Über Raumcurven vierter Ordnung erster Art und die zugehörigen elliptischen Functionen

von

Georg Pick in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. März 1889.)

Im Folgenden soll eine möglichst vollständige Darstellung der elliptischen Functionen als Covarianten einer Raumcurve vierter Ordnung gegeben werden. Als Arbeiten, welche einen verwandten Gegenstand, nämlich die Parameterdarstellung solcher Raumcurven betreffen, habe ich jene von Westphal (Math. Ann., Bd. XIII) und Harnack (Math. Ann., Bd. XV) anzuführen. Ich gehe indessen hier auf diese Seite des Problems nicht ein, sondern behandle vielmehr die umgekehrte Aufgabe: die elliptischen Functionen von längs der Curve erstreckten Integralen durch die Coordinaten der als Integralgrenzen auftretenden Punkte in endgiltiger Form auszudrücken. Die Methode, welche zur Erreichung dieses Zweckes führt, war durch Untersuchungen über elliptische Functionen im ternären Gebiet[1] bereits gegeben. Hingegen war es nöthig, eine Anzahl von Sätzen über die Covarianten zweier Flächen zweiter Ordnung neu aufzustellen, da sich, wie es scheint, ausser der oben erwähnten Abhandlung von Westphal über diesen Gegenstand nichts Wesentliches in der Literatur vorfindet. Der erste Theil der nachfolgenden Arbeit ist so freilich ausgedehnter gerathen, als ursprünglich beabsichtigt war. Ich hoffe jedoch, dass einige in demselben enthaltene Entwicklungen ein über die hier massgebenden Zwecke hinausreichendes Interesse beanspruchen dürfen, als Beiträge zu einer invarianten theoretischen Bearbeitung des Büschels quadratischer quaternärer Formen.

---

[1] Diese Sitzber. Juni 1886 und Juli 1888; Math. Ann., Bd. XXVIII.

I. Theil.

Von den simultanen Invarianten und Covarianten zweier quaternärer Formen zweiten Grades.

§. 1. Das System.

Zwei quaternäre Formen zweiten Grades f, f' seien symbolisch durch

$$f = a_x^2 = b_x^2 = . \qquad f' = a_x'^2 = b_x'^2 = .$$

gegeben; gleichzeitig mögen ihre zugehörigen Formen

$$(abcu)^2, \quad (a'b'c'u)^2$$

beziehungsweise durch

$$u_\alpha^2, \quad u_{\alpha'}^2$$

bezeichnet werden.[1] Dann lassen sich die bekannten Invarianten und Covarianten folgendermassen symbolisch darstellen:

Invarianten:

$$A = a_\alpha^2, \; A' = a_\alpha'^2, \; A'' = (aba'b')^2, \; A''' = a_{\alpha'}^2, \; A^{IV} = a_{\alpha'}'^2;$$

Covarianten:

$$r = r_x^2 = a'_\alpha b'_\alpha a'_x b'_x, \quad r' = r_x'^2 = a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_x,$$

$$\Delta = \Delta_x^4 = (aa'rr')\, a_x a'_x r_x r'_x$$
$$= (aba'b')\, b_{\alpha'} c_{\alpha'} b'_\alpha c'_\alpha a_x a'_x c_x c'_x.$$

Diese Formen, deren Kenntnis wohl auf Hesse und Clebsch zurückzuführen ist,[2] haben, wie kurz resumirt werden mag, für die gegebenen Flächen folgende Bedeutung. Die A sind die Coëfficienten der Gleichung vierten Grades für die Parameter der vier Kegel in dem Büschel $f + \lambda f' = 0$. $r = 0$ bedeutet die Polarfigur von $f' = 0$ in Bezug auf $f = 0$, $r' = 0$ die von $f = 0$ in Bezug auf $f' = 0$. Endlich ist $\Delta = 0$ die Gleichung des gemeinsamen Polartetraëders der Flächen, welches zugleich auch Polar-

[1] Vergl. die analoge Bezeichnung im ternären Gebiet bei Gordan (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, S. 288 ff.) und auch Westphal, a. a. O.

[2] Hesse, Vorlesungen über Raumgeometrie; Clebsch, Über das Problem der Normalen etc., Crelle's Journal Bd. LXII. Die Formen finden sich sämmtlich bei Westphal, a. a. O.

tetraëder von $r=0$ und $r'=0$, wie überhaupt jeder covarianten Fläche zweiten Grades ist.

Es soll nun bewiesen werden, dass jede ganze und rationale simultane Invariante oder Covariante der Grundformen f, f' durch die zehn oben zusammengestellten Formen ganz und rational mit numerischen Coëfficienten dargestellt werden kann. Zunächst lässt sich jede Covariante bekanntlich als Aggregat symbolischer Producte voraussetzen. Als Factoren treten dabei auf: Erstens solche von den Formen

$$a_x,\ b_x, \ldots;\ a'_x,\ b'_x, \ldots$$

zweitens Klammerfactoren, wie

$$(abcd),\ (abca'),\ (aba'b'),\ (aa'b'c'),\ (a'b'c'd').$$

Mit Hilfe der Identität

$$(abcd)e_x-(abce)d_x+(abde)c_x-(acde)b_x+(bcde)a_x=0$$

lassen sich nun leicht eine Reihe von Sätzen[1] aufstellen, welche zusammen den angekündigten Nachweis bilden.

1. Finden sich in einem Klammerfactor eines symbolischen Productes drei Symbole derselben Grundform vereinigt, so kann stets vorausgesetzt werden, dass dieselben drei Symbole noch in einem zweiten solchen Factor vereinigt vorkommen. Die Umformung, welcher das symbolische Product nöthigenfalls zu unterziehen ist, wird nach einer der beiden folgenden Gleichungen vorzunehmen sein:

$$(abcu)a_y b_z c_t = \frac{1}{6}(abcu)\begin{vmatrix} a_y & a_z & a_t \\ b_y & b_z & b_t \\ c_y & c_z & c_t \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}(abcu)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}u_\alpha(yzt\alpha);$$

[1] Beim Beweise dieser Sätze ist von je zwei Gleichungen, die durch Vertauschung der Grundformen in einander übergehen, immer nur eine wirklich angeführt.

$$(abcu)(abvw)c_y = \frac{1}{3}(abcu)\{(abvw)c_y - (acvw)b_y + (bcvw)a_y\}$$

$$= \frac{1}{3}(abcu)\{(abcw)v_y - (abcv)w_y\}$$

$$= \frac{1}{3}u_\alpha w_\alpha v_y - \frac{1}{3}u_\alpha v_\alpha w_y.$$

Zu der ersten dieser Gleichungen ist zu bemerken, dass y, z, t offenbar von einander verschieden sein müssen, daher mindestens zwei von diesen Grössenreihen aus Determinantenresten bestehen. Mit Benützung einer solchen Reihe von Determinantenresten lässt sich desshalb stets die neue Klammergrösse $(yzt\alpha)$ aus dieser provisorischen Form in einen Ausdruck zurückverwandeln, der nur aus Factoren der oben aufgezählten Arten zusammengesetzt ist.

Nach diesem ersten Satze ist klar, dass Klammerfactoren von den Formen $(abcd)$, $(abca')$, $(aa'b'c')$, $(a'b'c'd')$ immer, beziehungsweise durch Factoren der Formen a_α, a'_α, $a_{\alpha'}$, $a'_{\alpha'}$ ersetzt werden können. Als einziger „echter“ Klammerfactor verbleibt dann nur $(aba'b')$.

