Wahrscheinlichkeiten im Gebiete der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Ich werde in dieser Mittheilung einige Sätze über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens gewisser arithmetischer Eigenschaften des grössten gemeinschaftlichen Divisors von n aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen ableiten.

Ist $\mu = \alpha + \beta i$ eine aus den vierten Einheitswurzeln gebildete complexe Zahl und setzt man

$$\{\mu\} = \left[\alpha + \frac{1}{2}\right] + \left[\beta + \frac{1}{2}\right] i = \{\alpha\} + \{\beta\} i,$$

so ist

$$N(\mu - \{\mu\}) \leqq \frac{1}{2}$$

Die ganze complexe Zahl $\{\mu\}$ kann die an μ zunächst liegende ganze complexe Zahl genannt werden. Leitet man nun aus den zwei gegebenen ganzen complexen Zahlen m und m_1 die ganzen complexen Zahlen $m_2, m_3 \ldots, m_{\nu+1}$ durch die Gleichungskette

$$m - \left\{\frac{m}{m_1}\right\} m_1 = m_2$$

$$m_1 - \left\{\frac{m_1}{m_2}\right\} m_2 = m_3$$

$$m_{\nu-1} - \left\{\frac{m_{\nu-1}}{m_\nu}\right\} m_\nu = m_{\nu+1}$$

ab, so ist

$$N(m_{\nu+1}) \leqq \frac{N(m)}{2^\nu}$$

und daher muss man schliesslich durch Fortsetzung dieses bekannten Verfahrens, da alle Normen ganze nicht negative Zahlen sind, zu einer von Null verschiedenen ganzen complexen Zahl mit kleinster Norm gelangen, welche bekanntlich der grösste gemeinsame Theiler von m nnd m_1 ist und mit $[m, m_1]$ bezeichnet werden möge. Ist $[m, m_1]$ eine Einheit, so sind die zwei ganzen complexen Zahlen m und m_1 theilerfremd. Hat man eine Reihe von ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ $i_1, i_2, \ldots i_\nu$, so lässt sich in bekannter Weise mit Hilfe des eben erwähnten Verfahrens ihr grösster gemeinsamer Theiler $[i_1, i_2, \ldots, i_\nu]$ ableiten; derselbe soll in den folgenden Zeilen, wie auch alle anderen auftretenden ganzen complexen Zahlen, stets als im Gaussischen Sinne primär vorausgesetzt werden.

Der Inbegriff aller im Gaussischen Sinne primären Zahlen von der Form $a+bi$ ausser der Null, deren Normen nicht grösser als $N(n)$ sind, möge, wie in meinen früheren Arbeiten, mit (n) die Anzahl der Individuen des Zahlencomplexes (n) mit $\mathfrak{A}(n)$ bezeichnet werden und es soll $\sum\limits_{x=(n)}$ ausdrücken, dass die Summation bezüglich x über alle $\mathfrak{A}(n)$ Individuen des Complexes (n) auszudehnen ist.

Ist $f(x)$ eine irgendwie definirte Function d ein Divisor der ganzen complexen Zahl x und

$$\sum_{d} f(d) = F(x),$$

wo die Summation über alle primären Theiler von x zu erstrecken ist, so kann man die Summen

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)} F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]); \quad \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)}' F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]),$$

wo die Marke am zweiten Summenzeichen anzeigt, dass die Summation nur über alle Combinationen der ν^{ten} Classe ohne

Wiederholung der $\mathfrak{A}(n)$ Individuen von (n) zu erstrecken ist, leicht nach den Functionen $f(\lambda)$ ordnen. Berücksichtigt man nämlich, dass die Function $f(\lambda)$ nur dann auftreten kann, wenn $[i_1, i_2, \ldots, i_\nu]$ ein Vielfaches von λ ist, sowie dass der grösste gemeinsame Theiler der Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ nur dann ein Vielfaches von λ sein kann, wenn jede von ihnen diese Eigenschaft besitzt, so erkennt man, dass der Coëfficient von $f(\lambda)$ in der ersten Summe gleich der Anzahl der Variationen der ν^{ten} Classe von $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(\lambda)}\right)$ Elementen mit Wiederholungen, d.i. gleich $\mathfrak{A}^\nu\left(\frac{n}{N(\lambda)}\right)$ ist, während er in der zweiten Summe mit der Anzahl der Combinationen der ν^{ten} Classe von $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(\lambda)}\right)$ Elementen ohne Wiederholungen, d. i. mit $\binom{\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(\lambda)}\right)}{\nu}$ übereinstimmt.

