Zur Theorie der Kettenbrüche

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen einige Sätze über die Näherungsnenner und die Coëfficienten der Restfunctionen von Kettenbruchentwicklungen ableiten.

Entwickelt man die nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitende Function $f_1(x)$ in einen Kettenbruch, dessen Theilzähler sämmtlich den Werth -1 haben, und bezeichnet mit $\varphi_\varkappa(x)$, $\psi_\varkappa(x)$, $f_\varkappa(x)$ beziehungsweise den $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungszähler, $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenner und die $\varkappa^{\text{te}}$ Restfunction dieser Entwicklung, so besteht bekanntlich die Beziehung

$$f_{\varkappa+1}(x) = f_1(x)\,\psi_\varkappa(x) - \varphi_\varkappa(x), \qquad \ldots 1)$$

aus welcher folgt:

$$f_1(x) = f_{\varkappa+1}(x)\,\varphi_{\varkappa+1}(x) - f_{\varkappa+2}(x)\,\varphi_\varkappa(x).$$

Ist nun der Grad von $\psi_\varkappa(x)$ $n_\varkappa$ und beginnt die Entwicklung von $f_1(x)$ nach steigenden Potenzen von x^{-1} mit $x^{-\mu}$, so ist der Grad von $\varphi_\varkappa(x)$ $n_\varkappa - \mu$, und es fängt demnach nach der letzten Gleichung die Entwicklung von $f_{\varkappa+1}(x)$ mit $x^{-n_{\varkappa}+1}$ an, so dass also

$$f_{\varkappa+1}(x) = \frac{c_{\varkappa+1,\,n_{\varkappa+1}}}{x^{n_{\varkappa+1}}} + \frac{c_{\varkappa+1,\,n_{\varkappa+1}+1}}{x^{n_{\varkappa+1}+1}} + \frac{c_{\varkappa+1,\,n_{\varkappa+1}+2}}{x^{n_{\varkappa+1}+2}} + \ldots$$

ist. Durch die Verbindung dieser Entwicklung mit der Gleichung 1) ergibt sich, dass die rationale Function $\dfrac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)}$ die Entwicklung von $f_1(x)$ bis zu den Gliedern von der Ordnung $-(n_{\lambda+1}+n_\lambda)$

(ausschliesslich) genau darstellt, und demnach lässt sich die angezogene Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$f_{\varkappa+1}(x) = \psi_\varkappa(x)\frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)} - \varphi_\varkappa(x) + \psi_\varkappa(x)P(x),$$

wo $P(x)$ eine im Allgemeinen nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitende Function ist, in welcher kein Exponent dem absoluten Betrage nach unterhalb $n_\lambda + n_{\lambda+1}$ liegt.

Ist nun $\psi_\lambda(x)$ ein Näherungsnenner, dessen sämmtliche Wurzeln x_μ ungleich sind, so ist nach der Lagrange'schen Interpolationsformel

$$\frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\varphi_\lambda(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)}$$

und demnach verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$f_{\varkappa+1}(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\varphi_\lambda(x_\mu)\psi_\varkappa(x)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)} - \varphi_\varkappa(x) + \psi_\varkappa(x)P(x)$$

oder auch

$$f_{\varkappa+1}(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\varphi_\lambda(x_\mu)\psi_\varkappa(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)} + G(x) + \psi_\varkappa(x)P(x), \quad \ldots 2)$$

wo die ganze Function $G(x)$ durch die Gleichung

$$G(x) = -\varphi_\varkappa(x) + \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\psi_\varkappa(x) - \psi_\varkappa(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)}\varphi_\lambda(x_\mu)$$

definirt ist.

Aus der Gleichung 2) folgt, dass in der Entwicklung der Summe $\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\psi_\varkappa(x_\mu)\varphi_\lambda(x_\mu)}{(x-x_\mu)\psi'_\lambda(x_\mu)}$ keine Glieder mit negativen Exponenten auftreten können, deren absoluter Betrag unterhalb der kleineren der beiden ganzen Zahlen $n_\lambda + n_{\lambda+1} - n_\varkappa$ und $n_{\varkappa+1}$ liegt.