2. Producte mit dem symbolischen Factor a_α (beziehungsweise $a'_{\alpha'}$) besitzen den wirklichen Factor A (beziehungsweise A^{IV}). Beweis hiefür ist die Gleichung

$$u_\alpha a_y a_\alpha = (abcd)(abcu)d_y$$

$$= \frac{1}{4}(abcd)\{(abcu)d_y - (abdu)c_y + (acdu)b_y - (bcdu)a_y\}$$

$$= \frac{1}{4}A.u_y.$$

3. Producte mit den symbolischen Factoren $a'_\alpha a'_\beta$ (beziehungsweise $a_{\alpha'} a_{\beta'}$) zerfallen in Glieder, welche einen der wirklichen Factoren A, A' (beziehungsweise A^{IV}, A''') besitzen. Zum Beweise quadriren wir die Identität

$$(abca')u_\alpha - (abcu)a'_\alpha = -(bca'u)a_\beta + (aca'u)b_\beta - (aba'u)c_\beta,$$

wodurch nach Zusammenziehung gleichwerthiger Posten entsteht:

$$2A'.u_\alpha^2 - 2a'_\alpha a'_\beta u_\alpha u_\beta = 3A.(aba'u)^2 - 6b_\alpha c_\alpha(aba'u)(aca'u),$$

tetraëder von $r=0$ und $r'=0$, wie überhaupt jeder covarianten Fläche zweiten Grades ist.

Es soll nun bewiesen werden, dass jede ganze und rationale simultane Invariante oder Covariante der Grundformen f, f' durch die zehn oben zusammengestellten Formen ganz und rational mit numerischen Coëfficienten dargestellt werden kann. Zunächst lässt sich jede Covariante bekanntlich als Aggregat symbolischer Producte voraussetzen. Als Factoren treten dabei auf: Erstens solche von den Formen

$$a_x, b_x, \ldots; \; a'_x, b'_x, \ldots$$

zweitens Klammerfactoren, wie

$$(abcd), \; (abca'), \; (aba'b'), \; (aa'b'c'), \; (a'b'c'd').$$

Mit Hilfe der Identität

$$(abcd)e_x - (abce)d_x + (abde)c_x - (acde)b_x + (bcde)a_x = 0$$

lassen sich nun leicht eine Reihe von Sätzen[1] aufstellen, welche zusammen den angekündigten Nachweis bilden.

1. Finden sich in einem Klammerfactor eines symbolischen Productes drei Symbole derselben Grundform vereinigt, so kann stets vorausgesetzt werden, dass dieselben drei Symbole noch in einem zweiten solchen Factor vereinigt vorkommen. Die Umformung, welcher das symbolische Product nöthigenfalls zu unterziehen ist, wird nach einer der beiden folgenden Gleichungen vorzunehmen sein:

$$(abcu)a_y b_z c_t = \frac{1}{6}(abcu)\begin{vmatrix} a_y & a_z & a_t \\ b_y & b_z & b_t \\ c_y & c_z & c_t \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}(abcu)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}u_\alpha(yzt\alpha);$$

[1] Beim Beweise dieser Sätze ist von je zwei Gleichungen, die durch Vertauschung der Grundformen in einander übergehen, immer nur eine wirklich angeführt.

$$(abcu)(abvw)c_y = \frac{1}{3}(abcu)\{(abvw)c_y - (acvw)b_y + (bcvw)a_y\}$$

$$= \frac{1}{3}(abcu)\{(abcw)v_y - (abcv)w_y\}$$

$$= \frac{1}{3}u_\alpha w_\alpha v_y - \frac{1}{3}u_\alpha v_\alpha w_y.$$

Zu der ersten dieser Gleichungen ist zu bemerken, dass y, z, t offenbar von einander verschieden sein müssen, daher mindestens zwei von diesen Grössenreihen aus Determinantenresten bestehen. Mit Benützung einer solchen Reihe von Determinantenresten lässt sich desshalb stets die neue Klammergrösse $(yzt\alpha)$ aus dieser provisorischen Form in einen Ausdruck zurückverwandeln, der nur aus Factoren der oben aufgezählten Arten zusammengesetzt ist.

Nach diesem ersten Satze ist klar, dass Klammerfactoren von den Formen $(abcd)$, $(abca')$, $(aa'b'c')$, $(a'b'c'd')$ immer, beziehungsweise durch Factoren der Formen a_α, a'_α, $a_{\alpha'}$, $a'_{\alpha'}$ ersetzt werden können. Als einziger „echter" Klammerfactor verbleibt dann nur $(aba'b')$.

2. Producte mit dem symbolischen Factor a_α (beziehungsweise $a'_{\alpha'}$) besitzen den wirklichen Factor A (beziehungsweise A^{IV}). Beweis hiefür ist die Gleichung

$$u_\alpha a_y a_\alpha = (abcd)(abcu)d_y$$

$$= \frac{1}{4}(abcd)\{(abcu)d_y - (abdu)c_y + (acdu)b_y - (bcdu)a_y\}$$

$$= \frac{1}{4}A \,.\, u_y.$$

3. Producte mit den symbolischen Factoren $a'_\alpha a'_\beta$ (beziehungsweise $a_{\alpha'} a_{\beta'}$) zerfallen in Glieder, welche einen der wirklichen Factoren A, A' (beziehungsweise A^{IV}, A''') besitzen. Zum Beweise quadriren wir die Identität

$$(abca')u_\alpha - (abcu)a'_\alpha = -(bca'u)a_\beta + (aca'u)b_\beta - (aba'u)c_\beta,$$

wodurch nach Zusammenziehung gleichwerthiger Posten entsteht:

$$2A' \,.\, u_\alpha^2 - 2a'_\alpha a'_\beta u_\alpha u_\beta = 3A \,.\, (aba'u)^2 - 6b_\alpha c_\alpha (aba'u)(aca'u),$$

oder, wenn wir auf das letzte Glied rechts Satz 2 zur Anwendung bringen und dann ordnen

$$a'_\alpha a'_\beta u_\alpha u_\beta = A'.u_\alpha^2 - \frac{3}{4} A.(aba'u)^2.$$

Hieraus ergibt sich endlich durch Polarisiren die Endgleichung

$$a'_\alpha a'_\beta u_\alpha v_\beta = A'.u_\alpha v_\alpha - \frac{3}{4} A.(aba'u)(aba'v).$$

4. Enthält ein Product mindestens zwei echte (s. Satz 1) Klammerfactoren, so kann dasselbe in Glieder zerlegt werden, welche entweder weniger echte Klammerfactoren enthalten als der ursprüngliche Ausdruck, oder den wirklichen Factor A'' besitzen. Wir gehen von dem ungünstigsten Fall aus, wo die beiden angenommenen Klammerfactoren $(aba'b')$, $(cdc'd')$ keinen Buchstaben gemein haben. Ein weiterer, in dem Product nothwendigerweise vorhandener Factor werde durch b_y bezeichnet. Die Identität

$$(cdc'd')\,b_y = (bdc'd')\,c_y - (bcc'd')\,d_y + (bcdd')\,c'_y - (bcdc')\,d'_y$$

lehrt, dass unter Ausserachtlassung von Gliedern, die nach Satz 1 eine Reduction der Anzahl der Klammerfactoren zulassen, stets vorausgesetzt werden darf, dass die beiden fraglichen echten Klammerfactoren einen Buchstaben gemeinsam haben. Nun ist weiter

$$(aba'b')(bcc'd')\,a_y = \frac{1}{2}(aba'b')\{(bcc'd')\,a_y - (acc'd')\,b_y\}$$

$$= \frac{1}{2}(aba'b')\{-(abc'd')\,c_y + (abcd')\,c'_y - (abcc')\,d'_y\},$$

woraus hervorgeht, dass die beiden Factoren in der Form $(aba'b')$, $(abc'd')$ angenommen werden dürfen. Wir schliessen ähnlich weiter auf Grund der Relationen:

$$(abc'd')\,b'_y = (abb'd')\,c_y - (abb'c')\,d'_y - (bb'c'd')\,a_y + (ab'c'd')\,b_y$$

und

$$(aba'b')(abb'c')\,a'_y = \frac{1}{2}(aba'b')\{(abb'c')\,a'_y - (aba'c')\,b'_y\}$$

$$= \frac{1}{2}(aba'b')\{-(aba'b')\,c'_y - (ba'b'c')\,a_y + (aa'b'c')\,b_y\}.$$

Es ergibt sich also in der That nach Abtrennung von Theilproducten mit weniger Klammerfactoren ein Rest, welcher den Factor

$$A'' = (aba'b')^2$$

besitzt.

