu-1)$-facher Selbstberührungspunkt einer Curve erniedrigt die Classe derselben um $2\nu(\nu-1)$. Denkt man sich ν Kegelschnitte, welche sich in dem Punkte a berühren, so stellen dieselben eine Curve $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(\nu-1)$-fachem Selbstberührungspunkte dar. Da ihre Classe 2ν ist, so folgt, wenn der Punkt a die Classe um δ erniedrigt, da die Curve noch $\nu(\nu-1)$ Doppelpunkte hat: $2\nu = 2\nu(2\nu-1) - 2\nu(\nu-1) - \delta$, also $\delta = 2\nu(\nu-1)$. Von einem Punkte der gemeinschaftlichen Tangente A der Kegelschnitte

woraus sich ergibt:

$$s = \frac{3}{8} m(m-1)(m-2)(m-3),$$

als Classe der Enveloppe S_2^s. [Steiner §. 26, IV*a*, pag. 586.]

2. Nimmt man den Punkt Q auf der Asymptote A_s an, so wird nach §. 1, 2. die $Q_s^{2\mu-1}$ den Punkt Q zu $(\mu-1)$-fachen, den Punkt a_∞ aber zu $(m-3)$-fachem Selbstberührungspunkt haben und von Q gehen an $Q_s^{2\mu-1}$ noch $m(m-1)-1$ je $(m-2)$-fache Tangenten, die Tangenten von C^m sind. Hat daher $Q_s^{2\mu-1}$ noch s' Doppelpunkte, so ist:

$$(2\mu-1)(2\mu-2) = (\mu-1)\mu + (m-1).2(m-1)m-2) + 2(m-2).$$
$$(m-3) + (m-2) + (m^2-m-1)(m-2) + 2s'$$

woraus:

$$s' = s - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)$$

folgt, d. h. von einem Punkte der A_s gehen nur $s - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Tangenten der S_2^s, die nicht in A_s liegen. A_s ist auch $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$-fache Tangente von S_2^s, indem die $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ in ihr liegenden endlichen Sehnen eben so viele S_2 sind.

Ist Q_∞ ein Punkt von G_∞, so hat Q_∞^μ nur $m(m-1)$ je $(m-2)$-fache Tangenten von der Richtung Q_∞, also noch s'' Doppelpunkte, so dass:

$$\mu(\mu-1) = m(m-1)(m-2) + 2s''$$

ist, woraus sich

$$s'' = \frac{1}{8} m(m-1)(m-2)(m-3) = \frac{1}{3} s$$

---

gehen ν Tangente weniger und von a selbst 2ν Tangenten weniger an die Curve $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung. Hat die Curve einen $\varkappa$-fachen Punkt mit $\varkappa-\nu$ getrennten Tangenten und einen $(\nu-1)$-fachen Selbstberührungspunkt in a, so erniedrigt dieser die Classe um $\varkappa(\varkappa-1) + \nu(\nu-1)$, wie analog gezeigt wird. Umgekehrt hat eine Curve einen ν-fachen Punkt mit ν zusammenfallenden Tangenten A und gehen von den Punkten der Geraden A um ν Tangenten weniger, von a um 2ν Tangenten weniger, die nicht auf A fallen, als von einem willkürlichen Punkte der Ebene, so ist a ein $(\nu-1)$-facher Selbstberührungspunkt.

ergibt; also folgt, dass G_∞ selbst $2s''$-fache Tangente von S_2^s ist.

Ist Q ein Punkt von C^m, so enthält Q^m in den Schnittpunkten mit $Q^{2\mu-m}$ eine Anzahl s_1 von Punkten Q_2 die übrigen $s-s_1$ sind Doppelpunkte von $Q^{2\mu-m}$. Hiebei ist:

$$s_1 = m\,(2\mu-m) - (\mu-1) - m2\,(m-2) - (m-2)$$
$$= m\,(m-1)\,(m-3) - (\mu-3),$$

da $Q_2^{2\mu-m}$ in a_∞ je $(m-3)$-fache Selbstberührungspunkte hat mit denselben Asymptoten, wie Q^m, und diese noch in den $(m-2)$ Punkten q auf der Tangente $\mathfrak{T}$ von C^m schneidet. (Vergl. §. 1, 3.) Aus diesem Grunde liegen die s_1 Punkte auf Q^m auch auf Curven der $(m-1)\,(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche Q^m in dem Punkte Q in $(\mu-3)$ aufeinander folgenden Punkten schneiden. [Steiner §.26, IV a, pag. 587.]

