

Zur Theorie der Congruenzen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen diejenige Congruenz aufstellen, welcher alle zwei gegebenen Congruenzen gemeinsamen Wurzeln, und nur diese genügen, sodann die Bedingungen für die Existenz einer vorgeschriebenen Anzahl gemeinsamer Wurzeln zweier Congruenzen ableiten und eine Reihe von Sätzen über specielle symmetrische Functionen der Wurzeln einer Congruenz angeben, und schliesslich eine zwischen gewissen Binomialcoëfficienten bestehende Congruenz ermitteln, von welcher Herr E. Catalan vor einigen Jahren einen speciellen Fall auf einem wesentlich anderen Wege gefunden hat.

Sind die sämmtlichen Wurzeln der Congruenz

$$\varphi(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \quad . + b_{n-1} x + b_n \pmod{p} \quad \ldots 1)$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von x von nicht höherem als dem Grade $p-1$ ist, in welcher mindestens das constante Glied zur Primzahl p theilerfremd ist, $\varkappa_1, \varkappa_2, \quad ., \varkappa_\mu$ $(\mu \leqq n)$ und hat dieselbe eine Wurzel mit der Congruenz

$$\psi(x) = a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \quad . + a_{p-3} x + a_{p-2} \pmod{p} \quad \ldots 2)$$

wo $a_0, a_1, \quad ., a_{p-3}, a_{p-2}$ beliebige ganze Zahlen vorstellen, gemeinsam, so muss das Product

$$R = \prod_{1}^{\mu}{}_{\lambda} (a_0 \varkappa_\lambda^{p-2} + a_1 \varkappa_\lambda^{p-3} + \quad . + a_{p-3} \varkappa_\lambda + a_{p-2}) \qquad \ldots 3)$$

durch p theilbar sein.

Differentiirt man nun R σ-mal nach a_0 und τ-mal nach a_1, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^{\sigma+\tau} R}{\partial a_0^{\sigma} \partial a_1^{\tau}} = R.\sigma!\tau!\,.$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma+\tau}} \frac{(\lambda_1\,\lambda_2\,.\quad\lambda_{\sigma+\tau})^{p-3}}{\prod_{1}^{\sigma+\tau}{}_{\nu}\,(a_0\lambda_\nu^{p-2}+a_1\lambda_\nu^{p-3}+\quad+a_{p-3}\lambda_\nu+a_{p-2})}\lambda_1\lambda_2\,.\;.\lambda_\sigma \quad (\sigma+\tau\leqq\mu),$$

wo die Summation bezüglich der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \quad ., \lambda_{\sigma+\tau}$ über alle verschiedenen Combinationen $(\sigma+\tau)^{\text{ter}}$ Classe der Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \quad ., \varkappa_\mu$ auszudehnen ist. Besitzt nun die Congruenz 2) die $\sigma+\tau$ Wurzeln $\varkappa_1, \varkappa_2, \quad ., \varkappa_{\sigma+\tau}$, so sind alle Glieder der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Summe mit Ausnahme derjenigen, in welchen die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \quad ., \lambda_{\sigma+\tau}$ eine Permutation der ganzen Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \quad ., \varkappa_{\sigma+\tau}$ sind, durch p theilbar und man hat demnach in diesem Falle die Congruenz

$$\frac{\partial^{\sigma+\tau} R}{\partial a_0^{\sigma} \partial a_1^{\tau}} \equiv \frac{(\varkappa_1\,\varkappa_2\quad..\,\varkappa_{\sigma+\tau})^{p-3} R}{\prod_{1}^{\sigma+\tau}{}_{\nu}\,(a_0\varkappa_\nu^{p-2}+a_1\varkappa_\nu^{p-3}+\quad+a_{p-3}\varkappa_\nu+a_{p-2})} \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma} \lambda_1\lambda_2\,.\;.\lambda_\sigma \pmod p,$$

wo die Summation bezüglich $\lambda_1, \lambda_2, \quad ., \lambda_\sigma$ über alle verschiedenen Combinationen σ^{ter} Classe der ganzen Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \quad ., \varkappa_{\sigma+\tau}$ zu erstrecken ist, so dass diese Summe mit der elementaren symmetrischen Function σ^{ter} Dimension f_σ der zuletzt genannten ganzen Zahlen übereinstimmt. Ist die Anzahl der gemeinsamen Wurzeln der zwei Congruenzen 1) und 2) genau gleich $\sigma+\tau$, so sind, wie man leicht erkennt, die zwei Ausdrücke $\frac{\partial^{\sigma+\tau} R}{\partial a_0^{\sigma+\tau}}$ und $\frac{\partial^{\sigma+\tau} R}{\partial a_1^{\sigma+\tau}}$ sicher zu p theilerfremd, so dass man in diesem Falle der letzten Congruenz auch eine der beiden folgenden Formen geben kann:

$$\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{\sigma+\tau}\binom{\sigma+\tau}{\sigma}\frac{\partial^{\sigma+\tau} R}{\partial a_0^{\sigma}\partial a_1^{\tau}} \equiv f_\sigma \frac{\partial^{\sigma+\tau} R}{\partial a_0^{\sigma+\tau}} \pmod p,$$

$$\binom{\sigma+\tau}{\sigma}\frac{\partial^{\sigma+\tau}R}{\partial a_0^{\sigma}\partial a_1^{\tau}} \equiv f_{\sigma}\frac{\partial^{\sigma+\tau}R}{\partial a_1^{\sigma+\tau}} \pmod{p}.$$