Die bewiesenen vier Sätze gestatten, sämmtliche irreducible Invarianten und Covarianten von f, f' unmittelbar anzusetzen. Man erhält gerade die oben zusammengestellten zehn Formen.

§. 2. Invarianten und Covarianten mit Combinanteneigenschaft.

Die Formen des aufgestellten Systems sollen nun auf Combinantenbildung hin untersucht werden. Zu diesem Zwecke unterwerfen wir dieselben sämmtlich der Aronhold'schen Operation δ, welche durch die Gleichung

$$\delta = \Sigma\, a'_{ik} \frac{\partial}{\partial a_{ik}}$$

erklärt wird, in welcher a_{ik} die wirklichen Coëfficienten von f, a'_{ik} die von f' bedeuten.

Zunächst ist

$$\delta f = f', \quad \delta f' = 0;$$

und ferner findet man leicht:

$$\delta A = 4A', \; \delta A' = 3A'', \; \delta A'' = 2A''', \; \delta A''' = A^{IV}, \; \delta A^{IV} = 0.$$

Für r erhält man

$$\delta r = 3a'_x b'_x (aba'c')(abb'c'),$$

und wenn man hier die im vorigen Paragraphen entwickelten Reductionsprincipien verwendet, ergibt sich

$$\delta r = r' - A'''f + \frac{3}{2} A''f'.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\delta r' = \frac{1}{2} A^{IV}f.$$

Diese beiden Formeln lassen nun erkennen, dass gegenüber der Operation δ nicht die Formen r, r' selbst, sondern gewisse aus ihnen abgeleitete, ein besonders einfaches Verhalten aufweisen. Diese mit φ, φ' zu bezeichnenden abgeleiteten Formen sind bis auf einen gemeinsamen numerischen Factor auf eindeutige Weise durch die Bedingungen bestimmt, dass sie ganze rationale, in Grad und Ordnung beziehungsweise mit r, r' übereinstimmende Covarianten sein sollen, welche den Relationen

$$\delta\varphi = \varphi', \ \delta\varphi' = 0$$

genügen. Man findet bei geeigneter Verfügung über den erwähnten numerischen Factor:

$$\varphi = r + \frac{1}{4} A''f - \frac{1}{2} A'f'.$$

$$\varphi' = r' + \frac{1}{2} A'''f + \frac{1}{4} A''f'.$$

Offenbar ist nun

$$\begin{aligned} \Delta &= (aa'rr')\, a_x a'_x r_x r'_x \\ &= (aa'\varphi\varphi')\, a_x a'_x \varphi_x \varphi'_x, \end{aligned}$$

woraus mit Rücksicht auf die Eigenschaften von φ, φ'

$$\delta\Delta = 0$$

hervorgeht.

Es ist klar, dass man in dem System des §. 1 die beiden Formen r, r' ohne Weiteres durch φ, φ' ersetzen darf. Das System besteht dann aus zehn Formen, welche sich auf vier Gruppen folgendermassen vertheilen:

$$\left.\begin{array}{c} A,\ A',\ A'',\ A''',\ A^{IV}; \\ f,\ f'; \\ \varphi,\ \varphi'; \\ \Delta. \end{array}\right\} \qquad \ldots 1)$$

Die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Gruppe

$$M,\ M',\ M'',\ldots M^{(k)}$$

bestehen in den Gleichungen

$$\delta M = kM',\ \delta M' = (k-1)M'',\ldots \delta M^{(k)} = 0$$

einerseits, andererseits in dem Umstande, dass sich die Glieder der Gruppe bei Vertauschung der Grundformen f, f' in umgekehrter Reihenfolge reproduciren. Wir werden den folgenden Erörterungen die etwas allgemeinere Voraussetzung zu Grunde legen, dass wir dahin gestellt lassen, ob bei Vertauschung von f und f' nicht gleichzeitig auch ein Zeichenwechsel sämmtlicher Glieder eintritt. In jedem Falle folgt unmittelbar das Bestehen der Gleichungen

$$\overline{\delta} M^{(k)} = kM^{(k-1)},\ldots \overline{\delta} M' = M,\ \overline{\delta} M = 0,$$

worin $\overline{\delta}$ die durch die Relation

$$\overline{\delta} = \Sigma\, a_{ik} \frac{\partial}{\partial a'_{ik}}$$

erklärte Relation bedeutet.

Es soll nun zunächst untersucht werden, in welche Grösse $M^{(r)}$ übergeht, wenn an Stelle der Grundformen f, f' die linearen Verbindungen derselben

$$\xi_1 f + \xi_2 f',\ \ \eta_1 f + \eta_2 f'$$

substituirt werden. Wir beginnen etwa damit,

$$\mathrm{M} = M(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 a'_{ik},\ \eta_1 a_{ik} + \eta_2 a'_{ik})$$

auszuwerthen. Sei ρ der Grad von M in den a_{ik}, ρ' derjenige in den a'_{ik}, so ist vorerst zu sehen, dass

$$\rho - \rho' = k.$$

Denn durch k-malige Ausübung der Operation δ geht M in $M^{(k)}$ über, dessen Grade daher beziehungsweise

$$\rho - k,\ \rho' + k$$

sind. Diese müssen aber nach der zweiten vorausgesetzten Eigenschaft, beziehungsweise mit ρ', ρ übereinstimmen.

Somit ist $M(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 a'_{ik},\ \eta_1 a_{ik} + \eta_2 a'_{ik})$ eine doppeltbinäre Form der Veränderlichen ξ, η, in den ξ vom Grade ρ, in den η vom Grade ρ'. Wir denken uns diese Form in bekannter Weise nach Potenzen von

$$(\xi\eta) = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$$

entwickelt:

$$\mathrm{M} = D_\eta^{\rho'}(\mu_{\rho'}) + D_\eta^{\rho'}(\mu_{\rho'-1}).(\xi\eta) + \ldots + \mu_0.(\xi\eta)^{\rho'}.$$

Die $\mu_{\rho'}$, $\mu_{\rho'-1}, \ldots \mu_0$ bedeuten hier binäre Formen der ξ allein von den Geraden $k+2\rho'$, $k+2(\rho'-1), \ldots k$, und durch die vorgesetzten D sind Polarisirungen angedeutet. Nun folgt aus der ersten über die M gemachten Voraussetzung

$$\Sigma \frac{\partial M(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 a'_{ik},\ \eta_1 a_{ik} + \eta_2 a'_{ik})}{\partial(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 a'_{ik})}.(\eta_1 a_{ik} + \eta_2 a'_{ik})$$
$$= k.M'(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 a'_{ik},\ \eta_1 a_{ik} + \eta_2 a'_{ik}),$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \xi_2}\eta_2 = k.\mathrm{M}';$$

in ähnlicher Weise erhält man ferner

$$\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \xi_2}\eta_2 = (k-1).\mathrm{M}'',$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}^{(k)}}{\partial \xi_1}\eta_1 + \frac{\partial \mathrm{M}^{(k)}}{\partial \xi_2}\eta_2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich erstens

$$\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)^{k+1} \mathrm{M} = 0,$$

d. h. es fehlen in der obigen Entwicklung von M alle Glieder bis auf das letzte, so dass wir setzen können:

$$M = \mu_\xi^k . (\xi\eta)^{\rho'}.$$

Zweitens folgt dann aus dieser Gleichung

$$M' = \mu_\xi^{k-1} \mu_\eta . (\xi\eta)^{\rho'}$$

$$M^{(k)} = \mu_\eta^k (\xi\eta)^{\rho'}$$

Setzen wir hier überall

$$\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0,\ \eta_1 = 0,\ \eta_2 = 1,$$

so werden die linken Seiten dieser Gleichungen der Reihe nach mit den einzelnen $M^{(\gamma)}$ identisch, während rechts die einzelnen Coëfficienten der Form μ_ξ^k zu stehen kommen. Es ist demnach

$$\mu_\xi^k = M\xi_1^k + (k)_1 M' \xi_1^{k-1} \xi_2 + \ldots + M^{(k)} \xi_2^k.$$