Ist nun $\lambda > \varkappa$, so ist sicher $n_\lambda + n_{\lambda+1} - n_\varkappa \geqq n_{\varkappa+1}$, und demnach ist:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{x_\mu^\sigma \psi_\varkappa(x_\mu)\varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi'_\lambda(x_\mu)} = 0. \qquad (\sigma=0, 1, 2, \ldots, n_{\varkappa+1}-2;\ \lambda>\varkappa) \qquad \ldots 3)$$

Diese Gleichungen habe ich schon früher [1] auf einem anderen Wege hergeleitet. Setzt man in die Gleichung 2) die aufgestellte Reihe für $f_{\varkappa+1}(x)$ ein, so ergeben sich, falls

$$n_\lambda + n_{\lambda+1} = n_\varkappa + n_{\varkappa+1} + \beta + 1$$

ist, die Relationen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{x_\mu^{n_{\varkappa+1}+\alpha-1}\psi_\varkappa(x_\mu)\varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi'_\lambda(x_\mu)} = c_{\varkappa+1, n_{\varkappa+1}+\alpha}. \quad (\alpha=0,1,2,\ldots,\beta) \qquad \ldots 4)$$

Aus diesen zwei Gleichungssystemen erhellt, was übrigens auch in anderer Weise leicht zu zeigen ist, dass das Product $\psi_\varkappa(x)\varphi_\lambda(x)$ nach dem Modul $\psi_\lambda(x)$ einer ganzen Function

$$b_{n_\lambda - n_{\varkappa+1}} x^{n_\lambda - n_{\varkappa+1}} + b_{n_\lambda - n_{\varkappa+1}-1} x^{n_\lambda - n_{\varkappa+1}-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

vom Grade $n_\lambda - n_{\varkappa+1}$ congruent ist.

Ist $f_1(x)$ gleich einer rationalen Function $\frac{f(x)}{g(x)}$, deren Nenner eine ganze Function vom Grade n mit nur ungleichen Wurzeln ist, und nimmt man in den eben auseinandergesetzten Entwicklungen für $\frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)}$ den letzten Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung, also $\frac{f(x)}{g(x)}$ selbst, so ist die zugehörige Function $P(x)$ selbstverständlich gleich Null, und man erhält demnach in diesem Falle die Relationen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{x_\mu^\sigma \psi_\varkappa(x_\mu) f(x_\mu)}{g'(x_\mu)} = 0 \qquad (\sigma=0,1,2,\ldots,n_{\varkappa+1}-2)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{x_\mu^{n_{\varkappa+1}+\alpha-1}\psi_\varkappa(x_\mu) f(x_\mu)}{g'(x_\mu)} = c_{\varkappa+1, n_{\varkappa+1}+\alpha}. \qquad (\alpha=0,1,2\ldots)$$

[1] „Über Kettenbrüche.“ Diese Sitzungsberichte 80. Bd., II. Abth., S. 763—775.

Ist endlich speciell $f(x) = g'(x)$, so wird bekanntlich die Kettenbruchentwicklung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ regulär und demnach $n_\varkappa = \varkappa$, und daher ergeben sich in diesem Falle die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} x_\mu^\sigma \psi_\varkappa(x_\mu) = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa-1)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} x_\mu^{\varkappa+\alpha} \psi_\varkappa(x_\mu) = c_{\varkappa+1, \varkappa+\alpha+1}. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots\ )$$

Nach einer von Herrn F. Brioschi[1] abgeleiteten Formel, von welcher ich unlängst[2] einen neuen einfachen Beweis mitgetheilt habe, ist

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{x_\mu^{n_{\varkappa+1}+\alpha-1}\psi_\varkappa(x_\mu)\varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi'_\lambda(x_\mu)} = \frac{(-1)^\alpha}{a_{n_\lambda}^{(\lambda)\alpha+1}} \begin{vmatrix} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & & 0, & 0 \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & & 0, & 0 \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-2}, & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & & 0, & 0 \\ & & & & & & \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\alpha+1}, & a_{n_\lambda-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+3}^{(\lambda)}, & , & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)} \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\alpha}, & a_{n_\lambda-\alpha}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+2}^{(\lambda)}, & , & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix} \quad \ldots 5)$$

---

[1] „Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles." Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 50. Bd., S. 339—342.