Man hat daher die Relationen:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)} F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \sum_{\lambda = (n)} f(\lambda)\, \mathfrak{A}^\nu\left(\frac{n}{N(\lambda)}\right)$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)}' F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \sum_{\lambda = (n)} f(\lambda) \binom{\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(\lambda)}\right)}{\nu}$$

Nun ist, wie ich gezeigt habe,[1]

$$\mathfrak{A}(m) = \frac{\pi N(m)}{4} + \varepsilon_m \sqrt{N(m)} \quad (|\varepsilon_m| < 1)$$

und daher kann man diese Gleichungen auch in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)} F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^\nu \sum_{\lambda = (n)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^\nu}$$
$$+ \sum_{\lambda = (n)} \sum_{\varkappa = 0}^{\varkappa = \nu - 1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^\varkappa \binom{\nu}{\varkappa} \varepsilon_\lambda^{\nu - \varkappa} \left(\frac{N(n)}{N(\lambda)}\right)^{\frac{\nu + \varkappa}{2}} f(\lambda)$$

---

[1] „Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen." Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, 50. Bd.

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)}' F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \frac{\pi^\nu N(n)^\nu}{4^\nu . \nu!} \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^\nu}$$

$$+ \sum_{\lambda=(n)} \left\{ \left(\frac{\pi N(n)}{4 N(\lambda)} + \varepsilon_\lambda \sqrt[\nu]{\frac{N(n)}{N(\lambda)}} \right) - \frac{N^\nu(n)\pi}{4 . \nu! N(\lambda)^\nu} \right\} f(\lambda).$$

Da

$$\left| \sum_{\lambda=(n)} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\nu-1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^\varkappa \binom{\nu}{\varkappa} \varepsilon_\lambda^{\nu-\varkappa} \left(\frac{N(n)}{N(\lambda)}\right)^{\frac{\nu+\varkappa}{2}} f(\lambda) \right| <$$

$$< N(n)^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\nu-1} \binom{\nu}{\varkappa} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^{\frac{\nu+\varkappa}{2}}} \right| < 2N(n)^{\nu-\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^{\frac{\nu}{2}}} \right|$$

$$\left| \sum_{\lambda=(n)} \left\{ \left(\frac{\pi}{4} N\left(\frac{n}{\lambda}\right) + \varepsilon_\lambda \sqrt[\nu]{N\left(\frac{n}{\lambda}\right)} \right) - \frac{\pi}{4.\nu!} N\left(\frac{n}{\lambda}\right)^\nu \right\} f(\lambda) \right| <$$

$$< A N(n)^{\nu-\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^{\nu-\frac{1}{2}}} \right| + B N(n)^{\nu-1} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^{\nu-1}} \right| +$$

$$. + G N(n)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{N(\lambda)}} \right| + H < K N(n)^{\nu-\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{N(\lambda)}} \right|$$

ist, wo $A, B, \ldots, G, H, K$ für alle Werthe von n positiv und endlich sind, so erhält man, falls

$$\left| \sum_{\lambda=(\infty)-(n)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^\mu} \right| < \frac{\alpha_\mu + \beta_\mu \log N(n)}{N(n)^{\varepsilon_\mu}} \qquad (\varepsilon_\mu > 0)$$

ist, die Gleichungen

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)} F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^\nu \sum_{\lambda=(\infty)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^\nu} + \Delta$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (\lambda)}' F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \frac{\pi^\nu N(n)^\nu}{4^\nu . \nu!} \sum_{\lambda=(\infty)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^\nu} + \Delta_1,$$