Die Congruenz $(\sigma+\tau)^{\text{ten}}$ Grades, welcher sämmtliche Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\sigma+\tau}$ und nur diese genügen, ist bekanntlich

$$c(x-\varkappa_1)(x-\varkappa_2)\ldots(x-\varkappa_{\sigma+\tau}) \equiv 0 \pmod{p},$$

wo c zu p theilerfremd ist. Dieselbe lässt sich nach der letzten Relation auf folgende symbolische Form bringen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_1}x - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{\sigma+\tau} R \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \ldots 4)$$

in welcher die ν^{te} Potenz des Ableitungszeichens die ν^{te} Ableitung vorstellt.

Es ist nun noch die Grösse R durch die Coëfficienten der beiden vorgelegten Congruenzen $\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}$ und $\psi(x) \equiv 0 \pmod{p}$ auszudrücken. Zu dem Behufe muss zunächst diejenige Congruenz aufgestellt werden, der sämmtliche Wurzeln einer gegebenen Congruenz und nur diese genügen. Da sämmtliche Wurzeln einer Congruenz in Beziehung auf den Primmodul p nur der Zahlenreihe $1, 2, \ldots, p-2, p-1$ entnommen sein können, diese Zahlen aber die Congruenz

$$x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p} \qquad \ldots 5)$$

befriedigen, so ist nach 4), falls der Rang des Grössensystems $c_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich $p-1-\mu$ ist, diejenige Congruenz, der alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln von

$$c_0 x^{p-2}+c_1 x^{p-3}+\ldots+c_{p-3}x+c_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

und nur diese genügen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial c_1}x - \frac{\partial}{\partial c_0}\right)^{\mu} R_1 \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \ldots 6)$$

wo

$$R_1 = \prod_{1}^{p-1}{}_{\lambda}\,(c_0\lambda^{p-2}+c_1\lambda^{p-3}+\ldots+c_{p-3}\lambda+c_{p-2})$$

ist. Weil die Congruenz 5) so viele Wurzeln besitzt, als ihr Grad anzeigt, so ist bekanntlich jede symmetrische Function ihrer Wurzeln nach dem Modul p der analogen symmetrischen Function der Wurzeln der Gleichung

$$x^{p-1} = 1$$

congruent, und demnach ist

$$R_1 \equiv |c_{i+\varkappa}|_{(i,\varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)} \pmod{p}$$

Die Relation 6) verwandelt sich daher in

$$\left(\frac{\partial}{\partial c_1}x - \frac{\partial}{\partial c_0}\right)^{\mu} |c_{i+\varkappa}|_{(i,\varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)} \equiv 0 \pmod{p}. \quad \ldots 7)$$

Die Congruenz μten Grades, welcher alle μ Wurzeln ξ_λ der eben erwähnten Congruenz genügen, lässt sich übrigens, wie Herr L. Kronecker[1] gezeigt hat, noch in einer der beiden folgenden Formen darstellen:

$$\frac{1}{|c_{i+\varkappa}|}\Big|c_i, c_{i+1}, \quad \ldots, c_{i-\mu+p-3}, c_{i-\mu+p-2}x^{\mu} + c_{i-\mu+p-1}x^{\mu-1} + \ldots + c_{i+p-3}x + c_{i+p-2}\Big|_{(i,\varkappa=0,1,2,\ldots,p-\mu-2)} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\sum_{h=0}^{h=\mu} |c_{i+\varkappa}|\, x^h \equiv 0 \pmod{p} \quad \ldots 8)$$
$$(i=0,1,2,\ldots,p-\mu-3,\ p-\mu-2$$
$$\varkappa=0,1,2,\ldots,p-\mu-3,\ p-h-2).$$

Zur letzten Congruenz gelangt man leicht in folgender Weise. Jede der Grössen ξ_λ genügt dem folgenden Systeme von Congruenzen:

$$c_0\xi_\lambda^{p-2} + c_1\xi_\lambda^{p-3} + \ldots + c_{p-3}\xi_\lambda + c_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$
$$c_1\xi_\lambda^{p-2} + c_2\xi_\lambda^{p-3} + \ldots + c_{p-2}\xi_\lambda + c_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$c_{p-\mu-2}\xi_\lambda^{p-2} + c_{p-\mu-1}\xi_\lambda^{p-3} + \ldots + c_{p-\mu-4}\xi_\lambda + c_{p-\mu-3} \equiv 0 \pmod{p}.$$

[1] „Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen.“ Journal für die reine und angewandte Mathematik von L. Kronecker und K. Weierstrass, 99. Bd., S. 329 ff.