[2] „Über Congruenzen." Diese Sitzungsberichte 95. Bd. II. Abth., S. 610—617.

wo die Grössen $a_{\varkappa}^{(\lambda)}$ durch die Gleichung:

$$\psi_{\lambda}(x)=a_{n_\lambda}^{(\lambda)}x^{n_\lambda}+a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}x^{n_\lambda-1}+\ldots+a_{1}^{(\lambda)}x+a_{0}^{(\lambda)}$$

bestimmt sind, und daher hat man die Sätze:

Sind

$$\psi_{\lambda}(x)=a_{n_\lambda}^{(\lambda)}x^{n_\lambda}+a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}x^{n_\lambda-1}+\ldots+a_{1}^{(\lambda)}x+a_{0}^{(\lambda)}$$

$$f_{\lambda}(x)=\frac{c_{\lambda,n_\lambda}}{x^{n_\lambda}}+\frac{c_{\lambda,n_\lambda+1}}{x^{n_\lambda+1}}+\frac{c_{\lambda,n_\lambda+2}}{x^{n_\lambda+1}}+\ldots$$

und $\varphi_{\lambda}(x)$, beziehungsweise der λ^{te} Näherungsnenner, die λ^{te} Restfunction und der λ^{te} Näherungszähler der Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, so besteht die Relation

$$(-1)^{\alpha}a_{n_\lambda}^{(\lambda)\,\alpha+1}c_{\varkappa+1,n_{\varkappa+1}+\alpha}=\begin{vmatrix} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & & 0, & 0 \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & & 0, & 0 \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-2}, & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)}, & & 0, & 0 \\ & & & & & & \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\alpha+1}, & a_{n_\lambda-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+3}^{(\lambda)}, & , & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda}^{(\lambda)} \\ b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\alpha}, & a_{n_\lambda-\alpha}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+1}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-\alpha+2}^{(\lambda)}, & , & a_{n_\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{n_\lambda-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix}\quad(\lambda>\varkappa)$$

wo, falls die erwähnte Function nicht rational ist, die ganze Zahl α der Bedingung

$$0 \leqq \alpha \leqq n_{\lambda+1} + n_{\lambda} - n_{\varkappa+1} - n_{\varkappa} - 1$$

genügen muss und die Grössen b_{μ} durch die Congruenz

$$\psi_{\varkappa}(x)\,\varphi_{\lambda}(x) \equiv b_{n_{\lambda}-n_{\varkappa+1}}\, x^{n_{\lambda}-n_{\varkappa+1}} + b_{n_{\lambda}-n_{\varkappa+1}-1}\, x^{n_{\lambda}-n_{\varkappa+1}-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \pmod{\psi_{\lambda}(x)}$$

definirt sind.

Sind

$$\psi_{\lambda}(x) = a^{(\lambda)}_{n_{\lambda}} x^{n_{\lambda}} + a^{(\lambda)}_{n_{\lambda}-1} x^{n_{\lambda}-1} + \ldots + a^{(\lambda)}_{1} x + a^{(\lambda)}_{0}$$

$$f_{\lambda}(x) = \frac{c_{\lambda,n_{\lambda}}}{x^{n_{\lambda}}} + \frac{c_{\lambda,n_{\lambda}+1}}{x^{n_{\lambda}+1}} + \frac{c_{\lambda,n_{\lambda}+2}}{x^{n_{\lambda}+2}} + \ldots$$

und $\varphi_{\lambda}(x)$ beziehungsweise der λte Näherungsnenner, die λte Restfunction und der λte Näherungszähler der Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, ist ferner

$$\chi(x) = g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-1}\, x^{n_{\varkappa+1}+\gamma-1} + g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-2}\, x^{n_{\varkappa+1}+\gamma-2} + \ldots + g_1 \varkappa + g_0$$