wo

$$|\Delta| < \frac{\pi^\nu}{4^\nu} N(n)^{\nu-\varepsilon_\nu}(\alpha_\nu + \beta_\nu \log N(n)) + 2^\nu N(n)^{\nu-\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{N(n)^{\frac{\nu}{2}}} \right|$$

$$|\Delta_1| < \frac{\pi^\nu}{4^\nu . \nu!} N(n)^{\nu-\varepsilon_\nu}(\alpha_\nu + \beta_\nu \log N(n)) + Kn^{\nu-\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda=(n)} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{N(\lambda)}} \right|$$

ist. Berücksichtigt man, dass nach den früheren Definitionen

$$\sum_{\lambda=(\infty)} \frac{f(\lambda)}{N(\lambda)^\nu} \sum_{\lambda=(\infty)} \frac{1}{N(\lambda)^\nu} = \sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu}$$

und, wie ich a. a. O. gezeigt habe,

$$\sum_{\lambda=(\infty)} \frac{1}{N(\lambda)^\nu} = \zeta(\nu) L_\nu$$

ist, wo

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^\nu} = \zeta(\nu)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{\lambda^\nu} = L_\nu$$

ist, so kann man diese Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu=(n)} F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \frac{\pi^\nu N(n)^\nu}{4^\nu \zeta(\nu) L_\nu} \sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu} + \Delta$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu=(n)}' F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]) = \frac{\pi^\nu N(n)^\nu}{4^\nu \zeta(\nu) L_\nu \nu!} \sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu} + \Delta_1.$$

Ist nun $F(x)$ gleich 1 oder 0, je nachdem x eine vorgeschriebene Eigenschaft besitzt oder nicht, so stellt

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu=(n)} F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu]),$$

beziehungsweise

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)}' F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu])$$

die Anzahl jener beliebig gewählten, beziehungsweise ungleichen Zahlensysteme $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ dar, deren grössten gemeinschaftlichen Divisor die durch die Function $F(x)$ charakterisirte Eigenschaft zukommt. Da nun die Anzahl der Werthsysteme $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ im ersten Falle $\mathfrak{A}^\nu(n)$, im zweiten aber $\binom{\mathfrak{A}(n)}{\nu}$ ist, so drückt der Quotient

$$Q = \frac{\sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)} F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu])}{\mathfrak{A}^\nu(n)},$$

beziehungsweise

$$= Q_1 \frac{\sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu = (n)}' F([i_1, i_2, \ldots, i_\nu])}{\binom{\mathfrak{A}(n)}{\nu}}$$

die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ aus, dass der grösste gemeinsame Divisor von ν willkürlich herausgegriffenen (gleichen oder verschiedenen), beziehungsweise von einander verschiedenen ganzen complexen Zahlen des Zahlencomplexes (n) die durch die Function $F(x)$ charakterisirte Eigenschaft besitzt.

Da nun, wie man sofort sieht,

$$\mathfrak{A}^\nu(n) = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^\nu + \gamma N(n)^{\nu - \frac{1}{2}}$$

$$\binom{\mathfrak{A}(n)}{\nu} = \left(\frac{\pi N(n)}{4}\right)^\nu \frac{1}{\nu!} + \delta N(n)^{\nu - \frac{1}{2}}$$

ist, wo γ und δ für keinen Werth von $N(n)$ eine endliche, leicht angebbare Grenze überschreiten können, so hat man die Gleichungen:

$$Q = \frac{\sum\limits_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu}}{\zeta_\nu L_\nu} + \Delta_2$$

$$Q_1 = \frac{\sum\limits_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu}}{\zeta_\nu L_\nu} + \Delta_3,$$

wo

$$|\Delta_2| < AN(n)^{\nu-\varepsilon_\nu}(\alpha_\nu + \beta_\nu \log N(n)) + BN(n)^{\nu-\frac{1}{2}}$$

$$|\Delta_3| < A_1 N(n)^{\nu-\varepsilon_\nu}(\alpha_\nu + \beta_\nu \log N(n)) + B_1 N(n)^{\nu-\frac{1}{2}}$$

ist, aus welchen folgt:

$$\lim_{n=\infty} Q = \lim_{n=\infty} Q_1 = W(\infty) = \frac{\sum\limits_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu}}{\zeta_\nu L_\nu}$$

