Eine Eigenschaft der Entwicklung einer ganzen Function nach den Näherungsnennern von gewissen regulären Kettenbrüchen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen eine interessante Beziehung erweisen, welche hinsichtlich der Vertheilung der negativen Vorzeichen in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten von zwei in gewissem Zusammenhange stehenden ganzen Functionen nach den Näherungsnennern von verschiedenen regulären Kettenbruchentwicklungen besteht.

Sind a und b endliche reelle, nicht negative Grössen und ist $f(x)$ eine im Intervalle $-a \ldots b$ endliche und positive Function, welche eine stetige erste Ableitung besitzt und so beschaffen ist, dass der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)f(x)y'_n]' = c_n f(x) y_n \qquad (c_n > c_m > 0;\; n > m)$$

für jedes ganzzahlige nicht negative n eine ganze Function vom Grade n genügt, so stimmt diese letzte Function bei geeigneter Wahl des willkürlichen constanten Factors mit dem Näherungsnenner $\psi_n(x)$ der bei den über die Natur von $f(x)$ gemachten Voraussetzungen regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_{-a}^{b} \frac{f(z)}{x-z} dz$ überein. Entwickelt man die ganze Function m^{ten} Grades $\chi(x)$ in die nach den Näherungsnennern $\psi_\varkappa(x)$ fortschreitende Reihe

$$\chi(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} A_\varkappa \psi_\varkappa(x),$$

so ist

$$A_\varkappa = \frac{\int_{-a}^{b} f(x)\chi(x)\psi_\varkappa(x)\,dx}{\int_{-a}^{b} f(x)\psi_\varkappa^2(x)\,dx}$$

oder auch

$$A_\varkappa = \frac{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=m} \frac{\varphi_m(x_\rho)}{\psi'_m(x_\rho)}\chi(x_\rho)\,\psi_\varkappa(x_\rho)}{\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=m} \frac{\varphi_m(x_\rho)}{\varphi'_m(x_\rho)}\psi_\varkappa^2(x_\rho)}$$

wo $\varphi_m(x)$ der m^{te} Näherungszähler der erwähnten Kettenbruchentwicklung ist und die Grössen x_ρ die Wurzeln der Gleichung $\psi_m(x) = 0$ vorstellen, welche bekanntlich reell, ungleich und im Intervalle $-a\ldots b$ befindlich sind. In den beiden angeführten Ausdrücken von $A_\varkappa$ ist, wie man leicht erkennt, der Nenner eine wesentlich positive Grösse. Von dem Nenner des ersten Ausdruckes folgt dies unmittelbar aus dem Umstande, dass die zu integrirende Function im ganzen Integrationsintervalle positiv ist, bezüglich der im Nenner des zweiten Bruches stehenden Summe aber ist zu beachten, dass zwischen je zwei aufeinander folgenden Wurzeln x_ρ stets eine einzige Wurzel von $\psi'_m(x) = 0$ und $\varphi_m(x) = 0$ liegt, sowie dass diese beiden Functionen von gleichem Grade sind und dass der Coëfficient der höchsten Potenz von x in beiden dasselbe Zeichen besitzt, was aus der Relation

$$\varphi_m(x) = \int_{-a}^{b} \frac{\psi_m(x) - \psi_m(z)}{x - z} f(z)\,dz$$

unmittelbar hervorgeht, aus welchen Eigenschaften die Gleichung

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\varphi_m(x_\rho)}{\psi'_m(x_\rho)}\right) = +1$$

folgt.

Der Coëfficient von $x^\varkappa$ in $\psi_\varkappa(x)$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$ wird bei den folgenden Entwicklungen stets als positiv vorausgesetzt, was ja immer durch Multiplication mit geeigneten Constanten erreicht werden kann, welche dann ebenfalls in $\varphi_\varkappa(x)$ als Factoren erscheinen. In diesem Falle ist nun, wie ich gezeigt habe,[1] die

[1] „Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel". Diese Sitzungsber. 83. Bd., II. Abth., S. 321 ff.

Anzahl der reellen positiven Wurzeln der Gleichung $\chi(x) = 0$, welche gleich b oder grösser als b sind, nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ, und die Anzahl der reellen negativen Wurzeln, welche dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als a sind, nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Grössen $(-1)^\lambda A_\lambda$, und es ist die etwaige Differenz zwischen jeder der beiden zusammengehörigen Anzahlen gerade.