Da nach der Voraussetzung der Rang des Systems $c_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ genau gleich $p-1-\mu$ ist, so ist die Determinante $|c_{i+\varkappa}|_{(i,\varkappa=0,1,2,\ldots,p-\mu-2)}$ $(c_{h+s(p-1)} = c_h)$ zu p theilerfremd, und es lassen sich demnach aus diesem Systeme von Congruenzen die Potenzen $\xi_\lambda^{p-2}, \xi_\lambda^{p-3}, \ldots, \xi_\lambda^{\mu}$ unzweideutig bestimmen. Ermittelt man die letzte von diesen Grössen, so erhält man sofort die Congruenz:

$$\sum_{\tau=0}^{\tau=\mu} |c_{i+\varkappa}|\, \xi_\lambda^{\tau} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \begin{matrix}(i=0,1,2,\ldots,p-\mu-3,p-\mu-2\\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-\mu-3,p-\tau-2)\end{matrix}$$

welche zeigt, dass die Congruenz 8) durch sämmtliche ganze Zahlen ξ_λ und nur durch diese befriedigt wird, da eine Congruenz, in welcher nicht alle Coëfficienten durch p theilbar sind, nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad anzeigt.

Setzt man jetzt, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, $n = p-2$, so ist nach dem eben angezogenen Satze R nach dem Modul p der Resultante eines der beiden Gleichungssysteme

$$\psi(x) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial b_1} x - \frac{\partial}{\partial b_0}\right)^{\mu} |b_{i+\varkappa}|_{(i,\varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)} = 0$$

$$\psi(x) = 0, \quad \sum_{h=0}^{h=\mu} |b_{i+\varkappa}|\, x^h = 0, \quad \begin{matrix}(i=0,1,2,\ldots,p-\mu-3,p-\mu-2\\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-\mu-3,p-h-2)\end{matrix}$$

congruent, und man erhält daher unter Berücksichtigung eines von mir früher abgeleiteten Satzes[1] das Theorem:

Damit die beiden Congruenzen

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$
$$b_0 x^{p-2} + b_1 x^{p-3} + \ldots + b_{p-3} x + b_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_{p-3}, a_{p-2}$, $b_0, b_1, \ldots, b_{p-3}, b_{p-2}$ ganze Zahlen sind, μ unter einander und von Null verschiedene Wurzeln gemein haben, ist nothwendig und hinreichend, dass die Grösse R, welche durch eine der Congruenzen

[1] „Über Congruenzen." Diese Sitzungsber. 95. Bd., S. 610 ff.

$$R \equiv \begin{vmatrix}
a_0, & a_1, & a_2, & , a_{p-3}, & a_{p-2}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & a_0, & a_1, & , a_{p-4}, & a_{p-3}, & a_{p-2}, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & a_0, & , a_{p-5}, & a_{p-4}, & a_{p-3}, & a_{p-2}, & 0, & 0 \\
0, & 0, & & 0, & 0, & 0, & 0, & a_{p-3}, & a_{p-2} \\
\frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_1^\mu}, & \frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_0 \partial b_1^{\mu-1}}, & \frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_0^2 \partial b_1^{\mu-1}}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & \frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_1^\mu}, & \frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_0 \partial b_1^{\mu-1}}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & \frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_1^\mu}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_0^{\mu-1} \partial b_1}, & \frac{\partial^\mu |b_{i+x}|}{\partial b_0^\mu}
\end{vmatrix} \quad (\text{mod. } p)$$

$(i, x = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$

$$R \equiv \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \dots & a_{p-3}, & a_{p-2}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & \dots & a_{p-4}, & a_{p-3}, & a_{p-2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_0, & \dots & a_{p-5}, & a_{p-4}, & a_{p-3}, & a_{p-2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & 0, & 0, & a_{p-3}, & a_{p-2} \\ |b_{i+\varkappa_0}|, & |b_{i+\varkappa_1}|, & |b_{i+\varkappa_2}|, & \dots & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & |b_{i+\varkappa_0}|, & |b_{i+\varkappa_1}|, & \dots & & & & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & |b_{i+\varkappa_0}|, & \dots & & & & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & 0, & 0, & |b_{i+\varkappa_{\mu-1}}|, & |b_{i+\varkappa_\mu}| \end{vmatrix} \pmod{p}$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, p-3-\mu, p-2-\mu$
$\varkappa_\tau = 0, 1, 2, \dots, p-3-\mu, p-2-\mu+\tau$
$\tau = 0, 1, 2, \dots, \mu)$

definirt ist, nebst ihren $\mu-1$ successiven Ableitungen nach a_{p-2} die ungerade Primzahl p als Factor enthält, während die μ^{te} Ableitung zu dieser Primzahl theilerfremd ist. Diese μ gemeinsamen Wurzeln beider Congruenzen genügen der Congruenz

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{(\mu)} R \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl von gemeinsamen Wurzeln zweier Congruenzen können noch in anderer Weise formulirt werden. Hat man nämlich zwei ganze ganzzahlige Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von x und bestimmt den grössten gemeinsamen Theiler $\chi(x)$ derselben für den Primmodul p, so muss jede gemeinsame Wurzel der Congruenzen

$$\varphi(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$\psi(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

auch Wurzel der Congruenz $\chi(x) \equiv 0 \pmod{p}$ sein und umgekehrt jede Wurzel der letzten Congruenz auch den beiden ersten genügen.