Man hat daher den Satz:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Divisor von ν ganzen complexen aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten Zahlen eine bestimmte, durch die Function $F(x)$ charakterisirte Eigenschaft besitzt, ist gleich $\dfrac{\sum\limits_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu}}{\zeta_\nu L_\nu}$

Aus diesem allgemeinen Satze soll nun eine Reihe von besonders interessanten speciellen Theoremen abgeleitet werden.

1. Es sei $F(x)$ gleich 1 oder 0, je nachdem $N(x)$ im Intervalle $\alpha \ldots \beta$ mit Einschluss der oberen Grenze liegt oder nicht. In diesem Falle wird

$$\sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^\nu} = \sum_{\lambda=(\beta)} \frac{1}{N(\lambda)^\nu} - \sum_{\lambda=(\alpha)} \frac{1}{N(\lambda)^\nu}$$

$$= \sum_{x=\alpha+1}^{x=\beta} \frac{1}{x^\nu} \left(\sum_{d_x} \sin \frac{d_x \pi}{2} \right),$$

wo die Summation bezüglich d_x über alle Divisoren der reellen Zahl x zu erstrecken ist, oder auch:

$$\sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^{\nu}} = \sum_{x=\alpha+1}^{x=\beta} \frac{\sin\frac{x\pi}{2}}{x^{\nu}} \left\{ \frac{1}{1^{\nu}} + \frac{1}{2^{\nu}} + \quad + \frac{1}{\left[\frac{\beta}{x}\right]^{\nu}} \right\}$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=\alpha} \frac{\sin\frac{x\pi}{2}}{x^{\nu}} \left\{ \frac{1}{\left\{\left[\frac{\alpha}{x}\right]+1\right\}^{\nu}} + \frac{1}{\left\{\left[\frac{\alpha}{x}\right]+2\right\}^{\nu}} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{\beta}{x}\right]^{\nu}} \right\}.$$

Man hat daher die folgenden Sätze:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von ν ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ seiner Norm nach dem Intervalle $\alpha\ldots\beta$ mit Ausschluss der unteren Grenze angehört, ist gleich:

$$\frac{1}{\zeta(\nu)L_{\nu}} \left\{ \sum_{x=\alpha+1}^{x=\beta} \frac{\sin\frac{x\pi}{2}}{x^{\nu}} \left\{ \frac{1}{1^{\nu}} + \frac{1}{2^{\nu}} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{\beta}{x}\right]^{\nu}} \right\} \right.$$

$$\left. + \sum_{x=1}^{x=\alpha} \frac{\sin\frac{x\pi}{2}}{x^{\nu}} \left\{ \frac{1}{\left\{\left[\frac{\alpha}{x}\right]+1\right\}^{\nu}} + \frac{1}{\left\{\left[\frac{\alpha}{x}\right]+2\right\}^{\nu}} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{\beta}{x}\right]^{\nu}} \right\} \right\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Norm des grössten gemeinsamen Divisors von ν ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ gleich α ist, ist gleich $\dfrac{\sum\limits_{d_\alpha} \sin\frac{d_\alpha \pi}{2}}{\zeta(\nu) L_{\nu} \alpha^{\nu}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ν beliebig herausgegriffene, aus den vierten Einheitswurzeln gebildete ganze complexe Zahlen ein System von theilerfremden Zahlen bilden, ist gleich $\dfrac{1}{\zeta(\nu)L_{\nu}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei beliebige primäre complexe Zahlen von der Form $a+bi$ theilerfremd sind, beträgt $\dfrac{6}{\pi^2 L_2}$.