Für den Punkt a_∞ erhält die $a_\infty^{\mu-1}$ noch s_1'' Doppelpunkte, wobei sich s_1'' daraus bestimmt, dass $a_\infty^{\mu-1}$ nur $m\,(m-1)-2$ durch a_∞ gehende $(m-3)$-fache Tangenten besitzt, a_∞ selbst aber zu einem $(m-3)$-fachen Selbstberührungspunkt hat. Es ist nämlich dann:

$$(\mu-1)\,(\mu-2) = (m^2-m-2)\,(m-3) + 2\,(m-2)\,(m-3) + \\ + 2\,(m-2) + 2s_1''$$

woraus:

$$s_1'' = s'' - (m-2)\,(m-3)$$

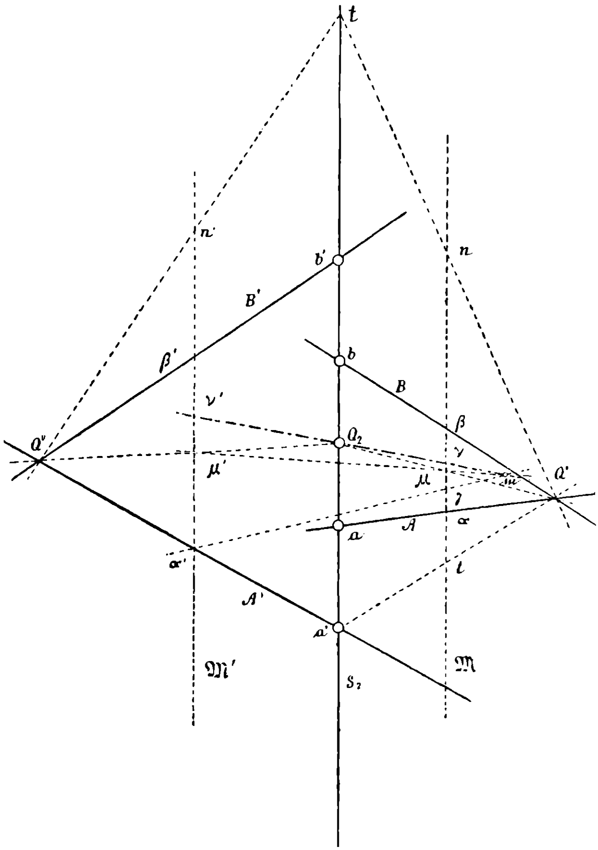
folgt, d. h. von dem Punkte a_∞ der $\frac{1}{2}\,(m-2)\,(m-3)$-fachen Tangente A_s gehen um $(m-2)\,(m-3)$ weniger Tangenten der S_2^s, als von einem beliebigen Punkte, wenn A_s nicht gezählt wird. Die S_2^s hat daher in a_∞ einen $\left[\frac{1}{2}\,(m-2)\,(m-3)-1\right]$-fachen Selbstberührungspunkt mit der Asymptote A_s. [Fussnote bei Steiner zu §. 26, IVa, pag. 586.]

S_2^s hat die Doppeltangenten von C^m zu Wendetangenten, da die $Q^{2\mu}$ der Punkte Q einer Doppeltangente in der Mitte zwischen den Berührungspunkten einen Selbstberührungspunkt hat.

3. Den Berührungspunkt t der S_2^s auf einer ihrer Tangenten S_2 kann man nach der in §. 2, 1. gegebenen Construction leicht angeben. Jedem Punkte Q von S_2 wird eine $Q^{2\mu}$ zugehören, welche

in Q_2 zwei Tangenten besitzt, deren eine $\mathfrak{T}$ der Sehne $\overline{ab}$, die andere $\mathfrak{T}'$ der Sehne $\overline{a'b'}$ entspricht und die Hyperbel H^2 resp. H'^2 berührt. Durchlauft Q die S_2, so beschreiben $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ zwei projectivische Büschel in Q_2 und schneiden daher auch die Geraden $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, welche die Mittelpunkte der Hyperbeln H^2 und H'^2 enthalten in projectivischen Punktreihen. Diese liegen perspectivisch, da dem Punkte Q_2 von S_2 auf $\mathfrak{M}$, sowie auf $\mathfrak{M}'$ der

Fig. 2.



unendlich ferne Punkt von S_2 zugehört, als Mittelpunkt der Hyperbeln H^2 und H'^2, welche aus S_2 und $\overline{S_\infty}$ bestehen. Es sei $\mathfrak{m}$ das Perspectivitätscentrum. Dann ist $\overline{\mathfrak{m}\,Q_2}$ ein Doppelstrahl der projectivischen Tangentenbüschel $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ in Q_2 und der Punkt t, welcher $\overline{\mathfrak{m}\,Q_2}$ auf S_2 entspricht, ist der Berührungspunkt von S_2^s, denn ihm gehört ein $Q^{2\mu}$ zu, welche in Q_2 einen Selbstberührungspunkt hat mit der Tangente $\overline{Q\mathfrak{m}}$.

Die Construction zeigt die Figur 2. Sind μ und μ' die Mitten von $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$, so geht $\overline{\mu\mu'}$ durch $\mathfrak{m}$. Um einen zweiten Strahl zu finden, beachte man, dass $\overline{Q_2\alpha'}$ als Tangente der $Q^{2\mu}$ aufgefasst dem Punkte a' zugehört. Schneidet daher $\overline{Q'a'}$ die $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{c}$ und ist γ diesem in Bezug auf α, β harmonisch zugeordnet, so ist $\overline{Q_2\gamma}$ die andere Tangente dieser $\overline{Q^{2\mu}}$. Daher geht $\overline{\alpha'\gamma}$ auch durch $\mathfrak{m}$. Schneidet nun $\overline{Q_2\mathfrak{m}}$ die $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ in ν res. ν' und ist n von ν durch α, β, n' von ν' durch α', β' harmonisch getrennt, so schneiden sich $\overline{Q'n}$ und $\overline{Q''n'}$ in dem Berührungspunkt t auf S_2.