irgend eine ganze Function von x, so ist

$$
= \frac{(-1)^{\gamma}}{{a^{(\lambda)}_{n_\lambda}}^{\gamma+1}}
\left|\begin{array}{llllll}
g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}} & a^{(\lambda)}_{n_\lambda}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} + g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda}, & 0, & 0, & 0 \\
g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-2} + g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} + g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-3} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}} & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-2}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda}, & 0, & 0 \\
 & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\
g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\gamma+1} + g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\gamma+2} + \ldots + g_{n_{\varkappa+1}} \; b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\gamma+1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\gamma+2}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\gamma+3}, \ldots, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda} \\
g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\gamma} + g_{n_{\varkappa+1}+\gamma-2} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\gamma+1} + \ldots + g_{n_{\varkappa+1}-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\gamma}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\gamma+1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\gamma+2}, \ldots, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-2}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1}
\end{array}\right|
$$

wo die Grössen b_μ durch die Congruenz

$$\varphi_\lambda(x)\psi_\varkappa(x) \equiv b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}} x^{n_\lambda-n_{\varkappa+1}} + b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} x^{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \pmod{\psi_\lambda(x)}$$

definirt sind und in der Summe auf der rechten Seite, falls die in einen Kettenbruch entwickelte Function nicht rational ist, γ nicht grösser als n_λ sein darf.

Sind

$$\psi_\lambda(x) = a^{(\lambda)}_{n_\lambda} x^{n_\lambda} + a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1} x^{n_\lambda-1} + \ldots + a^{(\lambda)}_1 x + a^{(\lambda)}_0$$

$$f_\lambda(x) = \frac{c_{\lambda, n_\lambda}}{x^{n_\lambda}} + \frac{c_{\lambda, n_\lambda+1}}{x^{n_\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda, n_\lambda+2}}{x^{n_\lambda+2}} + \ldots$$

und $\varphi_\lambda(x)$ der λte Näherungsnenner, die λte Restfunction und der λte Näherungszähler der Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\psi_\rho(x_\mu)\psi_\varkappa(x_\mu)\varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi'_\lambda(x_\mu)} = 0 \qquad (\lambda > \varkappa;\ n_{\varkappa+1}-1 > n_\rho)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\lambda} \frac{\psi_\rho(x_\mu)\,\psi_\varkappa(x_\mu)\,\varphi_\lambda(x_\mu)}{\psi'_\lambda(x_\mu)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\delta} c_{\varkappa+1,\, n_{\varkappa+1}+\nu}\, a^{(\rho)}_{n_\rho+1-\delta+\nu} =$$

$$= \frac{(-1)^\delta}{a^{(\lambda)\,\delta+1}_{n_\lambda}} \begin{vmatrix} a^{(\rho)}_{n_\rho} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ a^{(\rho)}_{n_\rho} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} + a^{(\rho)}_{n_\rho-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda}, & 0, & 0, & 0 \\ a^{(\rho)}_{n_\rho} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-2} + a^{(\rho)}_{n_\rho-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} + a^{(\rho)}_{n_\rho-2} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-2}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda}, & 0, & 0 \\ & & & & & \\ a^{(\rho)}_{n_\rho} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\delta+1} + a^{(\rho)}_{n_\rho-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\delta+2} + \ldots + a^{(\rho)}_{n_\rho} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\delta+1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\delta+2}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\delta+3}, \ldots, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda} \\ a^{(\rho)}_{n_\rho} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\delta} + a^{(\rho)}_{n_\rho-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-\delta+1} + \ldots + a^{(\rho)}_{n_\rho-1} b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\delta}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\delta+1}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-\delta+2}, \ldots, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-2}, & a^{(\lambda)}_{n_\lambda-1} \end{vmatrix}$$

wo die Grössen b_μ durch die Congruenz

$$\psi_\varkappa(x)\,\varphi_\lambda(x) \equiv b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}} x^{n_\lambda-n_{\varkappa+1}} + b_{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} x^{n_\lambda-n_{\varkappa+1}-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \quad (\text{mod. } \psi_\lambda(x))$$

definirt sind, $n_\rho = n_{\varkappa+1}+\delta-1$ ist und im ersten Theile der Doppelgleichung, falls die in einen Kettenbruch entwickelte Function nicht rational ist, δ nicht grösser als n_λ sein darf.