Beachtet man, dass $L_2 = 0 \cdot 9159655941.$ ist, so kann man den letzten Satz auch in folgender Weise aussprechen:

Man kann beiläufig 6000 gegen 3031 wetten, dass zwei willkürlich herausgegriffene primäre complexe Zahlen der Form $a+bi$ theilerfremd sind.

Für reelle Zahlen gilt bekanntlich der Satz:

Man kann beiläufig 61 gegen 39 wetten, dass zwei beliebige ganze Zahlen relativ prim sind.

Die Verbindung der zwei zuletzt angeführten Sätze liefert das Theorem:

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei beliebige reelle Zahlen theilerfremd sind, ist beiläufig $^9/_{10}$-mal so gross als die Wahrscheinlichkeit, dass zwei beliebige primäre, aus den vierten Einheitswurzeln gebildete complexe Zahlen relativ prim sind.

Da die Norm jeder ungeraden zweigliederigen complexen Primzahl eine reelle Primzahl p von der Form $4s+1$ ist, da ferner $\sum\limits_{d_p} \sin\frac{\delta_p \pi}{2}$ den Werth 2 besitzt, so hat man die speciellen Sätze:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Divisor von ν ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ eine ungerade zweigliederige Primzahl ist, beträgt $\frac{2}{\zeta(\nu) L_\nu} \sum\limits_p \frac{1}{p^\nu}$, wo die Summation über alle reellen Primzahlen der Form $4s+1$ auszudehnen ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Divisor von zwei aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären complexen Zahlen eine ungerade zweigliederige Primzahl ist, beträgt $\frac{12}{L_2 \pi^2} \sum\limits_p \frac{1}{p^2}$.

Man kann beiläufig 4 gegen 71 wetten, dass die Norm des grössten gemeinsamen Divisors von zwei primären complexen Zahlen der Form $a+bi$ gleich 5 ist.

Es ist $2 \sum\limits_p \frac{1}{p^\nu}$-mal so wahrscheinlich, dass der grösste gemeinsame Divisor von ν primären complexen Zahlen von der Form $a+bi$ eine ungerade zweigliederige Primzahl ist, als dass diese Zahlen ein theilerfremdes System bilden.

2. Es sei $F(x) = \mu_r(x)$, wo $\mu_r(x)$ den Werth 1 besitzt, wenn x eine complexe Einheit oder durch keine r^{te} Potenz theilbar ist, und gleich Null ist, wenn x mindestens durch die r^{te} Potenz einer complexen Primzahl theilbar ist. Da in diesem Falle, wie ich a. a. O. gezeigt habe,

$$\sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^{\nu}} = \sum_{\lambda=(\infty)} \frac{\mu_r(\lambda)}{N(\lambda)^{\nu}} = \frac{\zeta(\nu)L_{\nu}}{\zeta(r\nu)L_{r\nu}}$$

ist, so hat man die Theoreme:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Divisor von ν primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ durch keine r^{te} Potenz theilbar ist, beträgt $\dfrac{1}{\zeta(r\nu)L_{r\nu}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von ν aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen durch keine $2r^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist, beträgt $\dfrac{2\Gamma(2r\nu+1)}{(2\pi)^{2r\nu}B_{r\nu}L_{r\nu}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von zwei primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ nur verschiedene Primfactoren enthält, ist gleich $\dfrac{90}{\pi^4 L_4}$.

Es ist ebenso wahrscheinlich, dass der grösste gemeinsame Divisor von ν primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ durch keine r^{te} Potenz theilbar ist, als dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von r solche Zahlen derselben Form durch keine ν^{te} Potenz theilbar ist.

Es ist ebenso wahrscheinlich, dass $r\nu$ primäre ganze complexe Zahlen der Form $a+bi$ theilerfremd sind, als dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von ν primären complexen Zahlen derselben Form durch keine r^{te} Potenz theilbar ist.

