

Die Quintupellage collinearer Räume

von

Adolf Ameseder in Graz.

Von den Collineationen des Raumes, die Herr Lüroth in seiner Abhandlung: „Über cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume“ [1] von der Untersuchung ausschliesst, sind nachträglich die zwei Fälle behandelt worden, in welchen zwei Räume durch eine Collineation in Tripel-, beziehungsweise Quadrupellage gebracht werden.

Den ersten Fall bespricht Herr Schur gelegentlich der Untersuchung zweier neunfach hyperboloidisch liegender Tetraëder in seiner Abhandlung: „Über eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung“,[2] und den zweiten Fall behandelt Herr Schröter sehr ausführlich in der Abhandlung: „Über cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen“. [3]

Es bleibt nun noch der eine Fall zu erledigen, in welchem sich die Punkte der zwei collinearen Räume in Quintupel anordnen.

Es ergeben sich drei wesentlich verschiedene Arten: eine Collineation mit räumlichen, eine zweite mit ebenen und eine dritte mit geraden Punktquintupeln. Alle drei Collineationen sind eigentliche Hermite'sche Transformationen und weisen zweistufige Schaaren von irreductibeln Linien auf, für welche sie Transformationen in sich bedeuten.

Für die erste Art, die allgemeinste — weil zwischen den Punkten eines Quintupels keine lineare Relation besteht — sind

---

[1] Math. Annalen, Bd. 13, S. 305.
[2] Ibid., Bd. 20, S. 273.
[3] Ibid., Bd. 20, S. 231.

diese Schaaren zwei in sich duale Bündel von kubischen Raumcurven, die in der bemerkenswerthen Relation stehen, dass je zwei Curven, die durch denselben Punkt des Raumes gehen, stets noch vier reelle Schnittpunkte aufweisen, die jenen Punkt zu einem Quintupel ergänzen. Die Curven beider Bündel vertheilen sich in Büscheln auf Flächen zweiter Ordnung und — als Haupttangentencurven — in Schaaren auf Linienflächen vierter Ordnung. Diese Collineation, die auch als einfachster Repräsentant einer ganzen Classe von cyklischen Collineationen Interesse erweckt, ist am ausführlichsten besprochen.

Die zweite Art ist eine projective Rotation und besitzt ein räumliches Bündel von Kegelschnitten, und die dritte Art ist eine geschaarte Collineation, bei welcher die zugehörige lineare Congruenz die Rolle der erwähnten Linienschaar spielt.

I.

Quintupel in der Ebene.[1]

1. Die sämmtlichen cyklischen Folgen einer cyklisch-projectivischen Gruppe von der Periode 5 erhält man aus:

$$(1, 1+k, 1+2k, 1+3k, 1+4k),$$

indem man k die Werthe:

$$0, 1, 2, 3, 4$$

ertheilt.

Es ergeben sich nur zwei nicht bloss durch den Sinn verschiedene irreductible Folgen, nämlich für $k = 1$:

$$(1, 2, 3, 4, 5)$$

und für $k = 2$:

$$(1, 3, 5, 2, 4).$$

Als einzige reductible Folge tritt hier die durch $k = 0$ bestimmte auf. Den ersten zwei Folgen entsprechen die cyklischen Projectivitäten T':

---

[1] Man vergleiche die „Theorie der cyklischen Projectivitäten", Diese Sitzber., Bd. 98, S. 292 ff.

$$(1, 2, 3, 4, 5) \barwedge (2, 3, 4, 5, 1)$$

und T^2:

$$(1, 3, 5, 2, 4) \barwedge (3, 5, 2, 4, 1),$$

der letzten entspricht die Identität T^5 oder T^0. Nennt man eine von jenen zwei Projectivitäten T^l, so heisst die andere stets T^{2l}; es sind folglich beide in projectiver Hinsicht gleichwerthig.

2. Als Träger der Projectivität T^k diene ein Kegelschnitt K. Eine Gruppe derselben in natürlicher cyklischer Folge sei:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Diese wird durch fünf Involutionen J^{2j} $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ in sich transformirt. Je zwei Punkte a_{j-l} und a_{j+l}, die von einem beliebigen anderen, a_j, durch gleich viele zwischen liegende getrennt sind, entsprechen sich in einer Involution J^{2j}, die a_j zum Ordnungspunkte hat. Derart ergeben sich fünf Paare von Ordnungspunkten a_j, a'_j. Diese Paare, für die sämmtlichen Gruppen von T^k hergestellt, liefern die zu T^k gehörige Involution harmonisch conjugirter Punkte $(a_j a'_j)$. Die Centra u_j der J^{2j} befinden sich somit auf der Polare γ des Centrums c von $(a_j a'_j)$, und da diese Involution stets elliptisch ist, so ist c ein innerhalb K liegender Punkt und γ eine ausserhalb K verlaufende Gerade.

3. Es sei nun $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ eine cyklisch-collineare Gruppe von Punkten einer Ebene E, d. h. es existire eine Collineation U', die a_j in a_{j+1} und insbesondere a_5 wieder in a_1 transformirt. Dann liegen entweder alle Punkte der Gruppe oder keine drei von ihnen auf derselben Geraden: Man hat uneigentliche und eigentliche cyklisch-collineare Gruppen. Es sei $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ von der zweiten Art. Die Aufeinanderfolge $U^5 \equiv U'.U'.U'.U'.U'$ von fünf in demselben Sinne angewandten Collineationen U' ist nun eine Identität, da sie fünf Hauptpunkte in den a_j aufweist. In Folge dessen ist U' für alle Punkte der Ebene E cyklisch und 5 ihre constante Periode. Man hat in E zwei in Quintupellage befindliche collineare Felder.

4. Das Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ legt einen Kegelschnitt K fest, der durch die a_j geht und durch U' cyklisch-projectivisch in sich transformirt wird. Da hiebei auch $(a_j a'_j)$ eine Umformung in sich erleidet, so ist c der reelle Hauptpunkt und γ die reelle

Hauptlinie von U'. Für die auf γ durch U' zu Stande kommende cyklische Projectivität bilden die u_j eine Gruppe. Ihre cyklische Folge ist jedoch allemal von der des Quintupels $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ verschieden. Nennt man die Punkte derselben in der Ordnung, wie sie sich als Projectionen von a_5, a_1, a_2, a_3, a_4 aus a_1 ergeben: u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, so ist die durch U' inducirte cyklische Folge: $(u_1, u_3, u_5, u_2, u_4)$, da $\overline{a_5 a_1}$ in $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_1 a_2}$ in $\overline{a_2 a_3}$ u. s. f. transformirt wird.

Derart ist einem jeden Quintupel auf K eines auf γ coordinirt. Man hat eine cyklische Involution C_5 auf K und eine zweite, O_5, auf γ, von denen die eine aus der anderen durch Projection aus einem auf K beliebig zu wählenden Centrum hervorgeht. Als Projection von $(a_j a'_j)$ ergibt sich hiebei die zu O_5 adjungirte Involution $(u_j u'_j)$. Wählt man a_j als Centrum, so wird das Paar a_j, a'_j durch die Tangente in a_j und durch den Strahl $\overline{a_j c}$ projicirt. Es sind folglich u_j und u'_j auch hinsichtlich K conjugirt. Die adjungirte Involution ist mit der durch K auf γ bestimmten Polarinvolution identisch.

5. Derart wird durch jeden Punkt der Ebene E ein Quintupel und ein demselben umschriebener Kegelschnitt K bestimmt, und alle diese Kegelschnitte haben c und γ als Pol und Polare und $(u_j u'_j)$ als Polarinvolution gemeinschaftlich. Sie bilden das Fundamentalbüschel der Collineation U'. In gleicher Eigenschaft gehören diese Gebilde auch der Collineation $U^2 \equiv U'.U'$ an. Diese erzeugt in der Ebene und insbesondere auch auf γ dieselben Quintupel wie U', nur ordnet sie die eigentlichen Quintupel zur cyklischen Folge $(a_1, a_3, a_5, a_2, a_4)$, die uneigentlichen zu $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ an. U' und U^2 sind conjugirte cyklische Collineationen. U^3 unterscheidet sich von U^2 nur durch den Sinn, ebenso U^4 von U'.