Nun ist, wie Herr L. Kronecker a. a. O. gezeigt hat,

$$\chi(x) = \sum_{h=0}^{h=n-m} x^h \sum_{\nu=h+m}^{\nu=n} b_\nu \left| w_{i+\varkappa} \right|_{\substack{(i=0,1,2,\ldots,m-2,m-1 \\ \varkappa=0,1,2,\ldots,m-1,\nu-h-1)}}$$

oder

$$\chi(x) = \begin{vmatrix} \psi(x), & w_0, & w_1, & w_{m-2} \\ w_0\varphi(x), & w_0 x - w_1, & w_1 x - w_2, & \ldots, w_{m-2}x - w_{m-1} \\ w_1\varphi(x), & w_1 x - w_2, & w_2 x - w_3, & w_{m-1}x - w_m \\ & & & \\ w_{m-2}\varphi(x), & w_{m-2}x - w_{m-1}, & w_{m-1}x - w_m, & \ldots, w_{2m-4}x - w_{2m-3} \end{vmatrix}$$

wo die Grössen w_λ die Entwicklungscoëfficienten von

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = w_0 x^{-1} + w_1 x^{-2} + w_2 x^{-3} + \ldots$$

sind und m der Rang des Grössensystems w_λ in Beziehung auf den Primmodul p ist. Aus dieser ungemein eleganten Darstellung des grössten gemeinsamen Theilers von zwei ganzen ganzzahligen Functionen in Beziehung auf einen Primmodul folgt sofort der Satz:

Damit die Congruenzen

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

genau $p-1-\rho$ unter einander und von Null verschiedene gemeinsame Wurzeln besitzen, ist nothwendig und hinreichend, dass der Rang des Grössensystems $c_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$, wo

$$c_{n+\varkappa} = 0 \ (\varkappa > 0), \ c_\lambda = \sum_{\nu=n-\lambda}^{\nu=n} b_r \left| w_{i+\varkappa} \right|_{\substack{(i=0,1,2,\ldots,m-2,\ m-1 \\ \varkappa=0,1,2,\ldots,m-2,\nu-n-1+m+\lambda)}} \qquad (\lambda \leqq n)$$

ist, die Grössen w_λ die Entwicklungscoëfficienten von $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ nach steigenden Potenzen von x^{-1} sind und m der Rang dieses Grössensystems für den Primmodul p vorstellt, in Beziehung auf den Modul p genau gleich ρ ist.

Mit Hilfe der Congruenzen 7) und 8) kann man nun unter Berücksichtigung der angezogenen Bemerkung über die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Congruenz, deren Wurzelanzahl mit dem Grade übereinstimmt, eine Reihe von Sätzen über specielle symmetrische Functionen der Wurzeln einer Congruenz ableiten. Da die beiden genannten Congruenzen dieselben Wurzeln besitzen, so folgt zunächst das Theorem:

Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, so bestehen die Congruenzen:

$$\left| a_{i+\lambda} \right| \frac{\partial^{p-1-n} \left| a_{i+\varkappa} \right|}{\partial a_1^{p-1-n}} \equiv \binom{p-1-n}{h} \left| a_{i+\varkappa} \right| \frac{\partial^{p-1-n} \left| a_{i+\varkappa} \right|}{\partial a_0^h \partial a_1^{p-n-h-1}} \pmod{p} \quad \begin{matrix} (i,\varkappa = 0,1,2,\ldots,n-2,n-1 \\ \lambda = 0,1,2,\ldots,n-2,\ p-h-2 \\ h = 0,1,2,\ldots,p-n-2) \end{matrix}$$

Die bekannten Determinantendarstellungen der Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung mit Hilfe der Coëfficienten derselben liefern den Satz:

Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, so bestehen für die Summen σ_μ der μ^{ten} Potenzen der Wurzeln der Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

falls $\mu \leqq p-1-n$ ist, die Congruenzen

$$\sigma_\mu \equiv \left(-\frac{1}{|a_{i+\varkappa_0}|}\right)^\mu \begin{vmatrix} |a_{i+\varkappa_1}|, & |a_{i+\varkappa_0}|, & 0, & 0, & 0 \\ 2|a_{i+\varkappa_2}|, & |a_{i+\varkappa_1}|, & |a_{i+\varkappa_0}|, & 0, & 0 \\ 3|a_{i+\varkappa_3}|, & |a_{i+\varkappa_2}|, & |a_{i+\varkappa_1}|, & |a_{i+\varkappa_0}|, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu|a_{i+\varkappa_\mu}|, & |a_{i+\varkappa_{\mu-1}}|, & |a_{i+\varkappa_{\mu-2}}|, & |a_{i+\varkappa_{\mu-3}}|, & |a_{i+\varkappa_1}| \end{vmatrix} \pmod{p}$$