Ist $\vartheta(x)$ eine im reellen Intervalle $a\ldots b$ reelle und positive Function, bezeichnet ferner

$$\psi_\lambda(x) = a^{(\lambda)}_\lambda x^\lambda + a^{(\lambda)}_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \ldots + a^{(\lambda)}_1 x + a^{(\lambda)}_0$$

$$f_\lambda(x) = \frac{c_{\lambda,\lambda}}{x^\lambda} + \frac{c_{\lambda,\lambda+1}}{x^{\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda,\lambda+2}}{x^{\lambda+2}} +$$

$\varphi_\lambda(x)$ und $g_\lambda(x) = \alpha_\lambda x + \beta_\lambda$, beziehungsweise den λ^{ten} Näherungsnenner, die λ^{te} Restfunction, den λ^{ten} Näherungszähler und den λ^{ten} Theilnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_a^b \frac{\vartheta(z)}{x-z}\,dz$, und werden die Grössen b_μ durch die Congruenz

$$\psi_\varkappa(x)\varphi_\lambda(x) \equiv b_{\lambda-\varkappa-1}x^{\lambda-\varkappa-1} + b_{\lambda-\varkappa-2}x^{\lambda-\varkappa-2} + \ldots + b_1 x + b_0 \pmod{\psi_\lambda(x)} \quad (b_{\lambda-\varkappa-1} = \alpha_{\varkappa+2}\,\alpha_{\varkappa+3} \ldots \alpha_\lambda)$$

bestimmt, ist ferner

$$\chi(x) = g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}x^{2\lambda-\varkappa-\tau-1} + g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}x^{2\lambda-\varkappa-\tau-2} + \ldots + g_1 x + g_0 \quad (\lambda > \varkappa)$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $2\lambda-\varkappa-1$, und sind endlich

$$\chi_\mu(x) = a_{\mu, m_\mu} x^{m_\mu} + a_{\mu, m_\mu - 1} x^{m_\mu - 1} + \ldots + a_{\mu,1} x + a_{\mu,0}$$

ganze Functionen von x, deren Grad die Zahl $\lambda-1$ nicht übersteigt, so bestehen die Gleichungen

$$\int_a^b \vartheta(x)\chi(x)\psi_\varkappa(x)\,dx = \frac{(-1)^{\tau+1}}{a_\lambda^{(\lambda)\,2\lambda-2\varkappa-\tau}}$$

$$\left|\begin{array}{llllll}
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-2} + g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-3} + g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\lambda-\varkappa-2} + g_{2\lambda-\varkappa-\tau-3}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & \ldots, 0, & 0 \\
 & & & & & \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\tau+\varkappa-\lambda+1} + g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\tau+\varkappa-\lambda+2} + \ldots + g_{\varkappa+1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+4}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)} \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\tau+\varkappa-\lambda} + g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\varkappa+\tau-\lambda+1} + \ldots + g_\varkappa\, b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+1}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}
\end{array}\right| =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=2\lambda-2\varkappa-\tau-1} c_{\mu+1,\varkappa+1+\alpha}\, g_{\varkappa+\gamma}$$

$$\int_a^b \vartheta(x)\psi_\varkappa^2(x)\,dx = \frac{1}{\alpha_{\varkappa+1}}$$

$$\int_a^b \vartheta(x)\chi(x)\frac{\psi_\lambda(x)-\psi_\lambda(y)}{x-y}\,dx = \frac{(-1)^{\tau+1}}{a_\lambda^{(\lambda)^{2\lambda-\tau}}} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\lambda-1} \frac{a_{\varkappa+1}^{(\varkappa+1)}}{a_\varkappa^{(\varkappa)}}\, a_\lambda^{(\lambda)^{2\varkappa}} \begin{vmatrix} \psi_\varkappa(y), \psi_\lambda(y) \\ \varphi_\varkappa(y), \varphi_\lambda(y) \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & 0, & & 0, & 0 \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-2}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & & 0, & 0 \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-3}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\lambda-\varkappa-2}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-3}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & & 0, & 0 \\
 & & & & & & \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\varkappa+\tau-\lambda+1}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\varkappa+\tau-\lambda+2}+\dots+g_{\varkappa+1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+4}^{(\lambda)}, & \dots, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)} \\
g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\varkappa+\tau-\lambda}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\varkappa+\tau-\lambda+1}+\dots+g_\varkappa b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+1}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}, & \dots, & a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}
\end{vmatrix}$$