Mit Hilfe dieses Resultates ergibt sich nun eine sehr einfache Regel zur Bildung von Combinanten. Es sei $\Lambda(a_{ik}, a'_{ik})$ eine Invariante oder Covariante mit Combinanteneigenschaft, d. h. es sei

$$\Lambda(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 a'_{ik},\ \eta_1 a_{ik} + \eta_2 a'_{ik}) = (\xi\eta)^\sigma \Lambda(a_{ik}, a'_{ik}).$$

Dieselbe muss vor allen Dingen durch die Formen unseres Systems darstellbar sein, also

$$\Lambda(a_{ik}, a'_{ik}) = F(A, A', \ldots A^{IV};\ f, f';\ \varphi, \varphi';\ \Delta),$$

wo F eine ganze rationale Function bedeutet. Setzen wir in dieser Identität beiderseits an Stelle der a_{ik}, a'_{ik}, beziehungsweise $\xi_1 a_{ik} + \xi_2 a'_{ik}$, $\eta_1 a_{ik} + \eta_2 a'_{ik}$, so entsteht links

$$(\xi\eta)^\sigma \Lambda(a_{ik}, a'_{ik}),$$

während die rechte Seite in eine ganze rationale Function verschiedener Polaren der Formen

$$\left.\begin{aligned} A_\xi^4 &= A\xi_1^4 + 4A'\xi_1^3\xi_2 + 6A''\xi_1^2\xi_2^2 + 4A'''\xi_1\xi_2^3 + A^{IV}\xi_2^4, \\ f_\xi &= f\xi_1 + f'\xi_2, \\ \varphi_\xi &= \varphi\xi_1 + \varphi'\xi_2; \end{aligned}\right\} \quad \ldots 2)$$

und der Grössen Δ, $(\xi\eta)$ übergeht. Diesen Ausdruck denken wir uns nach Potenzen von $(\xi\eta)$ entwickelt. Dann müssen offenbar alle Glieder bis auf jenes mit $(\xi\eta)^\sigma$ verschwinden. Der Coëfficient dieses Gliedes ist von den ξ und η frei und, wie aus seiner Entstehung unmittelbar hervorgeht, ein Aggregat von simultanen Invarianten der binären Formen 2), multiplicirt mit Potenzen der Grösse Δ. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass nur eine jener binären Formen von höherem als dem ersten Grade ist, können wir dieses Resultat so aussprechen:

Jede simultane Invariante oder Covariante von f und f', welche Combinanteneigenschaft besitzt, lässt sich als ganze rationale Function mit numerischen Coëfficienten folgender Grössen darstellen:

1. Die Form Δ;

2. Die Formen des Systems der binären biquadratischen Form A^4_ξ mit den beiden Variablenreihen $\xi_1 = f'$, $\xi_2 = -f$ und $\xi_1 = \varphi'$, $\xi_2 = -\varphi$.

Umgekehrt ist jedes derartige Aggregat, wenn es nur gehörig homogen ist, eine Combinante.

§. 3. Von der Operation ϑ.

Es soll jetzt eine Operation untersucht werden, deren Studium in vieler Beziehung für das Verständniss des simultanen Systems von f, f' überhaupt nützlich ist. Doch beschränken wir uns hier darauf, die Wirkung derselben auf die Formen 1) des vorigen Paragraphen und einige aus diesen zusammengesetzte Grössen zu ermitteln. Die Operation selbst ist definirt durch die Relation

$$\vartheta = \Sigma\varphi_{ik}\frac{\partial}{\partial a_{ik}} + \Sigma\varphi'_{ik}\frac{\partial}{\partial a'_{ik}},$$

worin φ_{ik}, φ'_{ik} die wirklichen Coëfficienten von φ, φ' bedeuten. Es hat keine Schwierigkeit, mit Hilfe der in §. 1 angegebenen Reductionsprincipien die Wirkungen ϑ auf die Formen 1) zu beurtheilen. Da es überdies nützlich sein kann, die Resultate zu kennen, welche die einzelnen Operationen

$$\theta = \Sigma\varphi_{ik}\frac{\partial}{\partial a_{ik}}, \quad \theta' = \Sigma\varphi'_{ik}\frac{\partial}{\partial a'_{ik}}$$

liefern, so stelle ich dieselben in der folgenden Tabelle zusammen:

Form	Operation θ	Operation θ'
A	$2(A'^2-AA'')$	0
A'	$\frac{3}{4}(A'A''-AA''')$	$\frac{1}{4}(A'A''-AA''')$
A''	$\frac{1}{6}(3A''^2-2A'A'''-AA^{IV})$	$\frac{1}{6}(3A''^2-2A'A'''-AA^{IV})$
A'''	$\frac{1}{4}(A''A'''-A'A^{IV})$	$\frac{3}{4}(A''A'''-A'A^{IV})$
A^{IV}	0	$2(A'''^2-A''A^{IV})$
f	φ	0
f'	0	
	$-\frac{1}{2}(A''\varphi-A'\varphi')$ $+\frac{1}{48}f(AA^{IV}-16A'A'''+15A''^2)$ $+\frac{1}{8}f'(AA'''-A'A'')$	$\frac{1}{2}(A''\varphi-A'\varphi')$ $+\frac{1}{12}f(AA^{IV}-A'A'')$ $-\frac{1}{8}f'(AA'''-A'A'')$
	$-\frac{1}{2}(A'''\varphi-A''\varphi')$ $-\frac{1}{8}f(A'A^{IV}-A''A''')$ $+\frac{1}{12}f'(AA^{IV}-A'A''')$	$\frac{1}{2}(A'''\varphi-A''\varphi')$ $+\frac{1}{8}f(A'A^{IV}-A''A''')$ $+\frac{1}{48}f'(AA^{IV}-16A'A'''-15A''^2)$
Δ	0	0

Um die aus dieser Tabelle zu folgernden Formeln für die Operation

$$\vartheta = \theta+\theta'$$

in übersichtlicher Weise schreiben zu können, führen wir für die Formen des vollen Systems von A_ξ^4 noch folgende, auch sonst übliche Abkürzungen ein:

$$(AB)^4 = i,\ (AB)^2(AC)^2(BC)^2 = j,\ (AB)^2 A_\xi^2 B_\xi^2 = H_\xi^4,$$
$$(AH) A_\xi^3 H_\xi^3 = T_\xi^6. \qquad \ldots 3)$$

Es ergibt sich dann zunächst

$$\vartheta A_\xi^4 = H_\xi^4,\ \vartheta f_\xi = \varphi_\xi,\ \vartheta \varphi_\xi = \frac{5}{96} i . f_\xi,\ \vartheta \Delta = 0. \qquad \ldots 4)$$

Hieraus folgt weiter ohne Schwierigkeit

$$\vartheta i = -2j,\ \vartheta j = -\frac{1}{2} i^2,\ \vartheta H_\xi^4 = -\frac{1}{3} i . A_\xi^4,\ \vartheta T_\xi^6 = 0. \quad \ldots 5)$$

§. 4. Von der zwischen den Invarianten und Covarianten von f, f' bestehenden Relation.