$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$
$\varkappa_\tau = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n+\tau-1$
$\tau = 0, 1, 2, \ldots, \mu)$

$$\sigma_\mu \equiv \left(- \frac{1}{\dfrac{\partial^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|}{\partial a_1^{p-1-n}}} \right)^\mu .$$

$$\begin{vmatrix}
\binom{p-1-n}{1} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0 \partial a_1^{p-2-n}}, & \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_1^{p-1-n}}, & 0, & 0, & 0 \\
2\binom{p-1-n}{2} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0^2 \partial a_1^{p-3-n}}, & \binom{p-1-n}{1} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0 \partial a_1^{p-2-n}}, & \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_1^{p-1-n}}, & 0, & 0 \\
3\binom{p-1-n}{3} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0^3 \partial a_1^{p-4-n}}, & \binom{p-1-n}{2} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0^2 \partial a_1^{p-3-n}}, & \binom{p-1-n}{1} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0 \partial a_1^{p-2-n}}, & \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_1^{p-1-n}}, & 0 \\
\mu\binom{p-1-n}{\mu} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0^\mu \partial a_1^{p-1-\mu-n}}, & \binom{p-1-n}{\mu-1} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0^{\mu-1} \partial a_1^{p-\mu-n}}, & \binom{p-1-n}{\mu-2} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0^{\mu-2} \partial a_1^{p-\mu-n+1}}, & \binom{p-1-n}{\mu-3} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_1^{\mu-3} \partial a_1^{p-\mu-n+2}}, \ldots, & \binom{p-1-n}{1} \dfrac{\partial^{p-1-n}|a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0 \partial a_1^{p-2-n}}
\end{vmatrix} \pmod{p}$$

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1)$

während für $\mu > p-1-n$

$$\sigma_\mu \equiv \left(\frac{1}{|a_{i+\varkappa_0}|}\right)^\mu \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} |a_{i+\varkappa_1}|, & |a_{i+\varkappa_0}|, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 2|a_{i+\varkappa_2}|, & |a_{i+\varkappa_1}|, & |a_{i+\varkappa_0}|, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 3|a_{i+\varkappa_3}|, & |a_{i+\varkappa_2}|, & |a_{i+\varkappa_1}|, & |a_{i+\varkappa_0}|, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \\ (p-1-n)|a_{i+\varkappa_{p-1-n}}|, & |a_{i+\varkappa_{p-2-n}}|, & |a_{i+\varkappa_{p-3-n}}|, & |a_{i+\varkappa_{p-4-n}}|, & \cdot, |a_{i+\varkappa_1}|, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & |a_{i+\varkappa_{p-1-n}}|, & |a_{i+\varkappa_{p+2-n}}|, & |a_{i+\varkappa_{p-3-n}}|, & |a_{i+\varkappa_2}|, & |a_{i+\varkappa_1}|, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & |a_{i+\varkappa_{p-1-n}}|, & |a_{i+\varkappa_{p-2-n}}|, & \cdot, |a_{i+\varkappa_3}|, & |a_{i+\varkappa_2}|, & |a_{i+\varkappa_1}|, & 0 \\ \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, |a_{i+\varkappa_1}| \end{vmatrix} \pmod{p}$$

$(i=0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1;\ \varkappa_\tau=0, 1, 2, \ldots, n-2, n+\tau-1;\ \tau=0, 1, 2, \ldots, p-1-n)$

$$\sigma_\mu \equiv \left(-\frac{1}{\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_1^{p-1-n}}}\right)^{\mu}.$$

$$\begin{vmatrix}
\binom{p-1-n}{1}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0\,\partial a_1^{p-2-n}}, & \dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_1^{p-1-n}} & 0, & 0, & 0, 0, 0, & 0 \\
2\binom{p-1-n}{2}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^2\,\partial a_1^{p-3-n}}, & \binom{p-1-n}{1}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0\,\partial a_1^{p-2-n}}, & \dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_1^{p-1-n}}, & 0, & 0, 0, 0, & 0 \\
3\binom{p-1-n}{3}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^3\,\partial a_1^{p-4-n}}, & \binom{p-1-n}{2}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^2\,\partial a_1^{p-3-n}}, & \binom{p-1-n}{1}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0\,\partial a_1^{p-2-n}}, & \dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_1^{p-1-n}}, & 0, 0, 0, & 0 \\
(p-1-n)\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-1-n}}, & \binom{p-1-n}{n-1}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-2-n}\,\partial a_1}, & \binom{p-1-n}{n-2}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-3-n}\,\partial a_1^2}, & \binom{p-1-n}{n-3}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-4-n}\,\partial a_1^3}, \ldots, & 0, 0, 0, & 0 \\
0, & \dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-1-n}}, & \binom{p-1-n}{1}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-2-n}\,\partial a_1}, & \binom{p-1-n}{2}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-1-n}\,\partial a_1^2}, \ldots, & 0, 0, 0, & 0 \\
0, & 0, & \dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-1-n}}, & \binom{p-1-n}{1}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0^{p-2-n}\,\partial a_1}, \ldots, & 0, 0, 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, 0, 0, \ldots, & \binom{p-1-n}{1}\dfrac{\partial^{p-1-n}\left|a_{i+\varkappa}\right|}{\partial a_0\,\partial a_1^{p-1-n}}
\end{vmatrix} \quad (\mathrm{mod}.\, p)$$