$$\int_a^b \vartheta(x)\psi_\varkappa(x)\frac{\psi_\lambda(x)-\psi_\lambda(y)}{x-y}\,dy = \psi_\varkappa(y)\varphi_\lambda(y)-\varphi_\varkappa(y)\psi_\lambda(y)$$

$$\begin{vmatrix} g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-2}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{\lambda}^{(\lambda)}, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\lambda-\varkappa-3}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\lambda-\varkappa-2}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-3}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{\lambda}^{(\lambda)}, & \ldots, 0, & 0 \\ & & & & & \\ g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\tau+\varkappa-\lambda+1}+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\varkappa+\tau-\lambda+2}+\ldots+g_{\varkappa+1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+4}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_{\lambda}^{(\lambda)} \\ g_{2\lambda-\varkappa-\tau-1}b_{\tau+\varkappa-\lambda}\;+g_{2\lambda-\varkappa-\tau-2}b_{\varkappa+\tau-\lambda+1}+\ldots+g_{\varkappa}\;\;b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+1}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+2}^{(\lambda)}, & a_{2\varkappa+\tau-\lambda+3}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix}$$

$(\rho_1=\lambda, \lambda-1, \ldots, \lambda-r;\ \rho=0, 1, 2, \qquad \xi_0=x;\ \sigma=0, 1, 2, \ldots, r-2, \lambda-\varkappa-1;\ \tau=1, 2, \ldots, r)$

$$=\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\lambda-r}|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\varkappa+\sigma}\psi_{\varkappa-\sigma-1}(\xi_\tau)|\sum_{\gamma=0}^{\gamma=2\lambda-2\varkappa-\tau-1}c_{\varkappa+1,\varkappa+1+\gamma}g_{\varkappa+\gamma}$$

$$\int_a^b\frac{\vartheta(x)\psi_\varkappa(x)\,|\psi_{\rho_1}(\xi_\rho)|\,dx}{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_r)}=|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\varkappa-\sigma}\psi_{\varkappa-\sigma-1}(\xi_\tau)|\cdot\frac{1}{\alpha_{\varkappa+1}}\qquad(\varkappa=0, 1, 2, \ldots, \lambda-r)$$

$(\rho_1=\lambda, \lambda-1, \ldots, \lambda-r;\ \rho=0, 1, 2, \qquad \xi_0=x;\ \sigma=0, 1, 2, \ldots, r-2, \lambda-\varkappa-1;\ \tau=1, 2, \ldots, r)$

$$|c_{i,\varkappa}|=\frac{1}{((\sigma!)!)^2}\,|\chi_\mu^{(\varkappa)}(y_\varkappa)|\cdot|\psi_\mu^{(\varkappa)}(y_\varkappa)|\cdot\left|\int_a^b x^{i+\varkappa}\vartheta(x)\,dx\right|\qquad(\mu, i, \varkappa=0, 1, 2, \ldots, \sigma)$$

wo $y_0, y_1, \ldots, y_\sigma$ bestimmte, innerhalb der Grenzen $a \ldots b$ befindliche reelle Zahlen sind und

$$c_{i,\varkappa} = \frac{(-1)^{m_i-\varkappa}}{a_\lambda^{(\lambda)m_i-\varkappa+1}} \begin{vmatrix} a_{i,m_i} b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-\varkappa-2} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-\varkappa-3} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-\varkappa-2} + a_{i,m_i-2} b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & \ldots, 0, & 0 \\ & & & & & \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-m_i} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-m_i+1} + \ldots + a_{i,\varkappa+1} b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-m_i+\varkappa+1}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\varkappa+2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\varkappa+3}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)} \\ a_{i,m_i} b_{\lambda-m_i-1} + a_{i,m_i-1} b_{\lambda-m_i} + \ldots + a_{i,\varkappa} b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-m_i+\varkappa}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\varkappa+1}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\varkappa+2}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix}$$

ist.