Die $2s'' = \frac{1}{4}\, m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)$ Berührungspunkte S_2^s auf G_∞ ergeben sich nach Steiner §. 26, IVa, pag. 586, indem man die m Punkte a_∞ zu vier gruppirt und jedesmal die sechs Punkte bestimmt, welche zwei aus den vier Punkten gebildete Paare gleichzeitig harmonisch trennen. Denn sind a_∞, b_∞, c_∞, d_∞ vier der Punkte und trennen Q_∞ und $\overline{Q}_\infty$ die Paare a_∞, b_∞ sowie c_∞, d_∞ harmonisch, so hat die Curve Q_∞^μ, welche Q_∞ entspricht in $\overline{Q}_\infty$ einen Doppelpunkt. Schneiden sich die Asymptoten A_s und B_s in Q' und die Asymptoten C_s und D_s in Q'', so werden nach §. 1, 6. die Asymptoten von Q_∞^μ gefunden, indem man den Strahl $\mathfrak{A}_s$ sucht, der von A_s, B_s harmonisch von $\overline{Q'Q_\infty}$ getrennt wird, ebenso den Strahl $\mathfrak{A}'_s$, welcher durch C_s, D_s harmonisch getrennt wird von $\overline{Q''Q_\infty}$. Vermöge der Voraussetzung über die Lage von Q_∞ sind $\mathfrak{A}_s$ und $\mathfrak{A}'_s$ parallel und haben die Richtung $\overline{Q}_\infty$, dieser ist also Doppelpunkt von Q_∞^μ. Für den Punkt Q_∞ fällt also noch eine weitere Tangente von S_2^s auf G_∞, dieser ist also Berührungspunkt der S_2^s.

S_2^s besitzt überdies noch andere unendlich ferne Punkte und ergeben sich ihre Asymptoten aus der obigen Tangentenconstruction immer, wenn die Gerade $\overline{\mu\mu'}$ durch Q_2 geht, ohne mit S_2 zu coïncidiren.

§. 5. Die Ortscurve $Q_2^{\frac{1}{4}m\,(m+1)\,(m-2)\,(m-3)}$.

Der Ort der Mitten Q_2 aller Doppelsehnen S_2 der C^m ist eine Curve Q_2^t der Ordnung t. Um t zu bestimmen beachten wir Folgendes. Die in §. 2 betrachtete Enveloppe $S^{2\mu}$, welche zur Geraden G gehört, hat mit S_2^s soviel Tangenten gemein, als Punkte

Q_2 auf G liegen, d. h. als die Ordnung der Q_2^t beträgt. Diese t gemeinschaftlichen Tangenten von $S^{2\mu}$ und S_2^s sind Doppeltangenten von $S^{2\mu}$.

Nun lässt sich die Ordnung von $S^{2\mu}$ angeben und da sie i. A. keine Wendetangenten besitzt, so liefert die Plücker'sche Formel die Anzahl ihrer Doppeltangenten.

Schneidet nämlich $S^{2\mu}$ die Gerade G, der sie zugehört, in einem Punkte q, dessen Tangente nicht auf G fällt, so ist q ein Punkt von Q_0^τ des §. 3, 1., denn der Sehne $\overline{ab}$, deren Mitte q ist, ist eine zweite $\overline{a'b'}$ benachbart, deren Mitte ebenfalls q ist, da q ein Punkt von $S^{2\mu}$ ist, also ist $\overline{aa'}$, die Tangente von C^m in a parallel, zu $\overline{bb'}$, der Tangente in b. Mithin schneidet $S^{2\mu}$ die Gerade G in $\tau = m(m+1)(m-2)$ Punkten Q_0 und berührt sie in den μ Mitten der μ auf G gelegenen Sehnen. Es ist daher die Ordnung von $S^{2\mu}$: $m(m+1)(m-2) + m(m-1) = m(m^2-3)$. Sie schneidet also auch G_∞, die μ-fache Tangente ist, noch in $m(m+1)(m-2)$ Punkten, deren Asymptoten solche Sehnen $\overline{ab}$ enthalten, deren Tangenten A, B sich auf G schneiden, wie aus der in §. 2 gegebenen Construction folgt. [Steiner §. 26 Va, pag. 588.]