ist.

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1)$

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Lionnet'schen Congruenzsatzes über die Potenzsummen der Glieder eines vollständigen Restsystems in Beziehung auf einen Primmodul.

Die Ausdrücke für die Coëfficienten einer Gleichung durch die Potenzsummen der Wurzeln liefern ferner den Satz:

Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, bezeichnet ferner σ_μ die Summe der μ^{ten} Potenzen der Wurzeln der Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p},$$

so bestehen die Congruenzen

$$|a_{i+\varkappa}| \equiv \frac{(-1)^\mu}{\mu!} |a_{i+\lambda}| \begin{vmatrix} \sigma_1, & 1, & 0, & 0, & & 0 \\ \sigma_2, & \sigma_1, & 2, & 0, & & 0 \\ \sigma_3, & \sigma_2, & \sigma_1, & 3, & & 0 \\ & & & & & \\ \sigma_{\mu-1}, & \sigma_{\mu-2}, & \sigma_{\mu-3}, & \sigma_{\mu-4}, & & \mu-1 \\ \sigma_\mu, & \sigma_{\mu-1}, & \sigma_{\mu-2}, & \sigma_{\mu-3}, & & \sigma_1 \end{vmatrix} \pmod{p}$$

$(i, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$
$\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n+\mu-1)$

$$\binom{p-1-n}{\mu} \frac{\partial^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|}{\partial a_0^\mu \partial a_1^{p-1-\mu-n}} \equiv \frac{(-1)^\mu}{\mu!} \frac{\partial^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|}{\partial a_1^{p-1-n}} \begin{vmatrix} \sigma_1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ \sigma_2, & \sigma_1, & 2, & 0, & 0 \\ \sigma_3, & \sigma_2, & \sigma_1, & 3, & 0 \\ & & & & \\ \sigma_{\mu-1}, & \sigma_{\mu-2}, & \sigma_{\mu-3}, & \sigma_{\mu-4}, & \mu-1 \\ \sigma_\mu, & \sigma_{\mu-1}, & \sigma_{\mu-2}, & \sigma_{\mu-3}, & \sigma_1 \end{vmatrix} \pmod{p}$$

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1)$

Aus einem bekannten Satze des Herrn Liouville ergibt sich ferner das Theorem:

Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, der des Systems $b_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, p-2)$ genau gleich m, besitzen ferner die Congruenzen

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$b_0 x^{p-2} + b_1 x^{p-3} + \ldots + b_{p-3} x + b_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

keine gemeinsame Wurzel, und sind endlich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ irgend welche ganze ganzzahlige Functionen von x, deren Grad niedriger als $p-1-n$, beziehungsweise $p-1-m$ ist, so besteht die Congruenz

$$\sum_{\lambda} \frac{\varphi(x_\lambda)\left[\left(\frac{\partial}{\partial b_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial b_0}\right)^{p-1-m} |b_{i+\varkappa}|\right]'}{\left(\frac{\partial}{\partial b_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial b_0}\right)^{p-1-m} |b_{i+\varkappa}| \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|\right]'} - \sum_{\lambda} \frac{\psi(x_\lambda)}{\left(\frac{\partial}{\partial b_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial b_0}\right)^{p-1-m} |b_{i+\varkappa}|} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\varkappa} \frac{\psi(y_\varkappa)\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} y_\varkappa - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-m} |a_{i+\varkappa}|\right]'}{\left(\frac{\partial}{\partial a_1} y_\varkappa - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-m} |a_{i+\varkappa}| \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial b_1} y_\varkappa - \frac{\partial}{\partial b_0}\right)^{p-1-m} |b_{i+\varkappa}|\right]'} - \sum_{\varkappa} \frac{\varphi(y_\varkappa)}{\left(\frac{\partial}{\partial a_1} y_\varkappa - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|} \pmod{p},$$

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$

wo die Summationen bezüglich λ über alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln x_λ der ersten Congruenz, die Summationen bezüglich $\varkappa$ aber über alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln $y_\varkappa$ der zweiten Congruenz zu erstrecken sind.