Ist $\vartheta_\mu(x)$ eine im reellen Intervalle $a_\mu \ldots b_\mu$ reelle und positive Function, bezeichnen ferner

$$\psi_{\mu,\lambda}(x) = a_{\mu,\lambda}^{(\lambda)} x^\lambda + a_{\mu,\lambda-1}^{\lambda} x^{\lambda-1} + \ldots + a_{\mu,1} x + a_{\mu,0}$$

$$\varphi_{\mu,\lambda}(x) = b_{\mu,\lambda-1} x^{\lambda-1} + b_{\mu,\lambda-2} x^{\lambda-2} + \ldots + b_{\mu,1} x + b_{\mu,0}$$

beziehungsweise den λ^{ten} Näherungsnenner und λ^{ten} Näherungszähler der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{\vartheta_\mu(z)}{x-z}\, dz$, und sind ganze Functionen von x von nicht höherem als dem Grade $2\lambda-1$, so ist

$$|c_{i,\varkappa}| = \frac{1}{((\sigma!)!)^2}\,|\chi_i^{(\varkappa)}(y_\varkappa)|\,.\,|\vartheta_i^{(\varkappa)}(y_\varkappa)|\,.\left|\int_a^b x^{i+\varkappa}\,\vartheta(x)\,dx\right|_{(i,\,\varkappa=0,\,1,\,2;\,\ldots,\,\sigma)} \quad (\rho \geqq \sigma)$$

wo $y_0, y_1, \ldots, y_\sigma$ bestimmte, innerhalb der Grenzen $a \ldots b$ befindliche reelle Zahlen sind und

$$c_{i,\varkappa} = \frac{(-1)^{m_i-\rho-\varkappa}}{a_\lambda^{(\lambda)\,m_i-\rho-\varkappa+1}}$$

$$\begin{vmatrix} c_{i,m_i-\rho}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ c_{i,m_i-\rho}b_{\lambda-\varkappa-2}+c_{i,m_i-\rho-1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ c_{i,m_i-\rho}b_{\lambda-\varkappa-3}+c_{i,m_i-\rho-1}b_{\lambda-\varkappa-2}+c_{i,m_i-\rho-2}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)}, & \ldots, 0, & 0 \\ \\ c_{i,m_i-\rho}b_{\lambda-m_i+\rho}+c_{i,m_i-\rho-1}b_{\lambda-m_i+\rho+1}+\ldots+c_{i,\varkappa+\rho+1}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-m_i+\rho+\varkappa+1}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\rho+\varkappa+2}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\rho+\varkappa+3}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-1}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)} \\ c_{i,m_i-\rho}b_{\lambda-m_i+\rho-1}+c_{i,m_i-\rho-1}b_{\lambda-m_i+\rho}+\ldots+c_{i,\varkappa+\rho}b_{\lambda-\varkappa-1}, & a_{\lambda-m_i+\rho+\varkappa}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\rho+\varkappa+1}^{(\lambda)}, & a_{\lambda-m_i+\rho+\varkappa+2}^{(\lambda)}, & \ldots, a_{\lambda-2}^{(\lambda)}, & a_\lambda^{(\lambda)} \end{vmatrix}$$

ist.

Ich will schliesslich noch folgendes Theorem beweisen:

Ist die Function $f(x)$ im reellen Intervalle $a \ldots b$ reell und positiv, bezeichnet ferner $\psi_\lambda(x)$ den λ^{ten} Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz$, und lassen sich Functionen $\omega_\lambda(x)$ so bestimmen, dass

$$\omega_0(x) = 1, \frac{-d\{\omega_1(x)f(x)\}}{dx} = f(x)\psi_1(x)$$

$$\frac{d\omega_\lambda(x)}{dx} = -\{(a_\lambda-1)x+b_\lambda\}\,\omega_{\lambda-1}(x)$$

$$x\frac{d\omega_\lambda(x)}{dx} = (\lambda-1)\,a_{\lambda+1}\omega_\lambda(x)-\omega_{\lambda-1}(x)$$

$$\omega_\varkappa(a) = \omega_\varkappa(b) = 0$$

ist, wo $a_\lambda x+b_\lambda$ der λte Theilnenner der Kettenbruchentwicklung ist, so besteht für jede im Intervalle $a\ldots b$ endliche und stetige Function $\chi(x)$ die Gleichung

$$\int_a^b \chi(x)f(x)\psi_\lambda(x)\,dx = \int_a^b \chi^{(\lambda)}(x)\,\omega_\lambda(x)\,dx.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen hat man

$$\psi_\lambda(x) = (a_\lambda x+b_\lambda)\,\psi_{\lambda-1}(x)-\psi_{\lambda-2}(x),$$

und demnach besteht die Relation

$$\int_a^b \chi(x)f(x)\{\psi_\lambda(x)+\psi_{\lambda-2}(x)-(a_\lambda x+b_\lambda)\,\psi_{\lambda-1}(x)\}\,dx = 0.$$

Da nun die zu beweisende Gleichung für $\lambda = 0, 1$ offenbar besteht, wie man im zweiten Falle leicht durch partielle Integration nachweist, so ist die Giltigkeit des Satzes erwiesen, wenn gezeigt wird, dass

$$\int_a^b \{\chi^{(\lambda)}(x)\,\omega_\lambda(x)+ \\ +\chi^{(\lambda-2)}(x)\,\omega_{\lambda-2}(x)-(a_\lambda x+b_\lambda)\,\chi^{(\lambda-1)}(x)\,\omega_{\lambda-1}(x)- \\ -(\lambda-1)\,a_\lambda\chi^{(\lambda-2)}(x)\,\omega_{\lambda-1}(x)\}\,dx = 0$$

ist. Da nun der zu integrirende Ausdruck unter Benützung der vorausgesetzten Relationen in

$$\frac{d}{dx}\{\chi^{(\lambda-1)}(x)\,\omega_\lambda(x)-x\chi^{(\lambda-2)}(x)\,\omega_{\lambda-1}(x)\}$$

übergeht, so ist wegen $\omega_\varkappa(a) = \omega_\varkappa(b) = 0$ die letzte Gleichung wirklich erfüllt und demnach der ausgesprochene Satz erhärtet.

Specielle Fälle dieses Satzes sind die Relationen

$$\int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)\,x^m\,T_n^m(x)\,dx = \frac{1}{\Pi(n)\,\Pi(m+n)}\int_0^\infty e^{-x}x^{m+n}\varphi^{(n)}(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\varphi(x)\,C_n^\nu(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}\int_{-1}^{+1}\varphi^{(n)}(x)\;(1-x^2)^{\frac{n+2\nu-1}{2}}\;dx,$$

wo die Functionen $T_n^m(x)$, $C_n^\nu(x)$ sich von den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der Function

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}z^m}{x-z}\,dz, \quad \text{beziehungsweise} \quad x^{-1}F(1,{}^1/_2,\nu+1,x^{-2}),$$

nur durch constante Factoren unterscheiden, und die in der zweiten Gleichung als specieller Fall enthaltene, von Jacobi in seiner im 15. Bande des Crelle'schen Journals enthaltenen Abhandlung „Formula transformationis integralium definitorum" zuerst bewiesene und unlängst von Herrn L. Kronecker[1] neuerdings in höchst eleganter Weise abgeleitete Relation

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos nx\,dx = \frac{1}{1.3.5.\;.(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos x)\sin^n x\,dx.$$

[1] „Beweis einer Jacobi'schen Integralformel." Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1884, S. 539—540. In dieser Arbeit hat Herr Kronecker sich ebenfalls der oben angewandten Beweismethode mit Hilfe eines Inductionsschlusses bedient.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: 98_2a

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: Zur Theorie der Kettenbrüche 673-687