Die Plücker'sche Formel liefert nun:

$$m(m^2-3) = 2\mu(2\mu-1) - 2\mu(\mu-1) - 2t,$$

also ergibt sich die Ordnuug von Q_2^t

$$t = \frac{1}{4} m(m+1)(m-2)(m-3).$$

2. Es sei G eine zu A_s parallele Gerade, die ihr zugehörende $S^{2\mu-m+1}$ hat dann nach §. 2, 3. G' zur $(m-1)$-fachen Tangente, wobei G zwischen G' und A_s in der Mitte verlauft, G und G_∞ sind $(\mu-m+1)$-fache Tangenten. Die Q_0^τ schneidet G nur noch in $\tau-(m+1)(m-2) = (m^2-1)(m-2)$ Punkten, so dass die Ordnung von $S^{2\mu-m+1}$ sich gleich $(m^2-1)(m-2) + 2(\mu-m+1)$ $= m(m^2-3) - (m^2+m-4)$ ergibt. Schneidet mithin G die Curve Q_2^t noch in t' Punkten, so hat $S^{2\mu-m+1}$ nur t' Doppeltangenten und es ist daher:

$$\begin{aligned} m(m^2-3)-(m^2+m-4) &= (2\mu-m+1)(2\mu-m)-(m-1)(m-2) \\ &\quad - 2(\mu-m+1)(\mu-m) - 2t' \\ &= 2\mu(2\mu-1) - 2\mu(\mu-1) - 2(m-1)^2 - 2t' \end{aligned}$$

woraus:

$$t' = t - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)$$

folgt, d. h. Q_2' hat im Punkte Q_∞ einen $t - t' = \frac{1}{2}(m-2).(m-3)$-fachen Punkt.

Die A_s selbst zugehörende $S^{2\mu-m+1}$ hat in a_∞ einen $(m-3)$-fachen Selbstberührungspunkt und A_s ist $(\mu-m+2)$-fache Tangente von $S^{2\mu-m+1}$. Die Ordnung von $S^{2\mu-m+1}$ ergibt sich daher gleich: $2(\mu-m+2)+\tau-(m+1)(m-2) = m(m^2-3)-(m^2+m-6)$ und da G_∞ eine $(\mu-m+1)$-fache Tangente ist, so ergibt sich die Relation:

$$m(m^2-3)-(m^2+m-6) = (2\mu-m+1)(2\mu-m)-(\mu-m+2).$$
$$(\mu-m+1)-(m-2)(m-3)-(\mu-m+1)(\mu-m)-2t''$$

wenn $S^{2\mu-m+1}$ noch t'' Doppeltangenten hat. Hieraus folgt:

$$t'' = t' - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)-1$$

Nun schneidet Q_2^t die A_s in den t'' gefundenen Punkten, aber auch in den $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Mitten der endlichen auf A_s gelegenen Sehnen, so dass also im Endlichen $t''+\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Punkte von Q_2^t und in a_∞ daher:

$$t - t'' - \frac{1}{2}(m-2)(m-3) = t - t' + 1$$

Punkte auf A_s liegen, d. h. die Asymptote A_s berührt einen Zweig der Q_2^t in a_∞. Q_2^t geht durch die $2s''$ Berührungspunkte von S_2^s auf Q_∞.

3. Q_2^t geht durch die Punkte T° von C^m, in denen die Tangente $\mathfrak{T}^\circ$ für eine Sehne gehälftet wird §. 1,5. Die übrigen Schnittpunkte mögen R° heissen, sie sind solche Punkte der C^m, welche Mitte einer Doppelsehne sind. Ihre Anzahl sei σ_0, dieselbe ergibt sich:

$$\sigma_0 = mt - m\left[\frac{1}{2}(m-2)(m-3)+1\right] - \tau_0$$

und nach Einführung des Wertes aus §. 1, 8.:

Q_2 auf G liegen, d. h. als die Ordnung der Q_2^t beträgt. Diese t gemeinschaftlichen Tangenten von $S^{2\mu}$ und S_2^s sind Doppeltangenten von $S^{2\mu}$.

Nun lässt sich die Ordnung von $S^{2\mu}$ angeben und da sie i. A. keine Wendetangenten besitzt, so liefert die Plücker'sche Formel die Anzahl ihrer Doppeltangenten.

Schneidet nämlich $S^{2\mu}$ die Gerade G, der sie zugehört, in einem Punkte q, dessen Tangente nicht auf G fällt, so ist q ein Punkt von Q_0^τ des §. 3, 1., denn der Sehne $\overline{ab}$, deren Mitte q ist, ist eine zweite $\overline{a'b'}$ benachbart, deren Mitte ebenfalls q ist, da q ein Punkt von $S^{2\mu}$ ist, also ist $\overline{aa'}$, die Tangente von C^m in a parallel, zu $\overline{bb'}$, der Tangente in b. Mithin schneidet $S^{2\mu}$ die Gerade G in $\tau = m(m+1)(m-2)$ Punkten Q_0 und berührt sie in den μ Mitten der μ auf G gelegenen Sehnen. Es ist daher die Ordnung von $S^{2\mu}$: $m(m+1)(m-2)+m(m-1) = m(m^2-3)$. Sie schneidet also auch G_∞, die μ-fache Tangente ist, noch in $m(m+1)(m-2)$ Punkten, deren Asymptoten solche Sehnen $\overline{ab}$ enthalten, deren Tangenten A, B sich auf G schneiden, wie aus der in §. 2 gegebenen Construction folgt. [Steiner §. 26 Va, pag. 588.]