Um über die zwischen den Formen unseres Systems möglicherweise bestehenden Relationen vollständigen Aufschluss zu erhalten, benützen wir die bekannte kanonische Darstellung derselben. Wir setzen also

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2,$$
$$f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

worauf die übrigen in §. 1 aufgestellten Formen folgendermassen lauten:

$$r = 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_1^{-1} x_1^2 + \lambda_2^{-1} x_2^2 + \lambda_3^{-1} x_3^2 + \lambda_4^{-1} x_4^2)$$
$$r' = 6(\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3^2 x_3^2 + \lambda_4^2 x_4^2)$$
$$\Delta = -36\, x_1 x_2 x_3 x_4 . \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k)$$
$$A_\xi^4 = 24(\lambda_1\xi_1 + \xi_2)(\lambda_2\xi_1 + \xi_2)(\lambda_3\xi_1 + \xi_2)(\lambda_4\xi_1 + \xi_2).$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man ohne Weiteres, dass nur eine Relation von der in Rede stehenden Art existirt, und dass dieselbe gefunden wird, indem man x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 aus den ersten vier Gleichungen ausrechnet, und ihre Werthe in den Ausdruck für Δ^2 einsetzt. Eine nähere Überlegung zeigt ferner, dass sich Δ^2 als ganze rationale Function der übrigen Grössen ergeben muss. Denn bezeichnet man Kürze halber die Function

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$$

mit $\omega(\lambda)$, so sind die Nenner, welche sich bei der Ausrechnung von x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 ergeben, offenbar beziehungsweise $\omega'(\lambda_1)$, $\omega'(\lambda_2)$, $\omega'(\lambda_3)$, $\omega'(\lambda_4)$. Also ist

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 \,.\, \omega'(\lambda_1)\,\omega'(\lambda_2)\,\omega'(\lambda_3)\,\omega'(\lambda_4)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\Delta^2$$

eine homogene Function vierten Grades der f, f', φ, φ' mit Coëfficienten, welche ganz und rational und überdies selbstverständlich symmetrisch in λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ist. Indem man diese Coëfficienten in bekannter Weise durch die A, A', A'', A''', A^{IV} ausdrückt,[1] erhält man zuletzt die gesuchte Relation von der angekündigten Beschaffenheit.

Zur wirklichen Aufstellung eignet sich jedoch dieses directe Verfahren wegen seiner Umständlichkeit kaum, und wir wollen dasselbe daher modificiren. Machen wir nämlich zunächst die vorläufige Annahme, dass die Werthe der Coordinaten x die Gleichungen

$$f = 0,\ f' = 0$$

befriedigen, oder, anders ausgesprochen, dass der Punkt auf der durch diese Gleichungen gegebenen Raumcurve liegt. Unter dieser Voraussetzung werden die aufzulösenden Gleichungen einfacher

$$\begin{aligned} 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_1^{-1}x_1^2 + \quad\ ) &= r \\ x_1^2 + . \quad &= 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + . \quad &= 0 \\ 6(\lambda_1^2 x_1^2 . \quad .) &= r', \end{aligned}$$

und die gesammte Rechnung wird leicht ausführbar. Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen geben dann ein ausreichendes Mittel, sich von jener beschränkenden Voraussetzung freizumachen.

Mit Hilfe der oben erwähnten Function $\omega(\lambda)$, welche nichts anderes ist als $\frac{1}{24} A_\xi^4$ für $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -\lambda$, erhält man nach dem

---

[1] Zweifel, ob sich hiebei nicht neuerdings Nenner einstellen, lassen sich von vornherein leicht beseitigen.

bekannten Lagrange'schen Verfahren aus den vier letztangesetzten Gleichungen

$$\frac{\omega'(\lambda_i)}{\lambda_i} x_i^2 = \frac{1}{6} r' - \frac{1}{6} \frac{r}{\lambda_i}$$

oder

$$\omega'(\lambda_i) x_i^2 = \frac{1}{6} (r' \lambda_i - r).$$

Da nun aus dem Eingangs dieses Paragraphen angegebenen Werthe von Δ sich

$$\Delta^2 = 6^4 \omega'(\lambda_1) \omega'(\lambda_2) \omega'(\lambda_3) \omega'(\lambda_4) x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2$$

ergibt, so hat man offenbar

$$\Delta^2 = \frac{1}{24} [A_\xi^4]_{\xi_1 = -r', \ \xi_2 = +r}$$

oder

$$\Delta^2 = \frac{1}{24} (Ar)^4.$$

Endlich ist nach §. 2 für $f = 0$, $f' = 0$

$$r = \varphi, \ r' = \varphi',$$

also auch

$$\Delta^2 = \frac{1}{24} (A\varphi)^4. \qquad \ldots 6)$$

Wir wollen jetzt die Annahme $f = 0$, $f' = 0$ fallen lassen. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Differenz

$$\Delta^2 - \frac{1}{24} (A\varphi)^4,$$

von welcher folgende Eigenschaften feststehen: Sie ist eine ganze rationale Covariante unserer Grundformen, besitzt Combinanteneigenschaft und muss sich durch die A, f und φ ganz und rational darstellen lassen; sie verschwindet ferner für $f = 0$, $f' = 0$, besitzt also keine Glieder, die von diesen beiden Grössen frei wären. Wir setzen dieselbe nach dem Satze des §. 2 an und denken uns den fraglichen Ausdruck nach der Dimension in den f geordnet, so dass wir von Bestandtheilen erster, zweiter, dritter und vierter Dimension sprechen können, die dann natürlich in den φ, beziehungsweise von der dritten, zweiten, ersten, nullten Dimension sind. Jeden einzelnen dieser Bestandtheile denken wir ferner nach Potenzen von

$$f\varphi'-f'\varphi=(f\varphi)$$

entwickelt. Die Coëfficienten der einzelnen so entstehenden Glieder sind dann Polaren von Formen des Systems von A_ξ^4 mit den Variablenreihen $f',-f$; $\varphi',-\varphi$. Welche Formen in Betracht kommen, erfahren wir einfach durch Abzählung der Grade in den Coëfficienten und Variablen der Grundformen. Auf solchem Wege gelangen wir zu dem Ansatz:

$$\begin{aligned}\Delta^2 = \frac{1}{24}(A\varphi)^4 &+ U_1.(H\varphi)^3(Hf)+U_2.i.(A\varphi)^2(Af)^2+U_3.j.(A\varphi)(Af)^3\\ &+U_4.i.(H\varphi)(Hf)^3+U_5.i^2.(Af)^4+U_6.j.(Hf)^4\\ &+U_7.j.(f\varphi)^2,\end{aligned}$$

wo die U numerische Coëfficienten bedeuten. Zur Bestimmung dieser Coëfficienten unterwerfen wir die erhaltene Gleichung der Operation ϑ, was leicht mit Hilfe der unter 4) und 5) in §. 3 angegebenen Relationen zu bewerkstelligen ist. Dies liefert eine ausreichende Menge von Bestimmungsgleichungen und es ergibt sich schliesslich:

$$\begin{aligned}\Delta^2 = \frac{1}{2^3.3}(A\varphi)^4 &+ \frac{1}{2^3.4}(H\varphi)^3(Hf)+\frac{i}{2^7.3}(A\varphi)^2(Af)^2\\ &+\frac{j}{2^6.3^2}(A\varphi)(Af)^3-\frac{i}{2^8.3}(H\varphi)(Hf)^3 \qquad 7)\\ &+\frac{i^2}{2^{13}.3}(Af)^4-\frac{j}{2^9.3^2}(Hf)^4.\end{aligned}$$

§. 5. Vergleich mit dem System einer ebenen Curve dritter Ordnung.

Die tiefgehenden Analogien zwischen dem System einer ebenen Curve dritter Ordnung und dem Formensystem, von welchem einige Bildungen hier besprochen worden sind, mögen in Kürze noch angedeutet werden. Gegenüber den Grundformen f, f' spielen die Covarianten gleicher Ordnung φ, φ' genau dieselbe Rolle wie die Hesse'sche Form gegenüber der ternären Grundform dritter Ordnung. Unter Anderem spricht sich dies in dem Vorhandensein einer Identität aus:

$$(a\varphi' uv)^2 = (a'\varphi uv)^2,$$

welche das genaue Analogon bildet zu der bekannten Relation

$$(a\alpha u)^3 = 0$$

zwischen der ternären Form a_x^3 und ihrer Hesse'schen α_x^3.[1] Ich führe dieselbe hier ausdrücklich an, weil im folgenden Theile auf sie hinzuweisen sein wird.