Ein analoger Satz gilt auch, wie ich kurz zeigen will, für Kettenbruchentwicklungen von gewissen Integralen, in denen eine der beiden Grenzen unendlich ist.

Ist a eine reelle endliche nicht negative Zahl, $f(x)$ eine im Intervalle $-a\,.\;.\,\infty$ endlich und positive Function, welche eine stetige erste Ableitung besitzt und so beschaffen ist, dass für jedes ganzzahlige nicht negative n der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[(x+a)^{\varkappa+1}f(x)y_n']' = c_n(x+a)^\varkappa f(x)y_n \quad (c_n > c_m > 0;\; n > m)$$

eine ganze Function n^{ten} Grades genügt, und ist endlich $f(-a)$ von Null verschieden, $\lim_{x=0}\dfrac{1}{f(x)}$ stärker unendlich als jede Potenz, so ist, wie man sofort sieht, y_n bei geeigneter Wahl des willkürlichen constanten Factors gleich dem n^{ten} Näherungsnenner $\psi_n(x)$ der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales $\displaystyle\int_{-a}^{\infty}\frac{(x+a)^\varkappa f(x)}{z-x}\,dx$. Hat man nun die Entwicklung

$$\chi(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A'_{\lambda_\varkappa}\psi_{\lambda_\varkappa}(x) \qquad (A'_{\lambda_\varkappa} \gtrless 0)$$

so erhält man die Relation

$$\left[\frac{\chi(x)}{\psi_{\lambda_\sigma}(x)}\right]' = \frac{1}{\psi^2_{\lambda_\sigma}(x)}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A'_{\lambda_\varkappa}\{\psi_{\lambda_\sigma}(x)\psi'_{\lambda_\varkappa}(x) - \psi'_{\lambda_\sigma}(x)\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\} \quad (1 \leqq \sigma \leqq r)$$

welche, da keine der Functionen $\psi_\varkappa(x)$ im Intervalle $-a$ (incl.) $\ldots\infty$ verschwindet, nach dem Theoreme von Rolle die Beziehungen

$$\underset{-a}{\mathfrak{A}}(\chi(x)) \leqq \underset{-a}{\mathfrak{A}}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A'_{\lambda_\varkappa}(c_{\lambda_\sigma}-c_{\lambda_\varkappa})\,\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\right)+1$$

$$\underset{-a}{\mathfrak{A}}(\chi(x)) \equiv \underset{-a}{\mathfrak{A}}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A'_{\lambda_\varkappa}(c_{\lambda_\sigma}-c_{\lambda_\varkappa})\,\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\right)+1 \quad (\text{mod. } 2)$$

liefert, wo $\underset{-a}{\mathfrak{A}}(f_1(x))$ die Anzahl der reellen negativen Wurzeln der Gleichung $f_1(x) = 0$ vorstellt, welche dem absoluten Betrage nach nicht unterhalb a liegen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erschliesst man sofort die allgemeineren Beziehungen

$$\underset{-a}{\mathfrak{A}}(\chi(x)) \leqq \underset{-a}{\mathfrak{A}}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A'_{\lambda_\varkappa}(c_{\lambda_{\sigma_1}}-c_{\lambda_\varkappa})(c_{\lambda_{\sigma_2}}-c_{\lambda_\varkappa})\dots(c_{\lambda_{\sigma_{r_1}}}-c_{\lambda_\varkappa})\,\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\right)+r_1$$

$$\underset{-a}{\mathfrak{A}}(\chi(x)) \equiv \underset{-a}{\mathfrak{A}}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A'_{\lambda_\varkappa}(c_{\lambda_{\sigma_1}}-c_{\lambda_\varkappa})(c_{\lambda_{\sigma_2}}-c_{\lambda_\varkappa})\dots(c_{\lambda_{\sigma_{r_1}}}-c_{\lambda_\varkappa})\,\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\right)+r_1$$

$$(\text{mod. } 2) \quad (1 \leqq \sigma_\tau \leqq r;\ \sigma_\tau \gtrless \sigma_\rho,\ \tau \gtrless \rho)$$

aus denen sich das folgende Theorem ergibt:

Ist a eine reelle endliche nicht negative Zahl, $f(x)$ eine im Intervalle $-a \dots \infty$ endliche und positive Function, welche eine stetige erste Ableitung besitzt und so beschaffen ist, dass für jedes ganzzahlige nicht negative n der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[(x+a)^{\varkappa+1} f(x)\, y'_n]' = c_n (x+a)^{\varkappa} f(x)\, y_n \quad (c_n > c_m > 0;\ n > m;\ \varkappa \geqq 0)$$

eine ganze Function n^{ten} Grades genügt, ist ferner $f(-a)$ von Null verschieden und $\lim_{x=\infty} \dfrac{1}{f(x)}$ stärker unendlich als jede Potenz, bezeichnet endlich $\psi_n(x)$ den mit positivem Coëfficienten von x^n behafteten n^{ten} Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\displaystyle\int_{-a}^{\infty} \frac{(x+a)^{\varkappa} f(x)}{z-x}\,dx$ und besteht für eine ganze Function m^{ten} Grades $\chi(x)$ die Entwicklung

$$\chi(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A'_{\lambda_\varkappa} \psi_{\lambda_\varkappa}(x) \qquad (A'_{\lambda_\varkappa} \gtrless 0)$$

so ist die Anzahl der reellen negativen Wurzeln der Gleichung $\chi(x) = 0$, deren absoluter Betrag nicht kleiner als a ist, nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Grössen $(-1)^{\lambda_\chi} A'_{\lambda_\chi}$ und die etwa auftretende Differenz zwischen beiden Zahlen ist stets gerade.

Aus diesem Satze kann, wie ich bei dieser Gelegenheit hervorheben will, ein interessantes Theorem über die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung abgeleitet werden. Ich habe nämlich in einer früheren Mittheilung[1] gezeigt, dass die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_0^\infty \frac{z^m e^{-z}}{x-z}\,dz$ bis auf einen constanten Factor mit den Functionen

$$T_n^m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \frac{x^{n-\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(m+n-\lambda)}$$

übereinstimmen und habe daselbst die Entwicklung

$$x^p = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p} \frac{\Pi(p)\,\Pi(m+p)}{\Pi(p-\lambda)}\, T_\lambda^m(x)$$

angegeben, aus welcher für die ganze Function $m$ten Grades

$$\chi(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} a_\lambda x^\lambda$$

die Entwicklung

$$\chi(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda T_\lambda^m(x)$$

$$A_\lambda = \sum_{\mu=\lambda}^{\mu=n} \frac{\Pi(\mu)\,\Pi(m+\mu)}{\Pi(\mu-\lambda)}\, a_\mu$$

folgt. Nach dem eben entwickelten Satze hat man daher das Theorem:

---

[1] „Zur Theorie der Functionen $T_n^m(x)$." Diese Sitzungsber. 95. Bd., II. Abth.

Die Anzahl der nicht positiven reellen Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades $\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} a_\lambda x^\lambda = 0$ ist niemals grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der nicht verschwindenden Grössen $(-1)^\lambda \sum_{\mu=\lambda}^{\mu=n} \frac{\Pi(\mu)\Pi(m+\mu)}{\Pi(\mu-\lambda)} a_\mu$ und die etwa auftretende Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist stets gerade, und die Anzahl der reellen nicht negativen Wurzeln dieser Gleichung ist nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der nicht verschwindenden unter den Grössen $(-1)^\lambda \sum_{\mu=\lambda}^{\mu=n} (-1)^\mu \frac{\Pi(\mu)\Pi(m+\mu)}{\Pi(\mu-\lambda)} a_\mu$ und die etwaige Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Sind $A_{\lambda_\varkappa}$, $A_{\lambda_{\varkappa-1}}$ zwei unmittelbar aufeinander folgende (nicht verschwindende) Entwicklungscoëfficienten, so ist $\frac{1-\operatorname{sign}(A_{\lambda_\varkappa} A_{\lambda_{\varkappa-1}})}{2}$ gleich 1 oder 0, je nachdem dieselben einen Zeichenwechsel oder eine Zeichenfolge darbieten, und es ist demnach, falls in der Entwicklung von $\chi(x)$ nach den Näherungsnennern einer der angeführten allgemeinen Kettenbruchentwicklungen genau r Glieder mit den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ wirklich vorhanden sind, die Anzahl der ausserhalb des Intervalles $-a \ldots b$ liegenden Wurzeln dieser Function nach dem Modul 2 congruent dem Ausdrucke

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}(A_{\lambda_\varkappa} A_{\lambda_{\varkappa+1}}) \pm r-1,$$

wo die Marke am Summenzeichen andeutet, dass nur jene Werthe von $\varkappa$ zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1}$ gerade ist, und die Anzahl derjenigen negativen Wurzeln, deren absoluter Betrag nicht unterhalb a liegt, congruent der Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1} \frac{1+(-1)^{\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}-1} \operatorname{sign}(A'_{\lambda_\varkappa} A'_{\lambda_{\varkappa+1}})}{2},$$

während die Anzahl der innerhalb des Intervalles $-a\ldots b$, beziehungsweise $-a\ldots\infty$ (mit Ausschluss der Grenzen) befindlichen Wurzeln von $\chi(x)=0$ mit der Summe

$$m-1\pm r\pm\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}(A_{\lambda_\varkappa}A_{\lambda_{\varkappa+1}}),$$

beziehungsweise

$$m-\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}\frac{1+(-1)^{\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}-1}\operatorname{sign}(A'_{\lambda_\varkappa}A'_{\lambda_{\varkappa+1}})}{2}$$

gleichen Charakter in Bezug auf den Modul 2 besitzt.

Berücksichtigt man, dass durch die Substitution $\frac{x+a}{x-b}=\frac{y+c}{y-d}$ das Intervall $-a\ldots b$ auf das Intervall $-c\ldots d$ abgebildet wird und umgekehrt, so erkennt man, dass die Anzahl aller innerhalb des Intervalles $-a\ldots b$ befindlichen reellen Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades $\chi(x)=0$ mit der Anzahl aller innerhalb des Intervalles $-c\ldots d$ gelegenen reellen Wurzeln der Gleichung $\chi\left(\frac{(a+b)x+ac-bd}{c+d}\right)=0$ übereinstimmt, und daher hat man den Satz:

Sind a, b, c, d endliche reelle nicht negative Grössen, ist ferner die Function $f(x)$ im Intervalle $-a\ldots b$, $f_1(x)$ aber im Intervalle $-c\ldots d$ endlich und positiv und sind beide mit stetigen ersten Ableitungen begabt und so beschaffen, dass die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)f(x)y'_n]'=c_nf(x)y_n \quad (c_n>c_m>0;\ n>m)$$

$$[(x+c)(x-d)f_1(x)z'_n]'=d_nf_1(x)z_n \quad (d_n>d_m>0;\ n>m)$$

für jedes ganzzahlige nicht negative n ganze Functionen n^{ten} Grades zu particulären Integralen haben, bezeichnet man ferner mit $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$, beziehungsweise $\frac{\varphi_n^{(1)}(x)}{\psi_n^{(1)}(x)}$ den n^{ten} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_{-a}^{b}\frac{f(z)}{x-z}dz$, beziehungsweise $\int_{-c}^{d}\frac{f_1(z)}{x-z}dz$ mit positivem Coëfficienten der höchsten Potenz von x im Zähler und Nenner und mit x_μ, x'_μ die Wurzeln der Gleichungen $\psi_m(x)=0$, $\psi_m^{(1)}(x)=0$, und bestehen endlich die Entwicklungen

$$\chi(x)=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A_{\lambda_\varkappa}\psi_{\lambda_\varkappa}(x) \qquad (A_{\lambda_\varkappa}\gtrless 0)$$

$$\chi\left(\frac{(a+b)x+ac-bd}{c+d}\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=s} B_{\lambda'_\mu}\psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x) \qquad (B_{\lambda'_\mu}\gtrless 0)$$

so ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}\,(A_{\lambda_\varkappa}A_{\lambda_{\varkappa+1}})+r \equiv \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s-1}{}' \operatorname{sign}\,(B_{\lambda'_\varkappa}B_{\lambda'_{\varkappa+1}})+s \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}\left(\int_{-a}^{b} f(x)\chi(x)\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\,dx\right)\operatorname{sign}\left(\int_{-a}^{b} f(x)\chi(x)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x)\,dx\right)+r \equiv \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s-1}{}' \operatorname{sign}\left(\int_{-c}^{d} f_1(x)\chi\left(\frac{(a+b)x+ac-bd}{c+d}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x)\,dx\right)\operatorname{sign}\left(\int_{-c}^{d} f_1(x)\chi\left(\frac{(a+b)x+ac-bd}{c+d}\right)\psi^{(1)}_{\lambda'_{\varkappa+1}}(x)\,dx\right)+s \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi_m(x_\mu)}{\psi'_m(x_\mu)}\chi(x_\mu)\psi_{\lambda_\varkappa}(x_\mu)\right)\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi_m(x_\mu)}{\psi'_m(x_\mu)}\chi(x_\mu)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x_\mu)\right)+r \equiv \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s-1}{}' \operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi_m^{(1)}(x'_\mu)}{\psi_m^{(1)\prime}(x'_\mu)}\cdot\right.$$

$$\cdot\chi\left(\frac{(a+b)x'_\mu+ac-bd}{c+d}\right)\psi^{(1)}_{\lambda'_\varkappa}(x'_\mu)\Bigg)\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi^{(1)}_m(x'_\mu)}{\psi^{(1)\prime}_m(x'_\mu)}\chi\left(\frac{(a+b)x'_\mu+ac-bd}{c+d}\right)\psi^{(1)}_{\lambda'_{\varkappa+1}}(x'_\mu)\right)+s \qquad (\mathrm{mod.}\ 2)$$

wo die Marken an den einzelnen Summenzeichen anzeigen, dass nur jene Indices λ, beziehungsweise λ' zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}$, beziehungsweise $\lambda'_\varkappa+\lambda'_{\varkappa+1}$ gerade ist.

Bedenkt man ferner, dass durch die Substitutionen $x=\dfrac{b-ay}{1+y}$, $x=\dfrac{bz^2-a}{z^2+1}$ $(z\geqq 0)$ das Intervall $-a\ldots b$ auf das Intervall $0\ldots+\infty$ abgebildet wird, so sieht man, dass die Anzahl der dem Intervalle $-a\ldots b$ angehörigen Wurzeln der Gleichung $\chi(x)=0$ gleich der Anzahl der positiven Wurzeln einer der beiden Gleichungen $(1+y)^m\chi\left(\dfrac{b-ay}{1+y}\right)=0$, $(1+z^2)^m\chi\left(\dfrac{bz^2-a}{1+z^2}\right)=0$ ist, und man kann daher unter Berücksichtigung der obigen Auseinandersetzungen, der Cartesianischen Zeichenregel und des Fourier'schen Satzes folgendes Theorem aussprechen:

Sind a, b endliche reelle nicht negative Zahlen, ist ferner die Function $f(x)$ im Intervalle $-a\ldots b$, $f_1(x)$ aber für alle nicht negativen x endlich und positiv und $\lim_{x=\infty}\dfrac{1}{f_1(x)}$ stärker unendlich als jede Potenz, und sind beide Functionen mit stetigen ersten Ableitungen begabt und so beschaffen, dass für jedes ganzzahlige nicht negative n die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)f(x)y'_n]'=c_nf(x)y_n \qquad (c_n>c_m>0;\ n>m)$$

$$[x^{\varkappa+1}f(x)y'_n]'=d_nx^\varkappa f(x)y_n \qquad (d_n>d_m>0;\ n>m;\ \varkappa\geqq-1)$$

ganze Functionen vom Grade n zu particulären Integralen haben, bezeichnet man ferner mit $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$, beziehungsweise $\frac{\varphi_n^{(1)}(x)}{\psi_n^{(1)}(x)}$ den n^{ten} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_{-a}^{b} \frac{f(z)}{x-z}\,dz$, beziehungsweise $\int_0^\infty \frac{z^\varkappa f(z)}{x-z}\,dz$ mit positiven Coëfficienten der höchsten Potenz von x im Zähler und Nenner und mit x_μ, x'_μ, x''_μ die Wurzeln der Gleichungen $\psi_m(x)=0$, $\psi_m^{(1)}(x)=0$, $\psi_{2m}^{(1)}(x)=0$, und bestehen endlich die Entwicklungen

$$\chi(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A_{\lambda_\varkappa}\psi_{\lambda_\varkappa}(x) \qquad (A_{\lambda_\varkappa} \gtrless 0)$$

$$(1+x)^m \chi\left(\frac{b-ax}{1+x}\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=s} B_{\lambda'_\mu}\psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x) \qquad (B_{\lambda'_\mu} \gtrless 0)$$

$$= \sum_{\tau=1}^{\tau=m_1} a_{\lambda'''_\tau} x^{\lambda'''_\tau} \qquad (a_{\lambda'''_\tau} \gtrless 0;\ \lambda'''_{m_1} = m)$$

$$(1+x^2)^m \chi\left(\frac{bx^2-a}{x^2+1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\nu=t} C_{\lambda''_\nu}\psi^{(1)}_{\lambda''_\nu}(x) \qquad (C_{\lambda''_\nu} \gtrless 0)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=2m_2} b_{\lambda^{(IV)}_\sigma} x^{\lambda^{(IV)}_\sigma} \qquad (b_{\lambda^{(IV)}_\sigma} \gtrless 0;\ \lambda^{(IV)}_{m_2} = 2m)$$

so ist

$$r-1 \pm \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}\left(A_{\lambda_\varkappa} A_{\lambda_{\varkappa-1}}\right) \equiv \sum_{\mu=1}^{\mu=s-1} \frac{1+(-1)^{\lambda'_\mu+\lambda'_{\mu+1}-1} \operatorname{sign}\left(B_{\lambda'_\mu} B_{\lambda'_{\mu+1}}\right)}{2} \pmod{2}$$

$$\equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=t-1} \frac{1+(-1)^{\lambda''_\nu+\lambda''_{\nu+1}-1} \operatorname{sign}\left(C_{\lambda''_\nu} C_{\lambda''_{\nu+1}}\right)}{2} \pmod{2}$$

$$\equiv \sum_{\tau=1}^{\tau=m_1} \frac{1-\operatorname{sign}\left(a_{\lambda'''_\tau} a_{\lambda'''_{\tau+1}}\right)}{2} \pmod{2}$$

$$\equiv \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m_2} \frac{1-\operatorname{sign}\left(b_{\lambda^{(IV)}_\sigma} b_{\lambda^{(IV)}_{\sigma+1}}\right)}{2} \pmod{2}$$

$$\equiv \sum_{\rho=1}^{\rho=m_3} \frac{1-\operatorname{sign}\left(\chi^{(\lambda^{(V)}_\rho)}(-a)\,\chi^{(\lambda^{(V)}_{\rho+1})}(-a)\right)}{2} + \sum_{\rho=1}^{\rho=m_4} \frac{1-\operatorname{sign}\left(\chi^{(\lambda^{(VI)}_\rho)}(+\infty)\,\chi^{(\lambda^{(VI)}_{\rho+1})}(+\infty)\right)}{2} \pmod{2}$$

$$r-1+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}\left(\int_{-a}^{b} f(x)\chi(x)\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\,dx\right) . \operatorname{sign}\left(\int_{-a}^{b} f(x)\chi(x)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x)\,dx\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=s-1}\left\{1+(-1)^{\lambda'_\mu+\lambda'_{\mu+1}-1}\operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)(1+x)^m \chi\left(\frac{b-ax}{1+x}\right)\psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x)\,dx\right)\right.$$

$$\left. . \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)(1+x)^m \chi\left(\frac{b-ax}{1+x}\right)\psi^{(1)}_{\lambda'_{\mu+1}}(x)\,dx\right)\right\} \quad (\text{mod. } 2)$$

$$\equiv \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\nu=t-1}\left\{1+(-1)^{\lambda''_\nu+\lambda''_{\nu+1}-1}\operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)(1+x^2)^m \chi\left(\frac{bx^2-a}{x^2+1}\right)\psi^{(1)}_{\lambda''_\nu}(x)\,dx\right)\cdot\right.$$

$$\left. . \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)(1+x^2)^m \chi\left(\frac{bx^2-a}{x^2+1}\right)\psi^{(1)}_{\lambda''_{\nu+1}}(x)\,dx\right)\right\} \quad (\text{mod. } 2)$$

$$\equiv \sum_{\tau=1}^{\tau=m_1}\frac{1-\operatorname{sign}\left(a_{\lambda'''_\tau}a_{\lambda'''_{\tau+1}}\right)}{2} \quad (\text{mod. } 2)$$

$$\equiv \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m_2}\frac{1-\operatorname{sign}\left(b_{\lambda^{(IV)}_\sigma}b_{\lambda^{(IV)}_{\sigma+1}}\right)}{2} \quad (\text{mod. } 2)$$

$$r-1+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi_m(x_\mu)}{\psi'_m(x_\mu)}\chi(x_\mu)\psi_{\lambda_\varkappa}(x_\mu)\right)\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi_m(x_\mu)}{\psi'_m(x_\mu)}\chi(x_\mu)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x_\mu)\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=s-1}\left\{1+(-1)^{\lambda'_\mu+\lambda'_{\mu+1}-1}\operatorname{sign}\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\frac{\varphi_m^{(1)}(x'_\rho)}{\psi_m^{(1)\prime}(x'_\rho)}(1+x'_\rho)^m\chi\left(\frac{b-ax'_\rho}{1+x'_\rho}\right)\psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x'_\rho)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{sign}\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\frac{\varphi_m^{(1)}(x'_\rho)}{\psi_m^{(1)\prime}(x'_\rho)}(1+x'_\rho)^m\chi\left(\frac{b-ax'_\rho}{1+x'_\rho}\right)\psi^{(1)}_{\lambda'_{\mu+1}}(x'_\rho)\right)\right\}\qquad(\text{mod. } 1)$$

$$\equiv\frac{1}{2}\sum_{\nu-1}^{\nu=t-1}\left\{1+(-1)^{\lambda''_\nu+\lambda''_{\nu+1}-1}\operatorname{sign}\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=2m}\frac{\varphi_{2m}^{(1)}(x''_\rho)}{\psi_{2m}^{(1)\prime}(x''_\rho)}(1+x''^2_\rho)^m\chi\left(\frac{bx''^2_\rho-a}{x''^2_\rho+}\right)\psi^{(1)}_{\lambda''_\nu}(x''_\rho)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{sign}\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=2m}\frac{\varphi_{2m}^{(1)}(x''_\rho)}{\psi_{2m}^{(1)\prime}(x''_\rho)}(1+x''^2_\rho)^m\chi\left(\frac{bx''^2_\rho-a}{x''^2_\rho+1}\right)\psi^{(1)}_{\lambda''_{\nu+1}}(x''_\rho)\right)\right\}\qquad(\text{mod. } 2)$$

$$\equiv\sum_{\tau=1}^{\tau=m_1}\frac{1-\operatorname{sign}(a_{\lambda'''_\tau}a_{\lambda'''_{\tau+1}})}{2}\qquad(\text{mod. } 2)$$

$$\equiv\sum_{\sigma=1}^{\sigma=m_2}\frac{1-\operatorname{sign}(b_{\lambda^{(IV)}_\sigma}b_{\lambda^{(IV)}_{\sigma+1}})}{2}\qquad(\text{mod. } 2)$$

wo die Marken an den Summenzeichen anzeigen, dass nur jene Werthe von $\varkappa$ zu nehmen sind, für welche $\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}$ gerade ist, und nur die $\lambda_\tau^{(\nu)}$ten $(\tau=1,2,\ldots,m_1)$ Ableitungen von $\chi(x)$ für $x=-a$ und nur die $\lambda_\sigma^{(\nu')}$ten $(\sigma=1,2,\ldots,m_2)$ für $x=\infty$ von Null verschieden sind.

Da die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung $\chi(-a+z^2)=0$ mit der Anzahl derjenigen Wurzeln von $\chi(x)=0$ übereinstimmt, welche grösser als $-a$ sind, während die Anzahl der positiven Wurzeln von $\chi(b+z^2)=0$ gleich der Anzahl derjenigen Wurzeln von $\chi(z)=0$ ist, welche grösser als b sind, so ist die Anzahl der dem Intervalle $-a\ldots b$ angehörigen Wurzeln der Gleichung $\chi(x)=0$ gleich der Differenz aus der Anzahl der positiven Wurzeln von $\chi(-a+z^2)=0$ und $\chi(b+z^2)=0$. Diese Bemerkung führt zu folgendem Theoreme:

Sind a, b endliche reelle nicht negative Zahlen, ist ferner die Function $f(x)$ im Intervalle $-a\ldots b$, $f_1(x)$ aber für alle nicht negativen x endlich und positiv und $\lim_{x=\infty}\dfrac{1}{f_1(x)}$ stärker unendlich als jede Potenz, und sind beide Functionen mit stetigen ersten Ableitungen begabt und so beschaffen, dass für jedes ganzzahlige nicht negative n die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)f(x)y'_n]'=c_nf(x)y_n \qquad (c_n>c_m>0;\ n>m)$$

$$[x^{\varkappa+1}f(x)z'_n]'=d_nx^\varkappa f(x)z_n \qquad (d_n>d_m>0;\ n>m)$$

ganze Functionen vom Grade n zu particulären Integralen haben, bezeichnet man ferner mit $\dfrac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$, beziehungsweise $\dfrac{\varphi_n^{(1)}(x)}{\psi_n^{(1)}(x)}$ den n^{ten} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung des Integrales $\displaystyle\int_{-a}^{b}\frac{f(z)}{x-z}\,dz$, beziehungsweise $\displaystyle\int_0^\infty\frac{z^\varkappa f_1(z)}{x-z}\,dz$ und mit x_μ, x'_μ die Wurzeln der Gleichungen $\psi_m(x)=0$, $\psi_{2m}^{(1)}(x)=0$ mit positiven Coëfficienten der höchsten Potenz von x im Zähler und Nenner, und bestehen endlich die Entwicklungen

$$\chi(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} A_{\lambda_\varkappa} \psi_{\lambda_\varkappa}(x) \qquad (A_{\lambda_\varkappa} \gtrless 0,\ \lambda_r = m)$$

$$\chi(-a+x^2) = \sum_{\mu=1}^{\mu=s} B_{\lambda'_\mu} \psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x) \qquad (B_{\lambda'_\mu} \gtrless 0,\ \lambda'_s = 2m)$$

$$\chi(b+x^2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=t} C_{\lambda''_\nu} \psi^{(1)}_{\lambda''_\nu}(x) \qquad (C_{\lambda''_\nu} \gtrless 0,\ \lambda''_\nu = 2m)$$

so ist

$$r-1+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}(A_{\lambda_\varkappa} A_{\lambda_{\varkappa+1}}) \equiv \sum_{\mu=1}^{\mu=s-1} \frac{1+(-1)^{\lambda'_\mu+\lambda'_{\mu+1}-1} \operatorname{sign}(B_{\lambda'_\mu} B_{\lambda'_{\mu+1}})}{2} \pm$$

$$\pm \sum_{\nu=1}^{\nu=t-1} \frac{1+(-1)^{\lambda''_\nu+\lambda''_{\nu+1}-1} \operatorname{sign}(C_{\lambda''_\nu} C_{\lambda''_{\nu+1}})}{2} \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$r-1+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}' \operatorname{sign}\left(\int_{-a}^{b} f(x)\chi(x)\psi_{\lambda_\varkappa}(x)\,dx\right) \operatorname{sign}\left(\int_{-a}^{b} f(x)\chi(x)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x)\,dx\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=s-1}\left\{1+(-1)^{\lambda'_\mu+\lambda'_{\mu+1}-1} \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)\chi(-a+x^2)\psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x)\,dx\right) \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)\chi(-a+x^2)\psi^{(1)}_{\lambda'_{\mu+1}}(x)\,dx\right)\right\} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\nu=t-1}\left\{1+(-1)^{\lambda''_\nu+\lambda''_{\nu+1}-1} \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)\chi(b+x^2)\psi^{(1)}_{\lambda''_\nu}(x)\,dx\right) \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty x^\varkappa f_1(x)\chi(b+x^2)\psi^{(1)}_{\lambda''_{\nu+1}}(x)\,dx\right)\right\}$$

$$(\text{mod. } 2)$$

$$r-1+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r-1}{}'\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi_m(x_\mu)}{\psi'_m(x_\mu)}\chi(x_\mu)\,\psi_{\lambda_\varkappa}(x_\mu)\right)\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\varphi_m(x_\mu)}{\psi'_m(x_\mu)}\chi(x_\mu)\,\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x_\mu)\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=s-1}\left\{1+(-1)^{\lambda'_\mu+\lambda'_{\mu+1}-1}\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2m}\frac{\varphi^{(1)}_{2m}(x'_\mu)}{\psi^{(1)\prime}_{2m}(x'_\mu)}\chi(-a+x'^2_\mu)\,\psi^{(1)}_{\lambda'_\mu}(x'_\mu)\right)\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2m}\frac{\varphi^{(1)}_{2m}(x'_\mu)}{\psi^{(1)\prime}_{2m}(x'_\mu)}\chi(-a+x'^2_\mu)\,\psi^{(1)}_{\lambda'_{\mu+1}}(x'_\mu)\right)\right\}\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\nu=t-1}\left\{1+(-1)^{\lambda''_\nu+\lambda''_{\nu+1}-1}\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2m}\frac{\varphi^{(1)}_{2m}(x'_\mu)}{\psi^{(1)\prime}_{2m}(x'_\mu)}\chi(b+x'^2_\mu)\,\psi^{(1)}_{\lambda''_\nu}(x'_\mu)\right)\operatorname{sign}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2m}\frac{\varphi^{(1)}_{2m}(x'_\mu)}{\psi^{(1)\prime}_{2m}(x'_\mu)}\chi(b+x'^2_\mu)\,\psi^{(1)}_{\lambda''_{\nu+1}}(x'_\mu)\right)\right\}$$

$$\pmod{2}$$

wo die Marken an den Summenzeichen anzeigen, dass nur jene Werthe von $\varkappa$ zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}$ gerade ist.