Die Plücker'sche Formel liefert nun:

$$m(m^2-3) = 2\mu(2\mu-1) - 2\mu(\mu-1) - 2t,$$

also ergibt sich die Ordnuug von Q_2^t

$$t = \frac{1}{4} m(m+1)(m-2)(m-3).$$

2. Es sei G eine zu A_s parallele Gerade, die ihr zugehörende $S^{2\mu-m+1}$ hat dann nach §. 2, 3. G' zur $(m-1)$-fachen Tangente, wobei G zwischen G' und A_s in der Mitte verlauft, G und G_∞ sind $(\mu-m+1)$-fache Tangenten. Die Q_0^τ schneidet G nur noch in $\tau-(m+1)(m-2) = (m^2-1)(m-2)$ Punkten, so dass die Ordnung von $S^{2\mu-m+1}$ sich gleich $(m^2-1)(m-2)+2(\mu-m+1)$ $= m(m^2-3)-(m^2+m-4)$ ergibt. Schneidet mithin G die Curve Q_2^t noch in t' Punkten, so hat $S^{2\mu-m+1}$ nur t' Doppeltangenten und es ist daher:

$$\begin{aligned} m(m^2-3)-(m^2+m-4) &= (2\mu-m+1)(2\mu-m)-(m-1)(m-2) \\ &\quad - 2(\mu-m+1)(\mu-m) - 2t' \\ &= 2\mu(2\mu-1)-2\mu(\mu-1)-2(m-1)^2-2t' \end{aligned}$$

woraus:

$$t' = t - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)$$

folgt, d. h. Q'_2 hat im Punkte Q_∞ einen $t - t' = \frac{1}{2}(m-2)$. $(m-3)$-fachen Punkt.

Die A_s selbst zugehörende $S^{2\mu-m+1}$ hat in a_∞ einen $(m-3)$-fachen Selbstberührungspunkt und A_s ist $(\mu-m+2)$-fache Tangente von $S^{2\mu-m+1}$. Die Ordnung von $S^{2\mu-m+1}$ ergibt sich daher gleich: $2(\mu-m+2)+\tau-(m+1)(m-2) = m(m^2-3)-(m^2+m-6)$ und da G_∞ eine $(\mu-m+1)$-fache Tangente ist, so ergibt sich die Relation:

$$m(m^2-3)-(m^2+m-6) = (2\mu-m+1)(2\mu-m)-(\mu-m+2).$$
$$(\mu-m+1)-(m-2)(m-3)-(\mu-m+1)(\mu-m)-2t''$$

wenn $S^{2\mu-m+1}$ noch t'' Doppeltangenten hat. Hieraus folgt:

$$t'' = t' - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)-1$$

Nun schneidet Q'_2 die A_s in den t'' gefundenen Punkten, aber auch in den $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Mitten der endlichen auf A_s gelegenen Sehnen, so dass also im Endlichen $t''+\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Punkte von Q^t_2 und in a_∞ daher:

$$t-t''-\frac{1}{2}(m-2)(m-3) = t-t'+1$$

Punkte auf A_s liegen, d. h. die Asymptote A_s berührt einen Zweig der Q^t_2 in a_∞. Q^t_2 geht durch die $2s''$ Berührungspunkte von S^s_2 auf Q_∞.

3. Q^t_2 geht durch die Punkte T° von C^m, in denen die Tangente $\mathfrak{T}^\circ$ für eine Sehne gehälftet wird §. 1, 5. Die übrigen Schnittpunkte mögen R° heissen, sie sind solche Punkte der C^m, welche Mitte einer Doppelsehne sind. Ihre Anzahl sei σ_0, dieselbe ergibt sich:

$$\sigma_0 = mt - m\left[\frac{1}{2}(m-2)(m-3)+1\right]-\tau_0$$

und nach Einführung des Wertes aus §. 1, 8.:

$$\sigma_0 = \frac{1}{4}\, m\,(m-2)\,(m-3)\,(m^2-m-10) - m$$
$$= \frac{1}{4} m\,(m-4)(m^3-2m^2-7m+16).$$

Da die τ_0 Punkte T^0 auf Curven von der Ordnung $\frac{1}{2}(m-2)$. $(m-3)\,(m-4)$ liegen, so ersieht man leicht, dass durch die σ_0 Punkte R^0 Curven von der Ordnung

$$\left[\frac{1}{4}\,(m-2)\,(m-3)\,(m^2-m-10)-1\right]$$

gehen.

§. 6. Die Enveloppe $S_1^{m(m-1)(m-2)}$.

1. Die Sehnen S_1 der Curve C^m, deren Mitten auf C^m liegen, hüllen eine Curve ein von der Classe $m\,(m-1)\,(m-2)$. Denn die $Q^{2\mu}$, welche einem Punkte zugehört, schneidet C^m, ausser in den m Punkten a_∞ und den $m\,(m-1)$ Berührungspunkten der Tangenten von Q aus noch in

$$2\mu\, m - m\,(m-1) - m\,(m-1) = m\,(m-1)\,(m-2)$$

Punkten Q_1, die mit Q verbunden offenbar Sehnen S_1, also Tangenten von $S_1^{m(m-1)(m-2)}$ sind. Die Punkte Q_1 liegen auf einer Curve Q_1^{2p} von der Ordnung $2p = (m-1)\,(m-2)$.