Man kann nun fragen, was in unserem Systeme dem syzygetischen Büschel der Curven dritter Ordnung entspricht. Zunächst bietet sich ein System von ∞^2 Raumcurven

$$\varkappa f + \lambda\varphi = 0,\ \varkappa' f' + \lambda'\varphi' = 0$$

mit den beiden Parametern $\frac{\varkappa}{\lambda}$, $\frac{\varkappa'}{\lambda'}$, von der Eigenschaft, dass durch jeden Raumpunkt eine Curve hindurchgeht. Für viele Fragen kann diese Curvenschaar als das gesuchte Analogon gelten; das Studium derselben erfordert, wie leicht ersichtlich, die getrennte Verwendung der beiden Processe θ, θ' (siehe §. 3). In den meisten Fällen indess wird eine Mannigfaltigkeit von nur ∞^1 Raumcurven in Betracht zu ziehen sein, welche in der obigen Schaar enthalten ist und durch die Gleichungen

$$\varkappa f + \lambda\varphi = 0,\ \varkappa f' + \lambda\varphi' = 0$$

gegeben ist. Die Curven dieser Schaar erfüllen die Fläche vierter Ordnung

$$f\varphi' - f'\varphi = 0,$$

durch deren jeden Punkt eine der Curven hindurchgeht. Für diese Curvenschaar bildet die Operation ϑ das ausreichende Mittel der Untersuchung.

---

[1] Obige Identität folgt ohne Weiteres aus der bei Westphal, a. a. O. S. 3, Gleichung 5) angegebenen; daselbst wird auch auf die Analogie mit der Salmon'schen Identität hingewiesen.

II. Theil.

Die elliptischen Transcendenten als Covarianten der Raumcurve vierter Ordnung.

§. 6. Formeln für eingliederige Argumente.

Längs der Raumcurve vierter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} f &= a_x^2 = 0 \\ f' &= a_x'^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

werde das elliptische Integral erster Gattung

$$u = \int_y^x d\omega_\xi = \int_y^x \frac{(hk\xi d\xi)}{a_\xi a_\xi' (a_h a_k' - a_k a_h')}$$

hinerstreckt. Das Differential

$$d\omega_\xi = \frac{(hk\xi d\xi)}{a_\xi a_\xi' (a_h a_k' - a_k a_h')} = \frac{u_\xi v_{d\xi} - v_\xi u_{d\xi}}{a_\xi a_\xi' (aa'uv)}$$

enthält zwei Reihen willkürlicher Punktcoordinaten h, k, oder in der anderen Schreibweise zwei Reihen willkürlicher Ebenencoordinaten u, v.

Die erste zu lösende Aufgabe ist die Berechnung von $\gamma(u)$. Für kleine u ist annäherungsweise

$$\gamma u = \frac{1}{u^2},$$

und wenn y nahe bei x liegt,

$$u = -\frac{(hkxy)}{a_x a_x' (a_h a_k' - a_k a_h')}.$$

Somit wird unter dieser Voraussetzung

$$\gamma u = \frac{\{a_x a_x' (a_h a_k' - a_k a_h')\}^2}{(hkxy)^2}.$$

Wir bestimmen nun einen Ausdruck von der Form

$$\frac{P(h, k, x, y)}{(hkxy)^2}$$

folgenden Bedingungen gemäss:

1. $P(h, k, x, y)$ ist eine ganze homogene Function zweiten Grades mit numerischen Coëfficienten von jeder der Variablenreihen h, k, x, y und von den Coëfficienten der Grundformen f, f';

2. $P(h, k, x, y)$ besitzt Covarianten- und Combinanteneigenschaft;

3. $P(h, k, x, x) = \{a_x a'_x (a_h a'_k - a_k a'_h)\}^2$;

4. $\dfrac{P(h, k, x, y)}{(hkxy)^2}$ ist von h und k unabhängig.

Durch diese Forderungen ist der fragliche Ausdruck, wie sogleich gezeigt werden soll, vollkommen bestimmt. Wir werden nachweisen, dass er nichts Anderes ist als γu.

Zunächst kann man $P(h, k, x, y)$ auf Grund der Eigenschaften 1) und 2) als ein Aggregat mit unbestimmten numerischen Coëfficienten von gewissen einfacheren Combinanten darstellen; diese sind Producte zu je zweien von Determinanten der Form

$$[pq, rs] = \begin{vmatrix} a_p a_q & a_r a_s \\ a'_p a'_q & a'_r a'_s \end{vmatrix},$$

wobei die p, q, r, s durch h, k, x, y irgendwie zu ersetzen sind, mit der einzigen Beschränkung, welche durch den Grad der Form $P(h, k, x, y)$ in den einzelnen Coordinatenreihen gesetzt ist. Nachdem alle jene von den Gliedern dieser Gestalt unterdrückt sind, welche in Folge der Lage von x und y auf der Raumcurve verschwinden, behält man ein Aggregat von 14 Gliedern. Die 14 numerischen Coëfficienten bestimmen sich durch die Forderungen 3) und 4). Um 4) zu genügen, hat man nur in der Entwickelung jedes der beiden Ausdrücke

$$P(\lambda h + \mu k + \nu x + \rho y, k, x, y)$$
$$P(h, \mu h + \lambda k + \nu x + \rho y, x, y)$$

nach Potenzen von λ den Coëfficienten von λ^1 gleich Null zu setzen. Die Rechnung ergibt, dass hiedurch die Verhältnisse jener 14 Unbekannten bestimmt sind. Der übrigbleibende Factor ist dann aus der Forderung 3) zu entnehmen. Man erhält so:

$$\begin{aligned} 12P(h,k,x,y) = {} & [hk, xy]^2 + [hx, ky]^2 + [kx, hy]^2 - [h^2, xy][k^2, xy] - [hx, hy][kx, ky] \\ & + 2\{[h^2, kx] - [hk, hx]\}.[ky, xy] + 2\{[k^2, hx] - [hk, kx]\}.[hy, xy] \\ & + 2\{[h^2, ky] - [hk, hy]\}.[kx, xy] + 2\{[k^2, hy] - [hk, ky]\}.[hx, xy] \\ & + 10[hx, kx][hy, ky]. \end{aligned} \qquad \ldots 8)$$

Um nun zu beweisen, dass in der That

$$\gamma\left(\int_y^x d\omega_\xi\right) = \frac{P(h, k, x, y)}{(hkxy^2)},$$

benützen wir den Umstand, dass in Folge der Covarianten- und Combinanteneigenschaft beider Seiten dieser Gleichung ihre Richtigkeit bloss an einer passenden Normalform der Raumcurve geprüft sein muss, um allgemein festzustehen. Als solche Normalform wählen wir

$$\left.\begin{aligned} a_x^2 &= 2x_1^2 - 2x_2x_4 + 2g_3x_3^2 \\ a_x'^2 &= x_2x_3 + g_2x_3^2 - 4x_4^2, \end{aligned}\right\}$$

in welche sich ein allgemeines Formenpaar überführen lässt, unter der Voraussetzung, dass g_2 und g_3 gemäss den Relationen (vergl. §. 3)

$$i = 2^7 . 3^2 . g_2, \quad j = -2^{10} . 3^4 g_3$$

bestimmt werden. Denn die Combinanten i, j erhalten gerade diese Werthe, wenn man sie an obiger Normalform ausrechnet.

Es wird aber ferner bei Annahme dieser Normalform

$$d\omega_\xi = \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{\xi_4}{\xi_3} = s$$

gesetzt ist. Ist demnach

$$v = \int_x^\infty d\omega_\xi \qquad w = \int_y^\infty d\omega_\xi,$$

so wird

$$\frac{x_4}{x_3} = \gamma v \qquad \frac{y_4}{y_3} = \gamma w$$

$$\frac{x_1}{x_3} = \gamma' v \qquad \frac{y_1}{y_3} = \gamma' w$$

$$\frac{x_2}{x_3} = 4(\gamma v)^2 - g_2 \qquad \frac{y_2}{y_3} = 4(\gamma w)^2 - g_2$$

$$u = \int_y^x d\omega_\xi = w - v.$$

Berechnet man weiter den Ausdruck $\frac{P(h, k, x, y)}{(hkxy)^2}$ nach den gemachten Voraussetzungen, so ergibt sich derselbe in der That gleich der rechten Seite der bekannten Formel für $\gamma(w-v)$.