Ein specieller Fall dieses Theorems ist der folgende Satz: Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, so ist die über alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln x_λ der Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

ausgedehnte Summe

$$\sum_{\lambda} \frac{\psi(x_\lambda)}{\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} \Big| a_{i+\varkappa}\right]'} \qquad (i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$$

durch p theilbar, wenn $\psi(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von x von nicht höherem als dem Grade $p-3-n$ ist.

Um ein neues Theorem für Congruenzwurzeln zu erhalten, will ich zunächst einige neue Sätze über gewisse specielle symmetrische Functionen von Gleichungswurzeln herleiten.

Sind x_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ die als verschieden vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} x + (-1)^n f_n = 0,$$

so ist

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial f_\varkappa} = (-1)^{\varkappa-1} \frac{x_\lambda^{n-\varkappa}}{f'(x_\lambda)}$$

Differentiirt man diese Relation nach f_μ, so entsteht die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial f_\varkappa \partial f_\mu} = (-1)^{\varkappa+\mu} \left\{ (2n-\varkappa-\mu) \frac{x_\lambda^{2n-\varkappa-\mu-1}}{\{f'(x_\lambda)\}^2} - \frac{f''(x_\lambda) x_\lambda^{2n-\mu-\varkappa}}{\{f'(x_\lambda)\}^3} \right\}$$

Summirt man nun in dieser Gleichung bezüglich λ von 1 bis n und berücksichtigt, dass

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} x_\lambda = f_1$$

ist, so erhält man die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2n-\mu-\varkappa} f''(x_\lambda)}{\{f'(x_\lambda)\}^3} = (2n-\varkappa-\mu) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2n-\varkappa-\mu-1}}{\{f'(x_\lambda)\}^2}, \qquad \ldots 9)$$

welche für $2n = \varkappa+\mu$ in die Catalan'sche Relation[1]

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{f''(x_\lambda)}{\{f'(x_\lambda)\}^3} = 0$$

übergeht. Die Formel 9) zeigt auch, dass für $2n > \mu+\varkappa$ die auf der linken Seite stehende Summe im Allgemeinen von Null verschieden ist, was z. B. sicher der Fall ist, wenn alle Grössen x_λ positiv, oder wenn dieselben reell sind und $\varkappa+\mu$ ungerade ist. Aus dieser Gleichung folgen auch die Sätze:

Sind die Wurzeln x_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$) der Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ ungleich, so sind die beiden symmetrischen Functionen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2\varkappa-1}}{\{f'(x_\lambda)\}^2}; \qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2\varkappa} f''(x_\lambda)}{\{f'(x_\lambda)\}^3} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gleichzeitig gleich Null oder von Null verschieden.

Sind die Wurzeln x_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$) der Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ ungleich, so ist die symmetrische Function

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2\varkappa+1} f''(x_\lambda)}{\{f'(x_\lambda)\}^3} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$$

positiv.

Setzt man in 9) $f(x) = (x-x_0)F(x)$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{2x_0^{2n-2-\mu-\varkappa} F'(x_0)}{\{F(x_0)\}^3} - \frac{x_0^{2n+1-\mu-\varkappa}(2n+2-\varkappa-\mu)}{\{F(x_0)\}^2} =$$

$$= (2n+2-\varkappa-\mu) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2n+1-\varkappa-\mu}}{(x_0-x_\lambda)^2\{F'(x_\lambda)\}^2} +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2n+2-\mu-\varkappa}\{2F'(x_\lambda) - (x_0-x_\lambda)F''(x_\lambda)\}}{(x_0-x_\lambda)^3\{F'(x_\lambda)\}^2},$$

[1] Diese Gleichung hat zuerst Herr E. Catalan im Jahre 1877 in seinem „Rapport sur un Mémoire de M. Émile Ghysens" (Bulletin de l'académie

aus welcher für $\mu+\varkappa = 2n+2$ die specielle Relation

$$\frac{F'(x_0)}{\{F(x_0)\}^3} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{(x_0-x_\lambda)^3\{F'(x_\lambda)\}^2} - \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{F''(x_\lambda)}{(x_0-x_\lambda)^2\{F'(x_\lambda)\}^3}$$

folgt, wo die Summationen über alle Wurzeln x_λ der Gleichung n^{ten} Grades $F(x) = 0$ auszudehnen sind. Ist endlich x_0 eine Wurzel der Gleichung $F'(x) = 0$, so entstehen die speciellen Formeln

$$(2n+2-\varkappa-\mu)\frac{x_0^{2n+1-\varkappa-\mu}}{\{F(x_0)\}^2} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2n+2-\varkappa-\mu}\{(x_0-x_\lambda)F''(x_\lambda)-2F'(x_\lambda)\}}{(x_0-x_\lambda)^3\{f'(x_\lambda)\}^3} -$$

$$-(2n+2-\varkappa-\mu)\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{x_\lambda^{2n+1-\mu-\varkappa}}{(x_0-x_\lambda)^2\{F'(x_\lambda)\}^2},$$

$$2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{(x_0-x_\lambda)^3\{F'(x_\lambda)\}^2} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{F''(x_\lambda)}{(x_0-x_\lambda)^2\{F'(x_\lambda)\}^3}.$$

Aus den eben aufgestellten Relationen fliessen sofort folgende Sätze über symmetrische Functionen von Congruenzwurzeln:

Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, so ist die über alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln x_λ der Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3}x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

---

royale des sciences de Belgique, Bruxelles 1877) aus einem geometrischen Satze des Herrn Liouville erschlossen. Er kam auf dieselbe später wiederholt zurück und theilte auch verschiedene Anwendungen derselben mit, vermochte aber nie einen directen Beweis derselben zu liefern. („Theorème d'algèbre" A. e. a. O. und Nouvelles Annales 1877 p. 335. „Application de la géométrie à l'algèbre et à l'arithmétique". Mémoires de la société royale des sciences de Liége, t. XIII, 1886.)

ausgedehnte Summe

$$\sum_{\lambda} \frac{x_\lambda^{2p-2-2n-\mu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|\right]''}{\left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|\right]'\right\}^3}$$

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$

durch p theilbar, wenn $\mu+2+2n \equiv 0 \pmod{p}$ ist.

Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, so ist die über alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln x_λ der Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

ausgedehnte Summe

$$\sum_{\lambda} \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|\right]''}{\left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i-\varkappa}|\right]'\right\}^3}$$

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$

stets durch p theilbar.

Ist der Rang des Zahlensystems $a_{i+\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ in Beziehung auf den Primmodul p genau gleich n, so sind die über alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln x_λ der Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

ausgedehnten Summen

$$\sum_{\lambda} \frac{x_\lambda^{2p-2n-2-\mu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|\right]''}{\left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|\right]'\right\}^3}$$

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$

$$\sum_{\lambda} \frac{x_\lambda^{2p-2n-\mu-3}}{\left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1} x_\lambda - \frac{\partial}{\partial a_0}\right)^{p-1-n} |a_{i+\varkappa}|\right]'\right\}^2}$$

$(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$

falls $\mu+2n+2$ nicht den Primfactor p enthält, gleichzeitig durch p theilbar oder zu dieser Zahl theilerfremd.

Zum Schlusse will ich noch eine Verallgemeinerung der folgenden von Herrn E. Catalan[1] mit Hilfe der Entwicklung der Potenz $(1+z+z^2+\ \ .+z^n)^{-\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von z für ungerade n abgeleiteten Congruenz

$$\binom{2n}{n}+10\binom{2n-2}{n-1}\equiv 0 \pmod{n+2}$$

mittheilen.

Da $2n+1$ und $n+2$ keinen anderen gemeinsamen Theiler besitzen können als 3, so folgt aus der unmittelbar ersichtlichen Relation

$$(n+2)\binom{2n+2}{n}=2(2n+1)\binom{2n}{n},$$

dass $6\binom{2n}{n}$, beziehungsweise $3\binom{2n}{n}$ durch $n+2$ theilbar ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Nun ist

$$\lambda\binom{2n}{n}+\varkappa\binom{2n-2}{n-1}=\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{(n-1)!}\{(4\lambda+\varkappa)n-2\lambda\}$$

und demnach, falls

$$(4\lambda+\varkappa)n-2\lambda=2\tau(2n-1)+\sigma(n+2) \qquad 10)$$

ist, wo τ und σ ganze Zahlen bedeuten

$$\lambda\binom{2n}{n}+\varkappa\binom{2n-2}{n-1}=$$

$$=\tau\binom{2n}{n}+\sigma(n+2)\frac{(2n-2)(2n-3)\ .\quad(n+1)}{(n-1)!}.$$

---

[1] „Développement d'un radicale." Mémoires de la société royale des sciences de Liège, t. XIII, p. 237—241. Herr E. Catalan macht an diesem Orte folgende Bemerkung: „Pour le cas de n pair, je n'ai rien trouvé de semblable".

Da bekanntlich $\binom{2n-2}{n-1}$ durch n theilbar ist, so ist nach dem eben entwickelten Satze die rechte Seite dieser Gleichung durch $n+2$ theilbar, wenn τ die Form $6s$ oder $3s$ besitzt, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Man hat daher, weil die Relation 10) nur dann für jedes n stattfinden kann, wenn $\lambda = \tau - \sigma$, $\varkappa = 5\sigma$ ist, das Theorem:

Ist σ irgend eine ganze Zahl, τ eine Zahl von der Form $6s$ oder $3s$, je nachdem n ungerade oder gerade ist, so besteht für jede ganze positive Zahl n die Congruenz

$$(\tau-\sigma)\binom{2n}{n}+5\sigma\binom{2n-2}{n-1}\equiv 0 \pmod{n+2}.$$

Ist n ungerade $\sigma = 2$, $\tau = 3$, so entsteht die oben angeführte Catalan'sche Congruenz.