Durch einen Punkt Q der Asymptote A_s gehen nur $2p\,m-$ $2\,(m-2)$ Sehnen S_1, indem $Q_s^{2\mu-1}$ nur in soviel Punkten schneidet, die je eine S_1 liefern. Es ist also A_s für S_1^{2pm} eine $2\,(m-2)$-fache Tangente. Ebenso ergibt sich, dass G_∞ eine pm-fache Tangente ist, und da von a_∞ nur $pm-3\,(m-2)$ Tangenten von S_1^{2pm} gehen, die nicht in G_∞ oder A_s liegen, indem $a_\infty^{\mu-1}$ diese Zahl einfach ergibt, so zählt A_s für $3\,(m-2)$ Tangenten aus dem Punkte a_∞, d. h. A_s ist Tangente in $(m-2)$ im Endlichen gelegenen Punkten und in $(m-2)$ in den Punkt a_∞ fallenden Punkten. Dieser ist also $(m-3)$-facher Selbstberührungspunkt.

Die pm Berührungspunkte auf G_∞ sind zufolge der Construction des Berührungspunktes einer $S^{2\mu}$ (in §. 2, 1.) leicht anzugeben. Sind a_∞, b_∞, c_∞ drei der Punkte von C^m auf G_∞ und A_s, B_s, C_s ihre Tangenten, so ist $\overline{a_\infty\, b_\infty}$ eine Sehne, deren Mitte c_∞ ist. Schneiden sich nun die Tangenten A_s, B_s in Q', so hat man auf G_∞ den Punkt zu suchen, welcher der $S^{2\mu-m+1}$ als Berührungspunkt zugehört, die C_s nach §. 2 zugeordnet wird. Hiezu hat man aber nur, da hier $\mathfrak{M}$ wieder G_∞ ist, $\overline{Q'c_\infty}$ zu ziehen und zu diesem Strahl den zu suchen, der A_s und B_s von ihm harmonisch trennt. Derselbe geht durch die Mitte der Strecke, welche A_s und B_s auf C_s abschneiden.

Die S_1^{2pm} geht durch die $3m\,(m-2)$ Wendepunkte der C^m und berührt die Wendetangenten. [Steiner §. 26 IVc, pag. 587.]

Die $\sigma_0 = \frac{1}{4}\,m\,(m-2)\,(m-3)\,(m^2-m-10)-m$ Tangenten S_0 von S_2^s, welche ihre Mitte Q_2^0 in C^m haben, sind offenbar Doppeltangenten von S_1^{2pm}

2\. Lässt man Q_∞ die G_∞ durchlaufen, so wird die Curve Q_1^p, welche die Mitten Q_1 der p Tangenten von S_1^{2pm} ausschneidet, die die Richtung Q_∞ haben, ein System durchlaufen, so dass durch jeden Punkt P von C^m $(\mu-1)$-Curven Q_1^p gehen. Die $(\mu-1)$ Sehnen S_1, welche in P halbirt werden, bestimmen auf G_∞ die $(\mu-1)$ Punkte Q_∞, deren zugehörige Q_1^p durch P geht. Diese $(\mu-1)$ Curven Q_1^p schneiden ausser in P noch in $(mp-1)\,(\mu-1)$ Punkten P'. Berührt nun eine Curve Q_1^p die C^m in P, so wird der zugehörige Punkt Q_∞ ein Punkt von S_1^{2pm} sein, denn die zugehörige Q_∞^μ muss die Tangente von C^m in P berühren. Wir haben also nur zu finden, wie oft Q_1^p die C^m berührt, um die Anzahl Punkte von S_1^{2pm} auf G_∞ zu finden, deren Asymptoten von den A und von G_∞ verschieden sind. Nun schneiden die Q_1^p aus C^m eine Correspondenz $[(mp-1)\,(\mu-1),(mp-1)\,(\mu-1)]_{\mu-1}$ aus, die also

$$2\,(\mu-1)\,(mp-1)+2\,(\mu-1)\,p$$

Coïncidenzen besitzt. Unter diesen Coïncidenzen sind die oben erwähnten σ_0 Punkte Q_2^0 enthalten. Denn die Curve Q_∞^μ, welche dem unendlich fernen Punkte von S_0 entspricht, hat in Q_2^0 einen Doppelpunkt, also schneidet auch Q_1^p daselbst in zwei Punkten. Die τ_0 Punkte T^0 sind keine Coïncidenzen, da in T^0 ein Berührungspunkt einer Tangente und ein Schnittpunkt der Q_∞^p liegt, welche dem unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{T}^0$ entspricht. Coïncidenzen der Correspondenz liegen ferner in den Punkten a_∞. Die durch einen solchen Punkt a_∞ gehenden Q_1^p reduciren sich auf die eine Curve Q_1^p, welche durch die $(m-2)$ auf A

gelegenen Punkte von C^m geht und durch die Gruppe von pm— $3(m—2)$ Punkten die $a_\infty^{\mu-1}$ ausschneidet. Die Q_1^p schneidet daher die C^m in a_∞ in $2\,(m—2)$ Punkten, es fallen mithin $2\,(m—2)—1$ Punkte P', welche a_∞ entsprechen, in a_∞ zurück und da die Q_1^p $(\mu-1)$-fach zu zählen ist, so zählt a_∞ für $(\mu—1)\,[2\,(m—2)—1]$ Coïncidenzen.