Sonach ist allgemein

$$\gamma(u; g_2, g_3) = \frac{P(h, k, x, y)}{(hkxy)^2}, \qquad \ldots 9)$$

wenn u, g_2, g_3 die Grössen bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} u &= \int_y^x d\omega_\xi, \\ g_2 &= \frac{1}{2^7 . 3^2} i, \\ g_3 &= -\frac{1}{2^{10} . 3^4} j, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 10)$$

§. 7. Berechnung von $\sigma\left(\int_y^x d\omega_\xi\right)$.

Die wirkliche Aufstellung der Formel für $\gamma' u$ will ich übergehen. Es genüge, auf die doppelte Möglichkeit der Ableitung derselben hinzuweisen. Man kann nämlich erstens die Überlegungen des vorigen Paragraphen direct auch für $\gamma' u$ durchführen. Oder man findet $\gamma' u$, indem man die für γu aufgestellte Formel differentiirt. Zu diesem Zwecke hat man von dem bekannten Cayley-Nöther'schen Verfahren[1] Gebrauch zu machen, welches sich für unseren Fall folgendermassen aussprechen lässt. Sind M, N Formen m^{ten} Grades der x_i, und ist

$$u = \int^x \frac{(hk\xi d\xi)}{a_\xi a'_\xi (a_h a'_k - a_k a'_h)},$$

so wird

$$\frac{d}{du}\left(\frac{N}{M}\right) = \frac{|f, f', M, N|}{4m \,.\, M^2},$$

worin $|f, f', M, N|$ die Functionaldeterminante der vier Formen bedeutet.

Um σu zu berechnen, gehen wir von der bekannten Relation

$$\frac{\partial^2 \log \sigma(\varphi-\psi)}{\partial\varphi\partial\psi} = \gamma(\varphi-\psi)$$

aus; durch zweimalige Integration folgt

$$\sigma(v-w')\sigma(w-v') = \sigma(v-v')\sigma(w-w')\, e^{-\int_w^v \int_w^{v'} \gamma(\varphi-\psi) d\varphi d\psi}.$$

Wenn wir unter Annahme eines gänzlich willkürlichen Punktes z der Curve folgende Substitutionen machen:

$$v = \int_z^x d\omega_\xi, \quad w = \int_z^y d\omega_\xi, \quad v' = \int_z^{x'} d\omega_\xi, \quad w' = \int_z^{y'} d\omega_\xi,$$

$$\varphi = \int_z^\xi d\omega_\xi, \quad \psi = \int_z^{\xi'} d\omega_\xi,$$

---

[1] S. Nöther, Ber. d. Erlanger phys.-med. Soc. vom 14. Januar 1884.

so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\sigma\left(\int_{y'}^{x} d\omega_\xi\right)\sigma\left(\int_{y}^{x'} d\omega_\xi\right) = -\sigma\left(\int_{x'}^{x} d\omega_\xi\right)\sigma\left(\int_{y'}^{y} d\omega_\xi\right)$$

$$. e^{-\int_y^x \int_{y'}^{x'} d\omega_\xi \, d\omega_{\xi'} \, . \, \frac{P(h,\, k,\, \xi,\, \xi')}{(kk\xi\xi')^2}}$$

Lassen wir nun x' mit x, y' mit y zusammenfallen, so erhält die linke Seite die Gestalt

$$\left\{\sigma\left(\int_{y}^{x} d\omega_\xi\right)\right\}^2$$

während sich die rechte Seite zunächst unter der unbestimmten Form $0 . \infty$ darstellt, und somit durch einen Grenzübergang auszuwerthen ist. Dies gelingt auf folgende Weise. Es ist

$$\log \frac{(hkxx')(hkyy')}{(hkxy')(hkyx')} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(hk\xi d\xi)(hk\xi' d\xi')}{(hk\xi\xi')^2}$$

$$= \int_y^x \int_{y'}^{x'} d\omega_\xi \, d\omega_{\xi'} \frac{[h\xi,\, k\xi] . [h\xi',\, k\xi']}{(hk\xi\xi')^2};$$

setzen wir also

$$Q(h,\, k,\, \xi,\, \xi') = [h\xi,\, k\xi] . [h\xi',\, k\xi'] - P(h,\, k,\, \xi,\, \xi'),$$

so wird auch

$$\sigma\left(\int_{y}^{x} d\omega_\xi\right)\sigma\left(\int_{y}^{x'} d\omega_\xi\right) = -\sigma\left(\int_{x'}^{x} d\omega_\xi\right)\sigma\left(\int_{y'}^{y} d\omega_\xi\right) . \frac{(hkxy')(hkyx')}{(hkxx')(hkyy')}$$

$$. e^{\int_y^x \int_{y'}^{x'} d\omega_\xi \, d\omega_{\xi'} \frac{Q(h,\, k,\, \xi,\, \xi')}{(h,\, k,\, \xi,\, \xi')^2}}$$

Jetzt ist der Exponentialfactor der rechten Seite eine für $x' = x$, $y' = y$ endlich bleibende Grösse und die Auswerthung des algebraischen Theiles ist leicht bewerkstelligt, wenn man bedenkt, dass für solche x', y', welche beziehungsweise x, y unendlich nahe liegen, die Gleichungen

$$\sigma\left(\int_{x'}^{x} d\omega_\xi\right) = -\frac{(hkxx')}{[hx,\, kx]}$$

$$\sigma\left(\int_{y'}^{y} d\omega_\xi\right) = -\frac{(hkyy')}{[hy,\, ky]}$$

gelten.

Es ergibt sich somit:

$$\sigma^2\left(\int_y^x d\omega_\xi\right) = \frac{(hkxy)^2}{[hx, kx].[hy, ky]}\, e^{\int_y^x \int_y^x d\omega_\xi\, d\omega_{\xi'} \cdot \frac{Q(h,k,\xi,\xi')}{(hk\xi\xi')^2}} \cdot \quad \ldots 11)$$

g_2, g_3 haben dabei die im vorigen Paragraphen festgestellten Werthe.

§. 8. Formeln für viergliederige Argumente.

Wir wollen jetzt Argumente von der Form

$$u = \left(\int_{o'}^{x'} + \int_{o''}^{x''} + \int_{o'''}^{x'''} + \int_{o^{IV}}^{x^{IV}}\right) d\omega_\xi$$

in Betracht ziehen; dabei sollen x', x'', x''', x^{IV} beliebige Punkte der Curve sein, o', o'', o''', o^{IV} aber vier solche, welche in einer Ebene liegen. Die Lage dieser Ebene ist nach dem Abel'schen Theorem gleichgiltig. Wir nehmen dieselbe, um zur Darstellung der elliptischen Functionen solcher Argumente zu gelangen, für den Augenblick so an, dass sie durch x'', x''', x^{IV} hindurchgeht. Heisst ihr vierter Schnittpunkt y', so erhält das obige Argument die Form

$$u = \int_{y'}^{x'} d\omega_\xi.$$

Es ist also

$$\gamma\left[\left(\int_{o'}^{x'} + \int_{o''}^{x''} + \int_{o'''}^{x'''} + \int_{o^{IV}}^{x^{IV}}\right) d\omega_\xi\right] = \frac{P(h, k, x', y')}{(hkx'y')^2}.$$

Unsere Aufgabe ist also nur, auf der rechten Seite dieser Gleichung y' wieder durch x'', x''', x^{IV} auszudrücken. Setzen wir nun

$$y'_i = \lambda x''_i + \mu x'''_i + \nu x^{IV}_i,$$

so bestimmen sich die Verhältnisse der λ, μ, ν durch die beiden Bedingungen

$$a_{y'}^2 = 0, \ \ a_{y'}'^2 = 0.$$

So erhalten wir die Werthe der Coordinaten von y'; wir wollen dieselben oben einsetzen, gleichzeitig aber h, k mit x''', x^{IV} zusammenfallen lassen. Nach leichten Reductionen ergibt sich so:

$$\gamma\left[\left(\int_{o'}^{x'}+\int_{o''}^{x''}+\int_{o'''}^{x'''}+\int_{o^{IV}}^{x^{IV}}\right)d\omega_\xi\right]=\frac{R(x',x'',x''',x^{IV})}{(x'x''x'''x^{IV})^2},\ \ldots 13)$$

worin R folgende Bestimmung hat:

$$\begin{aligned}12R = {} & [12, 34]^2+[13, 24]^2+[14, 23]^2 \\ & -2[13, 14][23, 24]-2[12, 14][32, 34]-2[12, 13][42, 43] \ldots 14) \\ & -2[31, 32][41, 42]-2[21, 23][41, 43]-2[21, 24][31, 34],\end{aligned}$$

wenn abkürzend

$$[x^{(\alpha)}x^{(\beta)},\ x^{(\gamma)}x^{(\delta)}]=[\alpha\beta,\ \gamma\delta]$$

gesetzt wird. Es verdient bemerkt zu werden, dass zwischen R und dem im vorigen Paragraphen verwendeten Q die Relation

$$R(x', x'', x''', x^{IV}) = -Q(x', x'', x''', x^{IV})$$

besteht, sobald wirklich alle vier Punkte x auf der Curve liegen.

Ich übergehe nun die entsprechende Formel für $\gamma' u$, welche unter Anderem wieder leicht durch Differentiation zu erhalten ist. Dessgleichen soll die Ableitung einer Formel für σu unterbleiben. In diesen Beziehungen genügt es, auf die Entwicklungen von Herrn Klein in §. 5 seiner zweiten Abhandlung über hyperelliptische Sigmafunctionen (Math. Ann., Bd. XXXII) zu verweisen. Die dort niedergelegten Resultate über Functionen beliebig vielgliederiger Argumente lassen sich — wenigstens für elliptische Functionen — ohne jede Schwierigkeit auf das ternäre und quaternäre Gebiet übertragen.

§. 9. Anwendungen der bisher entwickelten Formeln.

Jene Formeln, welche die willkürlichen Hilfspunkte h, k enthalten, gestatten Umgestaltungen durch Vornahme geeigneter Specialisirungen dieser beiden Grössen.[1] Insbesondere kommt man zu interessanten Resultaten, indem man h, k in irgendwelcher Weise mit x, y zusammenfallen lässt. Auf die betreffenden Endformeln, welche leicht durch Grenzübergang gefunden werden können, soll indess hier nicht näher eingegangen werden.

---

[1] Vergl. meine oben citirte Note (Diese Ber., Juli 1888) §. 2.

Die Formel des vorigen Paragraphen kann als Ausgangspunkt für die Ableitung mehrerer weiterer Formeln dienen, indem man mehrere der Grössen x', x'', x''', x^{IV} zusammenfallen lässt. Auch hier sind geeignete Grenzbetrachtungen nöthig, da die gesuchten Ausdrücke sich zunächst in unbestimmter Form darbieten.[1] Es lassen sich jedoch in den meisten Fällen diese Grenzbetrachtungen umgehen, dadurch, dass man die gewünschte Formel unabhängig aufzustellen versucht. Bezüglich der interessantesten von den hieher gehörigen Anwendungen soll dies im Folgenden durchgeführt werden. Es sollen nämlich die elliptischen Functionen des Argumentes

$$u = 4\int_o^x d\omega_\xi$$

berechnet werden, unter o einen der 16 Wendeberührungspunkte der Raumcurve verstanden.

Zu diesem Zwecke transformiren wir das Differential

$$d\omega_\xi = \frac{(hk\xi d\xi)}{a_\xi a'_\xi (a_h a'_k - a_k a'_h)},$$

indem wir die Hilfspunkte h, k ersetzen durch

$$h_i = \varphi_\xi \varphi_i, \quad k_i = \varphi'_\xi \varphi'_i,$$

wo φ^2_ξ, φ'^2_ξ die §. 2 eingeführten Formen bedeuten. Es ergibt sich

$$d\omega_\xi = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi d\varphi' - \varphi' d\varphi}{\Delta},$$

wo zur Abkürzung das Argument ξ bei den Formen φ, φ', Δ weggelassen ist. Setzt man nun für Δ gemäss §. 4 seinen Werth

$$\sqrt{\frac{1}{24}(A\varphi)^4},$$

und bezeichnet man ferner φ^2_ξ, φ'^2_ξ beziehungsweise mit ζ_2, $-\zeta_1$, so nimmt das Differential die gewöhnliche binäre Gestalt des elliptischen Differentials erster Gattung an, nämlich

[1] Vergl. ebenda §. 3. In allen Fällen leistet die §. 5 aufgestellte Identität Gleiches, wie die Salmon'sche Identität a. a. O.

$$d\omega_\xi = \frac{(\zeta d\zeta)}{\sqrt{\frac{1}{6} A_\zeta^4}} \qquad \ldots 15)$$

Wir wollen nun gleich eine weitere Normirung zu dem Ende treffen, dass die Werthe der Invarianten, gebildet für das binäre Differential, mit jenen g_2, g_3 übereinstimmen, welche in §. 6 als Invarianten unserer elliptischen Functionen berechnet worden sind. Nun zeigen aber die Relationen, welche dort entwickelt sind, ohne Weiteres, dass die Form

$$F(\zeta) = \frac{1}{2^3 . 3} A_\zeta^4$$

genau jene g_2, g_3 zu Invarianten hat. Desshalb schreiben wir jetzt statt 15)

$$2\, d\omega_\xi = \frac{(\zeta d\zeta)}{\sqrt{F(\zeta)}},$$

und auf dieses Differential bringen wir nun die bekannten Formeln, welche für das binäre Gebiet gelten, zur Anwendung. Wir setzen also

$$\int_\varepsilon^\zeta \frac{(\zeta d\zeta)}{\sqrt{F(\zeta)}} = u,$$

wo ε einen der Verzweigungspunkte von $\sqrt{F(\zeta)}$ bedeutet. Dann ist nach Hermite

$$\gamma(2u) = -2\frac{H(\zeta)}{F(\zeta)},$$

$$\gamma'(2u) = -4\frac{T(\zeta)}{F(\zeta)\sqrt{F(\zeta)}}$$

unter H, T die beiden Covarianten von F verstanden. Die untere Grenze ε des Integrals u entspricht, weil für dieselbe $F(\xi)$, also auch Δ verschwindet, einem der Hyperosculationspunkte der Curve; die obere ζ sei bestimmt durch

$$\zeta_1\varphi_x^2 + \zeta_2\varphi_x'^2 = 0;$$

demgemäss ist

$$2u = 4\int_o^x d\omega_\xi.$$

Anderseits findet man leicht aus der Definition von $F(\zeta)$

$$H(\zeta) = \frac{1}{2^6 . 3^2} (AB)^2 A_\zeta^2 B_\zeta^2, \quad T(\zeta) = \frac{1}{2^9 . 3^3} (AB)^2 (CB) A_\zeta^2 B_\zeta C_\zeta^3.$$

Somit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \gamma\left(4\int_o^x d\omega_\xi\right) &= -\frac{1}{12}\frac{(AB)^2(A\varphi)^2(B\varphi)^2}{(A\varphi)^4} \\ \gamma'\left(4\int_o^x d\omega_\xi\right) &= -\frac{1}{144}\frac{(AB)^2(CB)(A\varphi)^2(B\varphi)(C\varphi)^3}{(A\varphi)^4 . \Delta}, \end{aligned}\right\} \ldots 16)$$

wobei rechter Hand x als Argument der Formen einzusetzen ist.

Diese Gleichungen entsprechen den Hermite'schen Formeln für das binäre und den Brioschi'schen für das ternäre Gebiet.