6. Transformirt man das cyklisch-collineare Feld E durch Collineation in ein zweites Feld E' derart, dass $(u_j u'_j)$ zur absoluten Involution von E' wird, so entsprechen den Kegelschnitten K Kreise K' mit dem gemeinschaftlichen Centrum c' und den Quintupeln von E die regulären Fünfecke, die diesen Kreisen eingeschrieben sind. Den Quintupeln von U' correspondiren die gewöhnlichen Fünfecke, jenen von U^2 die Sternfünfecke.

Hieraus folgt, dass zwei gleichartige Quintupel (beide eigentlich oder uneigentlich) zehnfach collineare Figuren sind, mögen sie demselben Felde oder verschiedenen Feldern angehören. Ferner erhellt, dass eine Collineation U^k durch vier Punkte a, b, c, d eines Quintupels, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, völlig bestimmt ist, sobald nur die Reihenfolge der Punkte fixirt ist. Ist die Folge: $a, b, c, d,$ so wird man für $k = 1$ diese Punkte mit a_1, a_2, a_3, a_4 bezeichnen und sie vier auf einander folgenden Ecken a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 eines gewöhnlichen regulären Fünfeckes collinear zuweisen. Der fünften Ecke entspricht dann: a_5, dem Centrum: c, der absoluten Involution: $(u_j u'_j)$ und den mit $(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5)$ concentrischen Fünfecken die zweistufige Schaar von Quintupeln. Ist $k = 2$, so identificirt man a, b, c, d mit a_1, a_3, a_5, a_2 und bezieht diese Punkte auf vier auf einander folgende Ecken eines Sternfünfeckes.

In gleicher Weise kann die Vervollständigung durchgeführt werden, wenn drei Punkte a, b, c eines Quintupels, ihre Folge und c oder γ gegeben vorliegen. Als collinear zugehörig sind in der Ebene des Fünfeckes drei bestimmte Ecken und der Mittelpunkt oder die unendlich ferne Gerade zu betrachten.

II.

Quintupel im Raume.

7. Man kann die eigentlichen, d. h. nicht exceptionellen, räumlichen Collineationen nach der Beschaffenheit der von ihnen erzeugten Systeme von Strahlen in vier Kategorien bringen. Das System kann nämlich von dritter oder zweiter Stufe und irreductibel oder reductibel sein. Zulässig sind: der Reye'sche Complex, zwei specielle lineare Complexe, die lineare Congruenz und endlich ein Strahlbündel im Vereine mit einem ebenen Strahlsystem. Die zugehörigen Collineationen sind beziehungsweise: die Collineation U_1 mit einem Haupttetraëder, die axiale Collineation U_2, die geschaarte Collineation U_3 und die centrische Collineation U_4.

8. Jede von diesen Collineationen besitzt mindestens zwei reelle, windschiefe, sich selbst entsprechende Gerade γ' und γ''. Auf denselben kommen Projectivitäten T' und T'' zu Stande, deren Beschaffenheit unter der Voraussetzung untersucht werden

soll, dass U_i $[i = 1, 2, 3, 4]$ alle anderen Punkte des Raumes in Quintupel anordnet.

Es sei $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ ein derartiges Quintupel. Die durch U_i bedingte cyklische Folge sei a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ihre Zuordnung demnach die folgende:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_1 \end{pmatrix}$$

Wird a_1 nicht auf γ' oder γ'' angenommen, so liegen auch die übrigen Punkte des Quintupels nicht auf diesen Geraden, und es sendet folglich jeder eine Transversale an γ', γ''. Diese fünf Transversalen können nie in eine einzige Gerade e zusammenfallen. Würde dies eintreten, so käme auf e durch U_i eine cyklische Projectivität der Periode 5 zu Stande, für die die reellen Schnittpunkte $0'$ und $0''$ von e mit γ' und γ'' Ordnungspunkte sein müssten. Dies ist nicht möglich, da eine solche Projectivität stets imaginäre Ordnungspunkte besitzt. Ihre Involution harmonisch conjugirter Punkte ist ja stets elliptisch, während die durch $0', 0''$ bestimmte hyperbolisch ist. Die Collineation U_3 mit reellen Achsen und die centrische Collineation U_4 sind hienach zur Herstellung der Quintupellage ungeeignet.

9. Es soll nun untersucht werden, wie viele von den fünf Punkten a_l auf einer Transversale liegen können. Es sei α die Anzahl der Transversalen, und es mögen von den a_l sich $\beta < 5$ auf der durch a_1 festgelegten Transversale e_1 befinden. Diese wird durch U_i in eine zweite, e_2, transformirt, die gleichfalls β Punkte a_l enthält, nämlich die collinearen von jenen auf e_1. Das Gleiche gilt für $e_2, e_3, \ldots e_\alpha$. Als Gesammtanzahl für die a_l ergibt sich somit $\alpha . \beta$. Nun ist:

$$\alpha . \beta = 5 \quad \text{und} \quad \beta < 5,$$

folglich die einzige zulässige Lösung: $\beta = 1$; d. h. auf jeder Transversale liegt nur ein Punkt des Quintupels.

Von den Transversalen e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 mögen sich δ in einem Punkte p_1 von γ' schneiden. Ebenso viele treffen dann in dem collinearen Punkte p_2 zusammen. Ist die Anzahl dieser Punkte ε, so ist $\delta . \varepsilon$ gleich 5, also δ entweder 1 oder 5.

Ein anderes Quintupel $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ bestimmt die Transversalen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, die sich gegen γ' ebenso verhalten müssen, als wie e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Es kann die eine Schaar nicht fünf Schnittpunkte p_l fixiren, während die andere nur einen, q_1, liefert, da dieser ein Ordnungspunkt der cyklischen Projectivität sein müsste, die jene p_l bestimmen, was seiner Realität wegen nicht möglich ist.

Das Vorstehende [Art. 8 und 9] überträgt sich auf Quintupel von Ebenen. Ein jedes Punktquintupel liefert in den Verbindungsebenen von je drei auf einander folgenden Punkten ein solches Ebenenquintupel. Für beide gilt:

Ein Quintupel bestimmt mit zwei sich selbst entsprechenden reellen, windschiefen Geraden der Collineation U_i stets fünf getrennte Transversalen. Diese bilden für ein Quintupel — und dann auch für alle — entweder ein Strahlbüschel, oder es wird keine Transversale von den übrigen geschnitten.

10. Die cyklischen Projectivitäten T' und T'' sind dem Gesagten zufolge entweder von der Periode 1 oder 5. Die Periode 1 kann nicht gleichzeitig beiden zukommen, weil nicht alle fünf a_l auf einer e_l liegen können. Nennt man jene Perioden π' und π'' und bezeichnet man die Schnitte der e_l mit γ' und γ'' für $\pi' = \pi'' = 5$ mit p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, beziehungsweise q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, so ergeben sich die folgenden zulässigen Combinationen:

a) $\pi' = 1, \; \pi'' = 5$;
b) $\pi' = 5, \; \pi'' = 5$ und $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \overline{\wedge} (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$;
c) $\pi' = 5, \; \pi'' = 5$ und $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \overline{\wedge} (q_1, q_3, q_5, q_2, q_4)$.

Bei *b)* sind T' und T'' von gleichem Typus, bei *c)* von verschiedenem vorausgesetzt.

Diese drei Fälle sollen nun eingehend untersucht werden. Dem ersten Falle entsprechen ebene, dem zweiten gerade und dem dritten räumliche Punktquintupel. Die Ebenenquintupel sind diesen reciprok geartet. Die erzeugenden cyklischen Collineationen sind beziehungsweise U_2, U_3 und U_1.

III.

a) Ebene Quintupel.

11. Ein jeder Punkt c' von γ' ist ein Hauptpunkt der Collineation und folglich jede Ebene C'' durch γ'' eine Hauptebene.

Es liegt die axiale Collineation vor, die aus Gründen, die später hervortreten, cyklisch-projective Rotation genannt werden soll.

Die Transversalen e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 und die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 liegen in einer Ebene C'', die folglich durch U_2 cyklisch in sich transformirt wird. Die Punkte des Quintupels bestimmen einen Kegelschnitt K, auf dem U_2 eine cyklische Projectivität der Periode 5 hervorruft. Zu einem solchen Kegelschnitte gibt jeder Punkt von C'' Veranlassung. Man erhält so ein Büschel (K), das γ'' zur Polare von c' hat und auf γ'' eine feste Polarinvolution $(q_j\, q_j')$ besitzt, dieselbe, die als Involution harmonisch conjugirter Punkte zu T'' gehört.

Gleiches gilt für jede andere Ebene C_1'' durch γ''. Man kann ihre Quintupel aus jenen von C'' folgendermassen ableiten: Ist b_1 ein beliebiger Punkt derselben, so wird dieser aus irgend einem Punkte c_x' von γ' auf C'' nach a_1 projicirt, a_1 zum Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ ergänzt und dasselbe aus c_x' auf C_1'' zurückprojicirt. Hiebei stellt sich der $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ umschriebene Kegelschnitt K_1 als Projection von K dar.

12. Irgend eine Ebene A_1, die nicht dem Büschel γ'' angehört, führt zu einem Quintupel $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ von Ebenen. Man erhält dasselbe, indem man A_1 mit C'' in α_1 zum Schnitte bringt, die zu α_1 in der cyklischen Collineation der Ebene entsprechenden Strahlen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ermittelt und dieselben mit dem Schnittpunkte c_1' von A_1 mit γ', der sich selbst entspricht, durch Ebenen verbindet. Da U_2 den Strahl α_5 wieder in α_1 überführt, so bilden thatsächlich auch die Ebenen einen Cyklus. Derart wird durch U_2 eine cyklische Collineation im Bündel c_1' (A) erzeugt, die sich in eine Schaar von cyklischen Projectivitäten der Periode 5 auflöst. Träger der Projectivitäten sind Kegel zweiter Ordnung, k, die in ihrer Gesammtheit ein Büschel (k) bilden, dasselbe Büschel, das (K) aus c_1' projicirt.

Enthält A_1 die Gerade γ', so gilt dies auch für A_2, A_3, A_4, A_5. In diesem Falle erhält man ein cyklisch-projectivisches Ebenenbüschel, das vermittelst der Projectivität T'', zu der es perspectivisch ist, vervollständigt werden kann.

13. Hienach haben alle Kegelschnitte K und alle Kegel zweiter Ordnung k die Polarpunktinvolution $(q_j\, q_j')$ auf γ'' und die

dazu perspectivische Polarinvolution im Ebenenbüschel γ' gemeinschaftlich. Jene Kegelschnitte bilden ein räumliches Bündel $[K]$ und diese Kegel ein dazu perspectivisch liegendes, demselben reciprokes Netz $[k]$. In der That bestimmt ein jeder Punkt des Raumes einen Kegelschnitt K und jede Ebene einen Kegel k.

Drei Kegelschnitte K, die sich auf keinem Kegel k befinden und von denen keine zwei einer Ebene angehören, bestimmen eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung F, die durch U_2 in sich transformirt wird. Man kann dieselbe ebenso durch drei Kegel k, die von einander völlig unabhängig sind, festlegen. Für sie sind γ' und γ'' reciproke Polaren, und $(q_j q'_j)$ ist die auf der letzteren Geraden von ihr inducirte Polarinvolution. Das dreistufige System der Flächen F ist folglich ein in sich duales, specielles, lineares Gebüsch $[F]_2$. Dasselbe enthält hyperbolische und elliptische Flächen und umfasst das Kegelschnittbündel $[K]$ und das Kegelnetz $[k]$.

Für die Regelflächen des Gebüsches stellt U_2 eine eigentliche Hermite'sche Transformation vor, da, der ungeraden Periode wegen, nicht die eine Regelschaar in die andere übergeführt werden kann. Die von U_2 in den zwei Schaaren (r) und (s) hervorgerufenen cyklischen Projectivitäten T_1 und T_2 sind von gleicher Periode (5) und gleichem Typus. Denn ist $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ eine Gruppe von T_1 und $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ eine von T_2, so müssen die Schnittpunkte von homologen Erzeugenden:

$$r_1 \cdot s_1,\ r_2 \cdot s_2,\ r_3 \cdot s_3,\ r_4 \cdot s_4,\ r_5 \cdot s_5,$$

als Punkte eines Quintupels, in einer Ebene liegen, woraus sich die Projectivität:

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \,\overline{\wedge}\, (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$$

und ihr zufolge der gleiche Typus für T_1 und T_2 ergibt.

14. Ein Kegelschnitt K_1, der U_2 zur Transformation in sich hat, gehört dem Bündel $[K]$ an, da die fünf Punkte eines ihm eingeschriebenen Quintupels ihn völlig bestimmen. Auf einer Fläche zweiter Ordnung F_1, die durch U_2 in sich übergeführt wird, lässt sich nun stets ein Büschel von solchen Kegelschnitten nachweisen. Eine jede Ebene C'' liefert einen. Die Fläche F_1 ist folglich ein Element des Gebüsches $[F]_2$.

Alle Flächen zweiter Ordnung F, die durch U_2 eine Transformation in sich erleiden, bilden demnach das in sich duale, lineare Gebüsch $[F]_2$, welches durch die reciproken Polaren γ' und γ'' und durch die Polarinvolution $(q_j q'_j)$ auf der letzteren Geraden festgelegt wird. Dessgleichen gehören die sämmtlichen Kegelschnitte, die U_2 zur Transformation in sich haben, diesem Gebüsch an, und zwar erfüllen dieselben das in $[F]_2$ enthaltene räumliche Kegelschnittbündel $[K[$.

Verwandelt man durch eine geeignete Collineation 1. das Ebenenbüschel $\gamma''(C'')$ in ein Parallelbüschel $\gamma''_0(C''_0)$, 2. die auf γ'' befindliche Involution $(u_j u'_j)$ in die absolute Involution auf γ''_0 und 3. γ' in eine zur Stellung der Ebenen C''_0 senkrechte Gerade γ'_0; so entsteht aus $[F]_2$ das Gebüsch der Rotationsflächen zweiter Ordnung mit der gemeinschaftlichen Achse γ'_0 und aus $[K]$ das Bündel ihrer Parallelkreise. Aus den Punktquintupeln werden reguläre Fünfecke, und U_2 wird zu einer wirklichen, cyklischen Rotation mit der Achse γ'_0.

IV.

b) Gerade Quintupel.

15. Unter der Voraussetzung *b)* in Art. 10 bilden e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 eine Regelschaar zweiter Ordnung, (e), die durch U_i cyklisch in sich transformirt wird. Dasselbe geschieht demzufolge mit der zugehörigen Leitschaar (f). Es stellen die durch die a_l laufenden f_l eine Gruppe der in (f) inducirten cyklischen Projectivität T_2 vor und die Geraden γ', γ'' ihre Ordnungsstrahlen. Diese sind reell, und daher ist die Periode π_2 von T_2 kleiner als 3. Der Werth 2 ist, als Nichttheiler von 5, ausgeschlossen, es ist also $\pi_2 = 1$, d. h. T_2 ist eine Identität. Die Punkte des Quintupels befinden sich somit auf einer Leitlinie f der Schaar (e).

In gleicher Weise bestimmt jedes weitere Quintupel von U_i eine sich selbst entsprechende Gerade, die für U_i die gleiche Bedeutung wie γ' oder γ'' besitzt. Es trifft dies insbesondere für alle Leitlinien f zu. Die zwei durch U_i in Quintupellage gebrachten collinearen Räume haben also jede Erzeugende von (f) entsprechend gemein, ihr Erzeugniss, die Gesammtheit der Quintupelträger, ist folglich eine lineare Congruenz $[f]$. U_i ist demnach eine geschaart-cyklische Collineation U_3; ihre Achsen sind, als Ordnungsstrahlen der cyklischen Projectivität T_1:

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) \overline{\wedge} (e_2, e_3, e_4, e_5, e_1),$$

imaginär. Gegeben sind sie durch die Involution harmonisch conjugirter Strahlen in T_1.

16. Die Ebenenquintupel sind durchgehends cyklisch-projectivische Büschel, da jede Ebene A_1 eine sich selbst entsprechende Gerade f trägt, durch die demzufolge auch A_2, A_3, A_4, A_5 gehen. Die Construction von $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ kann auf die eines dazu perspectivischen Punktquintupels, etwa auf γ' oder γ'', zurückgeführt werden.

Ersichtlich wird jede Fläche zweiter Ordnung F, die mit einer Schaar von Erzeugenden der Congruenz $[f]$ angehört, durch U_3 in sich transformirt. Hiebei bleibt jede Erzeugende f fest, d. h. sie erleidet eine cyklisch-projective Verschiebung in sich, während sich die Leitlinien zu einer cyklischen Projectivität T_1 der Periode 5 anordnen. Das System der Flächen F ist auch hier ein in sich duales, specielles, lineares Gebüsch $[F]_3$, das jedoch im Gegensatze zu $[F]_2$ (Art. 13) nur aus windschiefen Flächen besteht. Es umfasst alle Flächen zweiter Ordnung, die durch U_3 in sich transformirt werden, da U_3 nur gerade Punktquintupel besitzt.

V.

c) Räumliche Quintupel.

17. Sind die Punktgruppen $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ und $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ nicht durch die Transversalen e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 projectivisch auf einander bezogen, sondern entspricht $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ die cyklische Folge $(q_1, q_3, q_5, q_2, q_4)$, so befinden sich die Punkte des Quintupels $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ weder auf einer Geraden f, noch in einer Ebene C.

Im ersten Falle würden e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, als Transversalen von γ', γ'' und f, eine Regelschaar bilden und folglich γ' und γ'' in projectivischen Reihen schneiden, was gegen die Voraussetzung ist. Im zweiten Falle würde die Ebene C sich selbst entsprechen und folglich entweder γ' oder γ'' in einem Hauptpunkte der Collineation schneiden. Da nun T' und T'' keine reellen Ordnungspunkte besitzen, so ist auch dies ausgeschlossen. Aus demselben Grunde können keine vier von den fünf Punkten in einer Ebene liegen.

Ebenso wenig besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen diesen Punkten und γ' oder γ''. Es gehören keine zwei der a_l mit einer dieser Geraden einer Ebene an, da je zwei e_l windschief sind.

Die Collineation U_i ist also in diesem Falle weder geschaart noch axial, sondern von der Art U_1 [Art. 8]. Alle ihre Quintupel sind räumlich, ausgenommen die auf γ' und γ'' befindlichen. Ihre Hauptpunkte sind imaginär und bestimmt durch die Involutionen harmonisch conjugirter Punkte $(p_j p'_j)$ und $(q_j q'_j)$ der Projectivitäten T' und T''.

18. Die Punkte eines räumlichen Quintupels und die Sehne γ' bestimmen eine irreductible kubische Raumcurve K'_3. Sie ist durch diese Bestimmungsstücke eindeutig gegeben und wird folglich mit dem Quintupel und γ' durch U_1 cyklisch in sich transformirt. Das Gleiche geschieht auch mit ihrer auf γ' befindlichen Involution conjugirter Pole, woraus folgt, dass diese mit (p_j, p'_j) identisch ist. Das Ebenenbüschel γ' (P_l) bezieht K'_3 perspectivisch auf die Reihe γ'' (q_l); die cyklische Projectivität τ', die U_1 auf K'_3 erzeugt, ist demnach mit T'' gleichartig. Hiebei stellt sich die zu τ' gehörige Involution $(a_j, a'_j)'$ als Projection von (q_j, q'_j) heraus.

Ebenso bestimmt das Quintupel im Vereine mit der Sehne γ'' eine kubische Curve K''_3. Für sie sind die Paare von (q_j, q'_j) conjugirte Pole und ihre cyklische Projectivität τ'' ist mit T' gleichartig. Die Beziehung zwischen τ'' und T' vermittelt γ'' (Q_l).

Die Curven K'_3 und K''_3 haben fünf Punkte $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ gemein und befinden sich desshalb auf einer völlig bestimmten Regelfläche zweiter Ordnung F. Diese Fläche hat (p_j, p'_j) und (q_j, q'_j) zu Polarinvolutionen, und ihre Regelschaaren (r) und (s) sind zu K'_3, beziehungsweise K''_3 perspectivisch. Die von U_1 in denselben veranlassten cyklischen Projectivitäten T_1 und T_2 besitzen daher ungleiche Typen. Es stimmt diesbezüglich T_1 mit T'' und T_2 mit T' überein.

19. Eine Fläche zweiter Ordnung f, die durch U_1 in sich transformirt wird, ist von der Art F. Irgend ein ihr eingeschriebenes Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ bestimmt mit γ' eine Curve K'_3,

die sie jedenfalls noch in einem sechsten reellen Punkte b_1 schneidet. Das Quintupel $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, das b_1 zum Ausgangspunkte hat, gehört nun sowohl f als auch K_3' an, da jedes dieser Gebilde U_1 zur Transformation in sich hat; K_3' liegt also ganz auf f. Ebenso weist man für diese Fläche eine K_3'' nach, woraus dann ihre Identität mit der durch $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ bestimmten F erhellt.

Dieselbe Schlussweise lehrt, dass eine kubische Raumcurve K_3, die durch U_1 in sich transformirt wird, eine K_3' oder eine K_3'' ist. Es sei wieder $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ ein Quintupel derselben. Die Fläche F, die durch $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ mitgegeben ist, hat mit K_3 noch einen sechsten reellen Punkt gemein, der zu vier weiteren (ebenfalls reellen) gemeinschaftlichen Punkten führt. K_3 liegt also vollständig auf F und ist in Folge dessen mit einer von den zwei kubischen Curven identisch, die durch die fünf Punkte auf F gegeben sind, d. i. mit K_3' oder K_3''.

20. Die dualen Betrachtungen führen von einem Ebenenquintupel $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ zu zwei kubischen Torsen k_3' und k_3'' und zu einer windschiefen Fläche zweiter Classe F_1, die k_3' und k_3'' eingeschrieben ist. Von diesen Torsen hat die erste γ' zur Achse und die zu (q_j, q_j') perspectivische Involution harmonisch conjugirter Elemente (P_j, P_j') von γ' (P_l) zur Involution conjugirter Polaren; die zweite verhält sich ebenso zu γ'' und zu der zu (p_j, p_j') perspectivischen Involution (Q_j, Q_j'); für F_1 endlich sind (P_j, P_j') und (Q_j, Q_j') Polarinvolutionen. Und auch hier umfassen die k_3' und k_3'' alle kubischen Torsen und die F_1 alle Flächen zweiter Classe, die U_1 zur Transformation in sich haben.

21. Die Fläche F_1 wird auch als Punktgebilde von U_1 in sich transformirt; Punktquintupel sind die Berührungspunkte der Ebenenquintupel. Nach Art. 19 gehört sie folglich in die Kategorie der Flächen F. Dessgleichen ist nach Art. 20 jede F auch eine F_1. Alle die Flächen $F \equiv F_1$ bilden somit ein in sich duales, einstufiges System: ein Büschel, das zugleich Schaar ist. In der That sind (wegen der Perspectivität von (P_j, P_j') und (q_j, q_j'), sowie der von (Q_j, Q_j') und (p_j, p_j')) γ' und γ'' reciproke Polaren für alle $F \equiv F_1$. Die Gesammtheit dieser Flächen ist daher das durch die reciproken Polaren γ', γ'' und die Polarinvolutionen (p_j, p_j') und (q_j, q_j') oder (P_j, P_j') und

(Q_j, Q'_j) völlig festgelegte specielle Büschel $[F]$. Dasselbe besitzt einen imaginären Vierseitdurchschnitt, der γ', γ'' zum Haupttetraëder der Collineation U_1 ergänzt. Die imaginären Gegenkantenpaare sind durch die Involutionen harmonisch conjugirter Erzeugenden (r_j, r'_j) und (s_j, s'_j) von T_1 und T_2 in (r) und (s) [s. Art. 18] gegeben. Verbindet man (r_j, r'_j) mit der Identität (s_j, s_j), dessgleichen (s_j, s'_j) mit (r_j, r_j), so erhält man zwei geschaart-involutorische Collineationen J_1 und J_2 und mit diesen zwei Congruenzen $[s]$ und $[r]$, die reelle Repräsentanten des Vierseitdurchschnittes sind.

22. Die Curven K'_3 bilden ein Bündel $[K'_3]$. Die Curve K'_3, die durch einen beliebigen Punkt a_1 des Raumes bestimmt wird, kann man entweder im Sinne des Art. 18 durch Vervollständigung des Quintupels $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ darstellen oder vermittelst der durch a_1 laufenden F als Erzeugniss einer Regelschaar (r) und eines projectivischen Ebenenbüschels γ' (P_l) erhalten. Sind r_1 und P_1 die durch a_1 bestimmten Elemente der erzeugenden Gebilde, ferner $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)_1$ und $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)_1$ die durch dieselben fixirten cyklisch-projectiven Gruppen, so ist durch:

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)_1 \overline{\wedge} (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)_1$$

die Projectivität θ_1 zwischen (r) und γ' (P_l) völlig bestimmt.

Wird P_1 festgehalten und beschreibt r_1 die Schaar (r), so erhält man das Büschel (K'_3) der auf F verlaufenden Curven aus dem Bündel $[K'_3]$. Die Schaar der Gruppen $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)_i$, die bei diesem Processe der Reihe nach an Stelle der ersten Gruppe treten, ist mit dieser durch ein Büschel von Projectivitäten (T) verbunden, das (r_j, r'_j) zur festen Involution harmonisch-conjugirter Elemente hat.[1] Die das Curvenbüschel (K'_3) erzeugenden Projectivitäten θ_i können aus θ_1 vermittelst (T) abgeleitet werden und bilden somit selbst ein Büschel (θ).

Zu (θ) gelangt man auch, wenn man r_1 festhält und P_1 variiren lässt. Es ergibt sich hiebei (θ) aus θ_1 durch ein in γ' (P_l) befindliches Projectivitätenbüschel $(T)'$.

Dieser Vorgang, auf die Regelschaaren (r) aller Flächen des Büschels $[F]$ angewendet, liefert das ganze Curvenbündel $[K'_3]$.

[1] Siehe: Theorie der cykl. Projectivitäten, S. 304 ff.

Das Gleiche gilt für das zu $[K_3']$ conjugirte Curvenbündel $[K_3'']$ mit Bezug auf die Regelschaaren (s) der Flächen F und das Ebenenbüschel γ'' (Q_l).

23. Auf der Rückkehrcurve einer Torse k_3'' erhält man in den Schmiegungspunkten der umschriebenen Ebenenquintupel Punktquintupel von U_1. Nach Art. 19 ist diese Curve folglich eine K_3'.

Dual ist jede K_3', als Torse ihrer Schmiegungsebenen, eine k_3''. Die vermöge ihrer Entstehung sich reciprok gegenüber stehenden Bündel $[K_3']$ und $[k_3'']$ sind identisch. Alle K_3' haben nicht nur γ' zur Sehne und (p_j, p_j') zur Involution conjugirter Punkte, sondern auch γ'' zur Achse und (Q_j, Q_j') zur Involution conjugirter Ebenen.

Die Involution $(a_j, a_j')'$ der von U_1 auf K_3' veranlassten cyklischen Projectivität τ' [s. Art. 18] erzeugt eine Regelschaar, die durch U_1 in sich transformirt wird und folglich als (s) der durch K_3' bestimmten Fläche F angehört.

In Folge der Perspectivität von (r) und K_3' ist auch (r_j, r_j') zu $(a_j, a_j')'$ perspectivisch, und es wird also $(a_j, a_j')'$ auf K_3' auch durch J_1 inducirt. Diese geschaart-involutorische Collineation führt also jede K_3' in sich über. Sie bestimmt im Vereine mit den zwei in ihr enthaltenen zusammengehörigen Involutionen conjugirter Elemente (p_j, p_j') und (Q_j, Q_j') das Curvenbündel $[K_3']$ vollständig.[1]

Gleiches gilt für $[K_3'']$ in Hinsicht auf (q_j, q_j'), (P_j, P_j') und J_2.

Beide Curvenbündel sind in sich dual. Alle reciproken Umformungen, die (p_j, p_j') mit (Q_j, Q_j') und gleichzeitig (q_j, q_j') mit (P_j, P_j') vertauschen, transformiren jedes dieses Bündel in sich. Diese Transformationen sind: ein Büschel von Nullsystemen, ein

---

[1] Diese Bestimmungsstücke repräsentiren ein für das Bündel festes Schmiegungstetraëder. Dasselbe ist für $[K_3']$ imaginär, und dadurch unterscheidet sich dieses Bündel von demjenigen, das Herr Sturm im 26. Bande der Annalen, S. 490, bespricht. Die Ecken A, C sind die Ordnungspunkte von (p_j, p_j'), die Seitenflächen ABD, CDB die Ordnungsebenen von (Q_j, Q_j'), die Kanten AB, CD und AD, CB die Achsen von J_2, beziehungsweise J_1. A, C sind Punkte, ABD, CDB Schmiegungsebenen und AD, CB Tangenten aller Curven des Bündels.

Die von Herrn Sturm gegebene Erzeugung durch projectivische Kegelbüschel wird für $[K_3']$ illusorisch, wogegen die in Art. 22 erläuterte Darstellung dieses Bündels auch für das von Herrn Sturm behandelte gilt.

Gebüsch von allgemeinen Correlationen und ein Gebüsch von Polarsystemen. Die Nullsysteme haben γ', γ'' zum Polarenpaar, die Correlationen entnehmen ihre Kernflächen dem Büschel $[F]$, und Ordnungsfläche eines Polarsystems ist eine Fläche zweiter Ordnung durch ein Vierseit von der Art $p_j q_l p'_j q'_l$, in dem die Gegeneckenpaare den Involutionen (p_j, p'_j) und (q_j, q'_j) entnommen sind.

Das Wichtigste aus diesem Abschnitte (V) kann, wie folgt, zusammengefasst werden:

Die Collineation U_1 mit räumlichen Quintupeln hat für jede Fläche eines Flächenbüschels zweiter Ordnung mit Vierseitdurchschnitt $[F]$ und für jede Curve zweier in sich dualer Bündel von kubischen Raumcurven $[K'_3]$ und $[K''_3]$ die Bedeutung einer Transformation in sich.

Das Flächenbüschel $[F]$ hat die reellen Gegenkanten γ', γ'' des Haupttetraëders der Collineation U_1 zu reciproken Polaren und die auf diesen Geraden von U_1 inducirten Involutionen harmonisch conjugirter Elemente, nämlich (p_j, p'_j) und (P_j, P'_j) einerseits und $q_j, q'_j)$ und (Q_j, Q'_j) anderseits, zu Polarinvolutionen. Die Regelschaaren des Büschels constituiren zwei lineare Congruenzen $[r]$ und $[s]$, welche zwei geschaart-involutorische Collineationen J_1 und J_2 veranlassen.

Die Curven der zwei Bündel $[K'_3]$, $[K''_3]$ vertheilen sich in Büscheln auf die Flächen F. Das eine Bündel hat (p_j, p'_j) und (Q_j, Q'_j), das andere (q_j, q'_j) und (P_j, P'_j) zu festen Involutionen conjugirter Elemente; jede Curve des ersten wird durch J_1, jede des zweiten durch J_2 in sich transformirt.

Irgend zwei Curven dieser Bündel, die durch einen Punkt hindurchgehen, schneiden sich für jede Lage desselben stets noch in vier weiteren reellen Punkten, die jenen zu einem Quintupel von U_1 ergänzen. Dual bestimmt eine jede Ebene, als Schmiegungsebene, zwei Curven, und zwar in jedem Bündel eine, die stets noch vier gemeinschaftliche Schmiegungsebenen besitzen, welche die angenommene zu einem Quintupel von U_1 vervollständigen.

24. Die Strahlen e der Congruenz $[e]$ mit den Achsen γ', γ'', die eine K_3' treffen, bilden eine Linienfläche vierter Ordnung Φ, die γ' zur drei- und γ'' zur einfachen Leitlinie hat. Diese Fläche bleibt bei allen Transformationen erhalten, die K_3' und γ', γ'' in sich überführen, insbesondere bei Anwendung von U_1 und J_1. U_1 ordnet ihre Erzeugenden in Quintupel $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ — s. Art. 17 — und J_1 in Paare e_j, e_j' an. Eine jede e_j zieht somit zunächst ein Quintupel $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, in dem sie enthalten ist, nach sich und hiedurch noch ein harmonisch conjugirtes $(e_1', e_2', e_3', e_4', e_5')$.

Es sei nun $\overline{K_3'}$ eine zweite Curve des Bündels $[K_3']$, bestimmt durch den auf e_j beliebig angenommen Punkt a_j. Sie scheidet aus $[e]$ gleichfalls eine Fläche Φ aus, die jedoch von der ersten nicht verschieden ist, da jeder ihrer durch e_j geführten ebenen Schnitte, als eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf γ', durch die auf den übrigen neun e_j befindlichen Punkte völlig bestimmt ist.

Alle K_3', die irgend eine Erzeugende e_j von Φ treffen, befinden sich somit ganz auf dieser Fläche, so dass diese auch als Erzeugniss einer solchen längs e_j hingleitenden K_3' aufgefasst werden kann.

Fasst man eine Curve dieser Schaar als Ordnungscurve eines linearen Nullsystems N auf, so hat dasselbe jedenfalls γ' und γ'' zu conjugirten Polaren, da γ'' die bezüglich jeder K_3' zur Sehne γ' gehörige Achse ist. Eine jede Erzeugende von Φ ist demnach ein Leitstrahl des Nullsystems und also auch ein Schmiegungsstrahl von K_3'. Jede Schmiegungsebene von K_3' ist somit zugleich eine Tangentialebene von Φ und also K_3' eine Haupttangentencurve dieser Fläche.

Beschreibt K_3' eine Fläche des Büschels $[F]$, so erhält man die sämmtlichen Φ, zu welchen $[K_3']$ Veranlassung gibt. Die Gesammtheit ist ein in sich duales Büschel $(\Phi)_1$.

Gleiches lässt sich für $[K_3'']$ nachweisen, es gilt also der Satz:

Durch eine jede Curve K_3 aus einem der Bündel $[K_3']$, $[K_3'']$ wird aus der Congruenz $[e]$ mit den Achsen γ', γ'' eine Linienfläche vierter Ordnung Φ ausgeschieden, die ihre zweite Schaar von Haupttangentencurven — die sämmtlich kubisch sind — demjenigen von den zwei Bündeln $[K_3']$, $[K_3'']$ entnimmt, dem K_3 angehört.

25. Ausser den F und Φ existiren noch weitere Linienflächen Ψ, die durch U_1 in sich transformirt werden. Sie sind von vierter Ordnung und bilden zwei dreistufige Systeme $[\Psi]_1$, $[\Psi]_2$, die das Büschel $[F]$, doppelt gezählt, und die Büschel (Φ_1), beziehungsweise $(\Phi)_2$ umfassen. Sie sind die Träger der allgemeinsten Geradenquintupel. Man erhält eine Ψ als Erzeugniss von zwei projectivischen Reihen auf einer K_3 oder auf zwei K_3 desselben Bündels. Die Projectivität wird durch Zuordnung eines Quintupels $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ von K_3 zu einem zweiten $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ dieser, beziehungsweise der anderen Curve bestimmt; was ersichtlich auf fünf Weisen geschehen kann. Im ersten Falle ist die K_3 für die Ψ eine Doppelcurve, im zweiten eine einfache Curve.

Durch jede Gerade des Raumes ist eine Ψ in jedem System bestimmt. Sie wird von allen jenen K_3 des zugehörigen Curvenbündels erfüllt, die jene Gerade treffen. Die Curve, welche diese Gerade zur Sehne hat, ist ihre Doppelcurve. Ist die Gerade ein Strahl der Congruenz $[e]$, so ist die Ψ eine Φ, und wenn sie einem von den zwei Congruenzen $[r]$, $[s]$ angehört, eine F.

Zwei Ψ desselben Systems durchsetzen sich — von festen Schnittlinien abgesehen — in vier Curven K_3, zwei Ψ aus verschiedenen Systemen dagegen in zehn Erzeugenden, die zwei Quintupel bilden. Es werden also durch die Ψ keine neuen Curven, die durch U_1 in sich transformirt werden, eingeführt.

VI.

Darstellung der Quintupellage.

26. Eine Collineation U, die ein räumliches Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ besitzt, ist cyklisch für den ganzen Raum, und zwar ist sie eine U_1. Denn ihre fünfmalige Wiederholung liefert eine Collineation U^5, die jeden der Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 zum Hauptpunkte hat und folglich eine Identität ist. Da U_1 durch die Zuordnung:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_1 \end{pmatrix}$$

völlig bestimmt ist, so unterliegt ihre Vervollständigung keiner Schwierigkeit

Man kann die zwei kubischen Curven K_3' und K_3'', die U_1 zur Transformation in sich haben und durch die fünf gegebenen Punkte laufen, eindeutig herstellen. Zu ihrer Bestimmung führt der Satz: Es existirt nur eine kubische Raumcurve K_3, für welche fünf gegebene Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — von denen keine vier in einer Ebene liegen — in dieser Anordnung eine cyklisch-projective Gruppe von vorgeschriebenem Typus $k=1$ oder $=2$ vorstellen.

Um die K_3 zu erhalten, lege man durch die Gerade $\overline{a_4 a_5}$ und die Punkte a_1, a_2, a_3 die Ebenen E_1, E_2, E_3 und vervollständige dieses Büschel durch E_4, E_5 zu einer cyklisch-projectivischen Gruppe von der Periode 5 und dem Typus k. Dann sind E_4 und E_5 die Tangentialebenen von K_3 in a_4 und a_5. — Ersichtlich kann $\overline{a_4 a_5}$ durch $\overline{a_j a_{j+1}}$ ersetzt werden. Den zwei Werthen von $k=1$ und 2 entsprechen die zwei Curven K_3' und K_3''. Ist eine von diesen Curven in angezeigter Weise hergestellt, so erhält man jede von den zwei reellen Kanten γ', γ'' des Haupttetraëders der Collineation durch eine lineare Construction: Man ermittelt zu a_1 und a_2 die harmonisch conjugirten Punkte a_1' und a_2' auf K_3, verbindet sie mit jenen durch $\overline{a_1 a_1'}$ und $\overline{a_2 a_2'}$ und zieht aus a_3 die Transversale t an diese Geraden. Werden letztere von t in x_1 und x_2 getroffen, und ist

$$(a_1 a_1' x_1 y_1) = (a_2 a_2' x_2 y_2) = -1,$$

so ist $(a_3 y_1 y_2)$ eine Ebene, in der sich γ' befindet. Eine zweite Ebene liefert a_4.

Die duale Construction, auf die Schmiegungsebenen A_j in den a_j angewendet, führt zu γ''. Übrigens ist γ'', als Polare von γ' bezüglich der durch $\overline{a_1 a_1'}$, $\overline{a_2 a_2'}$, $\overline{a_3 a_3'}$ bestimmten Fläche F, nun bequemer zu erlangen.

Zu den Curven K_3' und K_3'' führt auch die Bemerkung, dass alle cyklisch-projectivischen Gruppen von gleichen Perioden und Typen projectivisch sind und projectivische kubische Raumcurven in collinearer Verwandtschaft stehen: Man wird auf einer beliebigen kubischen Raumcurve C_3 eine cyklische Projectivität der Periode 5 anordnen und die zugehörige ideelle Sehne γ ermitteln. Ist dann $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ ein beliebiges Quintupel derselben und $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ das gegebene Quintupel, so bestimmen die zwei Zuordnungen:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_2 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

zwei Collineationen V_1 und V_2, die C_3 in die zwei durch $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ bestimmten Curven K_3' und K_3'', und γ in γ' und γ'' überführen.

27. Weist eine Collineation U ein ebenes oder ein gerades Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ auf, so ist sie desshalb noch nicht cyklisch.

Im ersten Falle zieht $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ eine zweistufige Schaar von gleichartigen Quintupeln in seiner Trägerebene C' und eine einstufige Schaar von geraden Quintupeln auf der Hauptgeraden γ' in C' nach sich. Der zweite Fall, in dem der Träger von $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ eine Gerade γ' ist, ist entweder mit dem ersten identisch, oder es tritt zu der Quintupelschaar auf γ' noch eine einstufige Schaar von Ebenenquintupeln hinzu, welche die — jedenfalls vorhandene — zweite reelle Hauptgerade γ'' der Collineation zur gemeinschaftlichen Achse haben.

Treten in U zwei gerade Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ und $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ auf verschiedenen, windschiefen Trägern γ' und γ'' auf, so ist zu unterscheiden, ob diese gleich- oder ungleichartig hinsichtlich des Typus sind. Ist Letzteres der Fall, so ordnet die Collineation U wohl alle Transversalen von γ' und γ'' in Quintupel $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, ohne jedoch cyklisch für die Punkte des Raumes zu sein. Trifft das Erstere zu, so ist U eine cyklische Collineation. Die Geraden $\overline{a_i b_i} \equiv e_i$ erfüllen nun eine Regelschaar, die gleichzeitig mit ihrer Leitschaar durch U in sich transformirt wird. Es liegt die Collineation U_3 vor.

Sollen zwei ebene Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ und $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ einer Collineation U angehören, so müssen sie gleiche Typen besitzen, gleichviel, ob sie in einer Ebene C' oder in zwei Ebenen C' und C_1' liegen.

Für die erste Annahme ist dies selbstverständlich. Sie kommt nicht weiter in Betracht, da sie U bloss in C' cyklisch macht. Bei der zweiten Annahme wird in jeder der zwei Ebenen eine zweistufige Schaar von Quintupeln erzeugt. Die Collineation U^5 ist demzufolge eine Identität und U für den ganzen Raum cyklisch von der Periode 5. Da nun C' und C_1' durch U in sich transformirt werden, so geschieht dies auch mit ihrer Schnittlinie σ. Auf ihr wird folglich durch die cyklischen Collineationen in C' und C'_1 dieselbe cyklische Projectivität T' inducirt, woraus hervorgeht, dass alle von U in diesen Ebenen erzeugten Quintupel von demselben Typus sind. Auf der Verbindungslinie der reellen Hauptpunkte c' und c'_1 von C' und C'_1 entsteht hiebei eine Identität, und es ist also U eine cyklische Collineation von der Art U_2.

Die Annahme eines ebenen Quintupels $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ und eines nicht in der Ebene desselben befindlichen geraden Quintupels $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ ist unstatthaft (vergl. Art. 17). Es gilt also der Satz:

Eine Collineation U, die zwei auf verschiedenen Trägern befindliche, gleichartige, gerade oder ebene Quintupel besitzt, ist für den ganzen Raum cyklisch, und zwar ist sie von der Art U_3, beziehungsweise U_2.

Das Auftreten von zwei solchen Quintupeln ist zugleich die nothwendige Bedingung für die Quintupellagen (b), beziehungsweise (a).

28. Jede von den drei Collineationen U_i wurde als eigentliche Hermite'sche Transformation erkannt. U_2 transformirt Regelflächen und elliptische Flächen zweiter Ordnung in sich, U_1 und U_3 dagegen nur windschiefe Flächen. Benützt man diese Thatsache, so kann man für die drei Collineationen eine einheitliche Darstellung gewinnen.

Es sei F eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung, (r) ihre erste und (s) ihre zweite Regelschaar. In (r) wird eine cyklische Projectivität T_1 von der Periode 5 und dem Typus k und in (s) eine Identität T_2 angeordnet.

Sind r_1, r_2, r_3, r_4 vier Erzeugende einer Gruppe von T_1 in (r) und s_1, s'_1, s''_1 drei beliebige Erzeugende von (s), so ist durch die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} r_1 \cdot s_1, & r_2 \cdot s_1, & r_1 \cdot s'_1, & r_2 \cdot s'_1, & r_3 \cdot s''_1 \\ r_2 \cdot s_1, & r_3 \cdot s_1, & r_2 \cdot s'_1, & r_3 \cdot s'_1, & r_4 \cdot s''_1 \end{pmatrix}$$

eine Collineation bestimmt. Dieselbe transformirt wegen:

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \overline{\wedge} (r_2, r_3, r_4, r_5) \overline{\wedge} (r_3, r_4, r_5, r_1) \quad ..\text{I})$$

jeden Punkt der Reihe:

$$r_1 \cdot s_1, \quad r_2 \cdot s_1, \quad r_3 \cdot s_1, \quad r_4 \cdot s_1, \quad r_5 \cdot s_1, \quad r_1 \cdot s_1$$

in den auf ihn folgenden, hat also in diesen Punkten ein gerades Quintupel. Gleiches gilt für s_1' und s_1'': die Collineation ist eine U_3. Ihre lineare Congruenz $[f]$ ist durch die Involution harmonisch conjugirter Elemente der Projectivität T_1 gegeben.

29. Zu der Anordnung in (r) wird eine von gleicher Beschaffenheit in (s) gefügt, so dass nun T_1 und T_2 in Periode und Typus übereinstimmen.

Sind $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ und $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ zwei Gruppen aus T_1 und T_2, so bestimmt die Zuordnung:

$$\begin{pmatrix} r_1 \cdot s_1, & r_2 \cdot s_1, & r_1 \cdot s_2, & r_2 \cdot s_2, & r_3 \cdot s_3 \\ r_2 \cdot s_2, & r_3 \cdot s_2, & r_2 \cdot s_3, & r_3 \cdot s_3, & r_4 \cdot s_4 \end{pmatrix}$$

eine Collineation, die F im Sinne der Projectivitäten T_1 und T_2 in sich transformirt. Wegen I) und wegen:

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) \overline{\wedge} (s_2, s_3, s_4, s_5) \overline{\wedge} (s_3, s_4, s_5, s_1) \qquad \ldots \text{II)}$$

entspricht in der Reihe:

$$r_1 \cdot s_1, \quad r_2 \cdot s_2, \quad r_3 \cdot s_3, \quad r_4 \cdot s_4, \quad r_5 \cdot s_5, \quad r_1 \cdot s_1$$

jeder Punkt dem vorhergehenden; diese Punkte bilden — da:

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \overline{\wedge} (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \qquad \ldots \text{III)}$$

ist — ein ebenes Quintupel der Collineation. Die Projectivitäten, die sich aus III) durch cyklische Permutation der einen Seite ergeben, liefern vier weitere ebene Quintupel: die Collineation ist eine U_2. Der cyklischen Permutation, etwa der linken Seite, entspricht nach Art. 28 einer Collineation U_3, denn die Erzeugenden s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 bleiben hiebei fest, während sich die r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 im Sinne der Projectivität T_1 vertauschen. Die Ebenen $C_1'', C_2'', C_3'', C_4'', C_5''$ der fünf Quintupel bilden also selbst ein Quintupel, und zwar einer U_3, sie gehören folglich einem Büschel an, dessen Achse γ'' eine Hauptgerade von U_2 ist.

Die zweite Hauptgerade γ' ist, als Ort der Pole von γ'' bezüglich der Kegelschnitte K, welche die C_j'' auf F festlegen, die Polare von γ'' bezüglich dieser Fläche. Auf ihr wird durch die fünf Ebenen C_j'' eine Gruppe der Projectivität T' fixirt, die wegen der perspectivischen Lage von $(C_1'', C_2'', C_3'', C_4'', C_5'')$ und $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ und der daraus folgenden projectiven Beziehung:

$$(C_1'', C_2'', C_3'', C_4'', C_5'') \overline{\wedge} (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \qquad \ldots \text{IV)}$$

mit T_1 gleichartig ist.

30. Unter Beibehaltung von T_1 wird die cyklische Folge in (s) durch $(s_1, s_3, s_5, s_2, s_4)$ ersetzt, also die Projectivität:

$$(s_1, s_3, s_5, s_2, s_4) \overline{\wedge} (s_3, s_5, s_2, s_4, s_1) \qquad \text{V)}$$

als T_2 aufgefasst.

Die durch die Zuordnung:

$$\begin{pmatrix} r_1 \cdot s_1, & r_2 \cdot s_1, & r_1 \cdot s_3, & r_2 \cdot s_3, & r_3 \cdot s_5 \\ r_2 \cdot s_3, & r_3 \cdot s_3, & r_2 \cdot s_5, & r_3 \cdot s_5, & r_4 \cdot s_2 \end{pmatrix}$$

bestimmte Collineation transformirt wegen I) und V) in der nachstehenden Reihe:

$$r_1 \cdot s_1, \quad r_2 \cdot s_3, \quad r_3 \cdot s_5, \quad r_4 \cdot s_2, \quad r_5 \cdot s_4, \quad r_1 \cdot s_1 \qquad \text{VI)}$$

jeden Punkt in den folgenden. Diese Punkte bilden für sie ein Quintupel, und da dieselben weder auf einer Geraden noch in einer Ebene liegen, weil T_1 und T_2 verschiedenen Typen angehören, so ist die Collineation eine U_1.

In der That lassen sich die kubischen Curven K_3' und K_3'', die durch U_1 in sich transformirt werden, nun direct nachweisen.

Aus III) und V) ergeben sich die ebenen Quintupel:

$$\begin{array}{lllll} r_1 \cdot s_1, & r_2 \cdot s_2, & r_3 \cdot s_3, & r_4 \cdot s_4, & r_5 \cdot s_5; \\ r_1 \cdot s_2, & r_2 \cdot s_3, & r_3 \cdot s_4, & r_4 \cdot s_5, & r_5 \cdot s_1; \\ r_1 \cdot s_3, & r_2 \cdot s_4, & r_3 \cdot s_5, & r_4 \cdot s_1, & s_5 \cdot s_2; \\ r_1 \cdot s_4, & r_2 \cdot s_5, & r_3 \cdot s_1, & r_4 \cdot s_2, & r_5 \cdot s_3; \\ r_1 \cdot s_5, & r_2 \cdot s_1, & r_3 \cdot s_2, & r_4 \cdot s_3, & r_5 \cdot s_4; \end{array}$$

ihre Träger $C_1', C_2', C_3', C_4', C_5'$ bilden ein Büschel [vergl. Art. 29], das zu der Reihe:

$$r_1 \cdot s_1, \quad r_1 \cdot s_2, \quad r_1 \cdot s_3, \quad r_1 \cdot s_4, \quad r_1 \cdot s_5$$

perspectivisch und folglich (wegen III)) zu $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ projectivisch ist. Schnittpunkte homologer Elemente sind die Punkte des Quintupels VI). Diese befinden sich also auf einer kubischen Curve, die auf F perspectivisch zu (r) liegt und die Achse γ' von $(C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, C'_5)$ zur Sehne hat und demzufolge eine K'_3 ist. Vier weitere Curven derselben Kategorie erhält man aus K'_3, indem man auf VI) die geschaart-cyklische Collineation anwendet, die in (r) die Identität und in (s) die Projectivität T_1 erzeugt.

Zu Curven K''_3 gibt die aus III) resultirende Projectivität:

$$(s_1, s_3, s_5, s_2, s_4) \overline{\wedge} (r_1, r_4, r_2, r_5, r_3)$$

Veranlassung. Sie liefert mit I) die Quintupel:

$$\begin{array}{lllll}
s_1 \cdot r_1, & s_3 \cdot r_4, & s_5 \cdot r_2, & s_2 \cdot r_5, & s_4 \cdot r_3; \\
s_1 \cdot r_4, & s_3 \cdot r_2, & s_5 \cdot r_5, & s_2 \cdot r_3, & s_4 \cdot r_1; \\
s_1 \cdot r_2, & s_3 \cdot r_5, & s_5 \cdot r_3, & s_2 \cdot r_1, & s_4 \cdot r_4; \\
s_1 \cdot r_5, & s_3 \cdot r_3, & s_5 \cdot r_1, & s_2 \cdot r_4, & s_4 \cdot r_2; \\
s_1 \cdot r_3, & s_3 \cdot r_1, & s_5 \cdot r_4, & s_2 \cdot r_2, & s_4 \cdot r_5;
\end{array}$$

deren Ebenen $C''_1, C''_2, C''_3, C''_4, C''_5$ ein zu $(r_1, r_4, r_2, r_5, r_3)$ perspectivisch liegendes und folglich zu $(s_1, s_3, s_5, s_2, s_4)$ projectivisches Büschel bilden. Schnittpunkte homologer Elemente sind ersichtlich die Punkte VI). Diese befinden sich also auch auf einer kubischen Curve, die auf F perspectivisch zu (s) ist und die Achse γ'' von $(C''_1, C''_2, C''_3, C''_4, C''_5)$ zur Sehne hat und folglich dem Bündel $[K''_3]$ angehört. Vier weitere Curven desselben kann man aus K''_3 vermittelst der geschaart-cyklischen Collineation ableiten, die in (s) die Identität und in (r) die Projectivität T_2 hervorruft.

Da C'_1 die Gerade $(r_3 \cdot s_3, r_4 \cdot s_4)$ und C''_1 ihre reciproke Polare $(r_3 \cdot s_4, r_4 \cdot s_3)$ bezüglich F enthält, so sind C'_1 und C''_1 hinsichtlich F conjugirt. Ebenso C'_1 und C''_2, denn C'_1 enthält $(r_1 \cdot s_1, r_4 \cdot s_4)$ und C''_2 $(r_1 \cdot s_4, r_4 \cdot s_1)$ etc.: γ' und γ'' sind reciproke Polaren von F.

31. Die erörterten Constructionen der Collineationen U_i führen zu einer typischen Darstellung.

Bei U_3 wird eine Ebene C, die F nicht berührt, angenommen. Sie schneidet F in einem Kegelschnitte K, auf dem durch (r) eine cyklische Projectivität t_1 inducirt wird. t_1 legt in C eine cyklische

Collineation mit der reellen Hauptgeraden γ'' und dem reellen Hauptpunkte c' fest. Dies wird nun für jede Ebene des Büschels mit der Achse γ'' durchgeführt. Man erhält so eine räumliche cyklische Rotation, die den Ort γ' von c' zur Achse hat und die Erzeugenden der Schaar (r) — diese als Elemente betrachtet — ebenso cyklisch anordnet wie U_3.

Bei U_1 und U_2 entnimmt man C dem Büschel γ'' (C''_j).

Nun transformire man F, K, γ'' und γ' durch eine Collineation, am besten eine Perspectivität, derart, dass γ'' ins Unendliche fällt und die Involution (q_j, q'_j) auf γ'' zur absoluten Involution wird, ferner γ' senkrecht wird zur Stellung der Ebenen (C). Dann tritt an Stelle von F ein Rotationshyperboloid, die Kegelschnitte K erscheinen als Kreise desselben und die sämmtlichen auf diesen Kreisen befindlichen cyklisch-projectivischen Gruppen als Ecken von regulären Fünfecken.

Um nun Punktquintupel der Collineationen U_1, U_2, U_3 zu erhalten, nehme man auf einem der Kreise K zwei gleichartige reguläre Fünfecke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ an und lege durch die Ecken des ersten die Erzeugenden r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 und durch die des zweiten s_1, s_2, s_3, s_4, s_5. Dann sind:

$$r_1 \cdot s_1, \quad r_2 \cdot s_3, \quad r_3 \cdot s_5, \quad r_4 \cdot s_2, \quad r_5 \cdot s_4;$$
$$r_1 \cdot s_1, \quad r_2 \cdot s_2, \quad r_3 \cdot s_3, \quad r_4 \cdot s_4, \quad r_5 \cdot s_5;$$
$$r_1 \cdot s_1, \quad r_2 \cdot s_1, \quad r_3 \cdot s_1, \quad r_4 \cdot s_1, \quad r_5 \cdot s_1$$

Quintupel von U_1, U_2, U_3 beziehungsweise.

32. Man kann eine cyklische Collineation U_i auch durch ihre Hauptelemente festlegen, nur muss bei einer derartigen Bestimmung der Typus und für U_1 auch der Sinn der cyklischen Folge angegeben werden.

So ist eine U_1 bestimmt, wenn erstens die reellen Hauptgeraden γ', γ'' mit ihren Involutionen harmonisch conjugirter Punkte (p_j, p'_j) und (q_j, q'_j) vorliegen, zweitens die Typen der cyklischen Projectivitäten T' und T'' angegeben sind und drittens einer Richtung in γ' eine in γ'' zugewiesen ist.

Zur Bestimmung einer U_2 ist, nach Annahme von γ' und γ'', die Angabe von (p_j, p'_j) und die des Typus von T' nothwendig und hinreichend.

Eine U_3 endlich ist durch die zugehörige lineare Congruenz — die allerdings imaginäre Achsen besitzen muss — und durch den Typus der auf den Congruenzstrahlen erzeugten cyklischen Projectivitäten fixirt.

Zu einer jeden der drei Collineationen U_i ist eine zweite cyklische Collineation conjugirt, die mit ihr die sämmtlichen Quintupel gemein hat. Es ist dies die Collineation U_i^2, der wieder in gleicher Weise U_i entspricht. Beide Collineationen unterscheiden sich nur durch die cyklische Folge (den Typus), nach welcher sie die Elemente der Quintupel anordnen. Wenn U_i die cyclische Folge $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ bedingt, so lautet die zu U_i^2 gehörige: $(a_1, a_3, a_5, a_2, a_4)$.