Die nicht in a_∞ liegenden Punkte P' bestehen aus den $(m—2)$ Schnittpunkten von A_s und den $pm—3\,(m—2)$ Punkten auf $a_\infty^{\mu-1}$ jeder $(\mu—1)$-fach gezählt.

Es bleiben mithin:

$$2\,(\mu-1)\,(mp-1)+2\,(\mu-1)\,p-\frac{1}{4}\,m\,(m-2)\,(m-3)\,(m^2-m-$$
$$-10)+m-m\,(\mu-1)\,[2\,(m-2)-1]$$
$$=\frac{1}{4}\,m\,(m-2)(m^3-2m^2+7m-22)+m$$

Punkte übrig, in denen C^m von einer Q_1^p berührt wird, und deren entsprechender Punkt Q_∞ ist also ein Punkt von S_1^{2pm}. Da diese Curve noch pm Berührungspunkte auf G_∞ hat und die m Punkte a_∞ zu $(m—3)$-fachen Selbstberührungspunkten, so schneidet sie die G_∞ in

$$\frac{1}{4}\,m(m-2)(m^3-2m^2+7m-22)+m+m(m-1)\,(m-2)+m(m-2)$$
$$=\frac{1}{4}\,m\,(m-2)^2(m^2+11)+m$$

und dies ist also die Ordnung von S_1^{2pm}. [Frage von Steiner §. 26 IV *c*, pag. 588].

§. 7. Die Ortscurven $T_0^{m\,(m^2-4)}$ und $T^{m\,(m+1)\,(m-2)\,(m-3)}$.

1. Ist S eine Tangente von C^m, a ihr Berührungspunkt, so liegen auf ihr $(m-2)$ Mitten T_0 der Sehnen, welche a zu einem Endpunkt haben, und $\frac{1}{2}\,(m—2)\,(m—3)$ Mitten der Sehnen, die keinen Endpunkt in a haben.

Die Ordnung x der Curve T_0^x, welche der Ort der Mitten T_0 ist, kann auf folgende Art gefunden werden. Die innere Polare J^{m-1} und die äussere Polare A^{m-1} eines solchen Punktes T_0 schneiden sich in dem Berührungspunkte a der Tangente von C^m. Lässt man einen Punkt P nun eine Gerade G durchlaufen, so beschreiben die äusseren Polaren A^{m-1} einen Büschel und die inneren J^{m-1} ein System vom Index m.[1] Durch den Punkt P von G sind die A^{m-1} und J^{m-1} einander ein-eindeutig zugeordnet und, da sich J^{m-1} und A^{m-1}, welche denselben Pol P haben, stets auf G_∞ schneiden, so erzeugen die Systeme noch eine Curve B^{m^2-2}, von der Ordnung m^2-2. Dieselbe schneidet C^m in jedem Schnittpunkt von G doppelt, denn die J^{m-1} hat in demselben, ebenso wie A^{m-1}, mit C^m zwei Punkte gemeinschaftlich. Die übrigen $m(m^2-2)-2m = m(m^2-4)$ Schnittpunkte von B^{m^2-2} sind Punkte a, deren Tangenten auf G einen Punkt T_0 haben, also schneidet G die Curve T_0^x in $x = m(m^2-4)$ Punkten. Die x Punkte a auf C^m liegen auf Curven $(m^2-4)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Legen wir G parallel zu einer Asymptote A_s, so wird das System der J^{m-1} nur mehr den Index $(m-1)$ haben und das Erzeugnis des Büschels der A^{m-1} und des Systemes J^{m-1} wird blos eine Curve B^{m^2-m-1}, von der Ordnung (m^2-m-1). Sie hat in a_∞ einen $(m-2)$-fachen Punkt, nachdem diesem Punkte die A_s und die $(m-2)$-mal gezählte G_∞ als J^{m-1} zugehört, und die entsprechende A^{m-1} auch durch a_∞ geht. Es schneidet daher C^m die Curve B^{m^2-m-1} noch in

$$m(m^2-m-1)-2(m-1)-(m-2) = m(m^2-4)-(m^2-4)$$

Punkten, die im Endlichen liegen und deren Tangenten Punkte T_0 auf G geben. Die Geraden G haben daher mit T_0^x in a_∞ (m^2-4) Schnittpunkte gemeinschaftlich, diese Punkte sind daher für T_0^x (m^2-4)-fach. A_s berührt $(m-2)$ Zweige in a_∞. Die übrigen $m(m-1)-2$ Asymptoten von T_0^x, welche durch a_∞ gehen, werden durch die Tangenten von C^m bestimmt, welche zu A_s parallel gehen, und zwar verlaufen sie in der Mitte zwischen diesen und A_s.