Es ist ebenso wahrscheinlich, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von ν primären complexen Zahlen der Form $a+bi$ durch keine r^{te} Potenz theilbar ist, als dass irgend eine Zahl dieser Form durch keine $(r\nu)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Es ist $2\sum\limits_{p} \dfrac{1}{p^{r\nu}}$-mal so wahrscheinlich, dass der grösste gemeinsame Divisor von $r\nu$ primären, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen eine ungerade zweigliederige Primzahl ist, als dass der grösste gemeinsame Theiler von ν solchen Zahlen durch keine r^{te} Potenz theilbar ist.

3. Es habe $F(x)$ den Werth 1 oder 0, je nachdem x eine r^{te} Potenz ist oder nicht. Da in diesem Falle

$$\sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^{\nu}} = \zeta(r\nu)\, L_{r\nu}$$

ist, so erhält man die Theoreme:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Divisor von ν primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ eine r^{te} Potenz ist, ist gleich $\frac{\zeta(r\nu)\, L_{r\nu}}{\zeta(\nu)\, L_{\nu}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von ν primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ eine $2r^{\text{te}}$ Potenz ist, beträgt $\frac{(2\pi)^{2r\nu} B_{r\nu} L_{r\nu}}{2\Gamma(2r\nu+1)\,\zeta(\nu)\, L_{\nu}}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Divisor von zwei primären, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen eine r^{te} Potenz ist, ist gleich $\frac{4^r \pi^{2r-2} B_r L_{2r}}{3\Gamma(2r+1)\, L_2}$.

Es ist $\zeta(r\nu)\, L_{r\nu}$-mal wahrscheinlicher, dass der grösste gemeinsame Theiler von ν primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ eine r^{te} Potenz ist, als dass diese Zahlen ein theilerfremdes System bilden.

Es ist $\frac{(2\pi)^{2r} L_{2r} B_r}{2\Gamma(2r+1)}$-mal wahrscheinlicher, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von zwei primären, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen eine r^{te} Potenz ist, als dass diese zwei Zahlen theilerfremd sind.

Es ist $\zeta(rs\nu)\, L_{rs\nu}$-mal wahrscheinlicher, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von $r\nu$ primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ eine r^{te} Potenz ist, als dass der grösste gemeinsame Theiler von ν solchen Zahlen durch keine r^{te} Potenz theilbar ist.

4. Es sei $F(x)$ gleich 1 oder 0, je nachdem x aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von gleichen oder verschiedenen

Primfactoren zusammengesetzt ist. Da in diesem Falle, wie sich leicht aus meinen a. a. O. gegebenen Entwickelungen ergibt,

$$\sum_{\lambda=(\infty)} \frac{F(\lambda)}{N(\lambda)^{\nu}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta(2\nu)L_{2\nu}}{\zeta(\nu)L_{\nu}} + \zeta_{\nu}L_{\nu}\right\}$$

ist, so erhält man die Theoreme:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von ν primären ganze complexen Zahlen der Form $a+bi$ aus einer geraden Anzahl von gleichen oder verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt ist, beträgt

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(2\pi)^{2\nu}B_{\nu}L_{2\nu}}{2\Gamma(2\nu+1)\zeta(\nu)^{2}L_{\nu}^{2}} + 1\right\},$$

während die Wahrscheinlichkeit, dass er aus einer ungeraden Anzahl von Primfactoren besteht, den Werth

$$\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{(2\pi)^{2\nu}B_{\nu}L_{\nu}}{2\Gamma(2\nu+1)\zeta(\nu)^{2}L_{\nu}^{2}}\right\}$$

besitzt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von zwei primären ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ aus einer geraden Anzahl von gleichen oder verschiedenen Primfactoren besteht, beträgt $\frac{1}{2}\left\{1+\frac{2L_4}{5L_2^2}\right\}$, während die Wahrscheinlichkeit, dass er aus einer ungeraden Anzahl von Primfactoren zusammengesetzt ist, gleich $\frac{1}{2}\left\{1-\frac{2L_4}{5L_2^2}\right\}$ ist.