Die von Steiner §. 26, VI α angegebene Vielfachheit der Punkte a_∞, nämlich $m(m-1)$, ist ungenau, was schon daraus

[1] Soll die innere Polare eines Punktes P durch einen Punkt Q gehen, so ist der Ort von P eine Curve $m$ter Ordnung, welche mit C^m parallele Asymptoten hat. Liegt P auf C^m, so ist diese Curve mit der Q^m des §. 1, 3. identisch.

ersichtlich, dass T_0^x die G_∞ nur in den m Punkten a_∞ schneiden kann, also jeder $(m^2—4)$-fach sein muss. Die später folgende Bemerkung von Steiner: „Für die Basis C^3 hat man als Ort der Mitten T_0 aller Tangenten eine Curve T_0^{12}, wie oben (§. 15, IV)", ist wahrscheinlich ein Druckfehler, denn es müsste T_0^{15} heissen und sie kommt in §. 15 nicht vor. Nach Steiner müsste aber diese T_0^{15} in jedem Punkte a_∞ einen $m(m-1) = 6$-fachen Punkt haben, was unmöglich ist.

Die T_0^x hat mit C^m die $3m(m-2)$ Wendepunkte und Wendetangenten gemeinschaftlich, schneidet daher ausserdem noch in:

$$m^2(m^2—4) — m^2(m^2—4) — m(m—2) — 9m(m—2)$$
$$= m(m—2)(m—3)(m+4)$$

Punkten, woraus folgt: Eine Curve C^m hat i. A. $m(m—2).(m—3)(m+4)$ solche Tangenten, bei welchen ein Schnittpunkt b in der Mitte zwischen dem Berührungspunkt a und einem anderen Punkte c liegt. [Steiner §. 26 IV, α, S. 590.] Die obige Zahl stimmt mit der von Steiner angegebenen, wird aber nicht erhalten, wenn man die Vielfachheit der Punkte a_∞ nach der dortigen Angabe in Rechnung zieht.

2. Der Ort der $\frac{1}{2}(m—2)(m—3)$ Mitten T der Sehnen, welche keinen Endpunkt in dem Berührungspunkte a haben, ist eine Curve T^y, von der Ordnung y. Ihre Ordnung y ergibt sich nun leicht, nachdem die Ordnung von T_0^x bekannt ist. Ist $S^{2\mu}$ die einer Geraden G nach §. 2 zugehörige Enveloppe, so sahen wir §. 2, 5, dass sie mit C^m $y+2x$ Tangenten gemeinschaftlich hat.

Nach der daselbst gegebenen Definition von x und y ersieht man nun, dass x die Ordnung von T_0^x und y die Ordnung von T^y ist. Da sich die Relation:

$$y + 2x = m^2(m-1)^2 - 2m \tag{1}$$

ergab, so folgt, wenn $x = m(m^2—4)$ eingesetzt wird

$$y = m(m+1)(m—2)(m—3)$$

als Ordnung der Curve T^y.

Für die $S^{2\mu-m+1}$, welche einer zu A_s parallel laufenden G entspricht, ergab sich die Relation:

$$y' + 2x' = m(m-1)^3 - 2(m-1) \qquad (2)$$

und es ist klar, dass y' und x' die Anzahl im Endlichen gelegener Schnittpunkte von G mit T_0^x und T^y bedeutet. Subtrahirt man (2) von (1), so erhält man für die Vielfachheit der Punkte von T_0^x und T^y die Relation:

$$y - y' + 2(x - x') = m(m-1)^2 - 2 \qquad (3)$$

also mit Rücksicht auf (1), da $m(x - x') = x$ ist,

$$m(y - y') = y$$

oder

$$y - y' = (m+1)(m-2)(m-3)$$

als Vielfachheit für die Punkte a_∞ der T^y. Die Asymptote A_s schneidet auch nur in $y - y'$ Punkten in a_∞, ist also keine Asymptote von T^y. Denn aus der dritten in §. 2, 5 abgeleiteten Relation:

$$y'' + 2x'' = (m^2 - 2m + 1)\,m(m-1) - (2m-3) - \frac{1}{2}\,m(m-1) \qquad (4)$$

ist ersichtlich, dass $y'' + \frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ die Anzahl Schnittpunkte von T^y mit A_s bedeutet, die im Endlichen liegen, also $y - y'' - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ die Schnittpunkte sind, die in a_∞ fallen. Da $x - x'' = m^2 - 4 + m - 2 = (m-2)(m+3)$ ist, so folgt, wenn man (4) von (1) subtrahirt:

$$y - y'' + 2(x - x'') = m(m-1)^2 - 3 + \frac{1}{2}\,m(m-1)$$

also:

$$y - y'' - \frac{1}{2}(m-2)(m-3) = (m+1)(m-2)(m-2).$$

T^y geht offenbar durch die Berührungspunkte der $\frac{1}{2}\,m(m-2)(m^2-9)$ Doppeltangenten von C^m und berührt C^m in dem τ_0 Punkt

T^0 des §. 1, 8. Sie schneidet daher C^m noch in:

$$m^2(m+1)(m-2)(m-3)-m(m+1)(m-2)(m-3)$$
$$-m(m-2)(m^2-9)-m(m-2)(m-3)(m+4)$$
$$=m(m^2-4)(m-3)(m-4)$$

Punkten, d. h. C^m hat $m(m^2-4)(m-3)(m-4)$ solche Tangenten, bei welchen ein Schnitt b in der Mitte zwischen zwei anderen c, d liegt. [Vergl. dagegen Steiner §. 26 VI, pag. 59.]

Die Punkte b liegen auf Curven $(m^2-4)(m-3)(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung.