

Über complexe Primzahlen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Für die Summe derjenigen Werthe, welche eine beliebige Function annimmt, wenn ihr Argument alle aus gewissen reellen Primzahlen zusammengesetzten ganzen Zahlen eines vorgeschriebenen Intervalles durchläuft, und speciell für die Anzahl der in diesem Intervalle befindlichen Primzahlen, ist eine Reihe von theils genauen, theils angenäherten Ausdrücken aufgestellt worden, welche in verschiedenen einschlägigen Werken, beziehungsweise Abhandlungen von Legendre, Gauss, Dirichlet, Möbius, Riemann, Tchebychef, A. de Polignac, Genocchi, Bugajef, Berger, Catalan, Cesaro, E. de Jonquières, Lipschitz, Sylvester, Petersen, Meissel, James Glaisher, J. W. L. Glaisher, mir u. A. enthalten sind. Diejenigen genauen Formeln, in welchen keine Integrale vorkommen, zerfallen in zwei Kategorien. Die Formeln der ersten Kategorie setzen die Kenntniss aller Primzahlen des betrachteten Intervalles voraus und sind daher vorwiegend in theoretischer Beziehung von Interesse, in den der zweiten Gruppe angehörigen Relationen hingegen werden Summen, welche sich auf alle aus bestimmten beliebig ausgewählten Primzahlen gebildeten ganzen Zahlen eines gegebenen Intervalles beziehen, durch Summen ausgedrückt, die sich über alle jene Zahlen desselben Intervalles erstrecken, welche aus den übrigen in demselben befindlichen Primzahlen gebildet sind; diese Formeln können daher zur Berechnung der letzteren Summen benützt werden, sobald die zuerst erwähnten Primzahlen bekannt sind, wesshalb sie nicht nur einen theoretischen, sondern auch einen in vielen Fällen nicht unerheblichen praktischen Werth besitzen. Es lassen sich nun analoge, sowohl genaue, als auch angenäherte Formeln für jede Art von complexen Zahlen aufstellen. Ich werde in dieser Mittheilung zunächst einige genaue Formeln der beiden erwähnten Kategorien für allgemeine complexe Zahlen ableiten und zum Schlusse einige auf die Primfactoren der reellen und der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen bezügliche Theoreme ermitteln.

I. Formeln der ersten Gruppe.

Es bedeute (n) die Gesammtheit der einer bestimmten Gattung von complexen Zahlen angehörigen ganzen Zahlen, deren Norm die reelle Zahl n nicht übersteigt, $\mathfrak{A}(n)$ die Anzahl der Individuen des Zahlengebietes (n), $\sum\limits_{x=(n)} \varphi(x)$ die Summe der Werthe, welche die willkürliche Function $\varphi(x)$ annimmt, wenn ihr Argument die eben erwähnten $\mathfrak{A}(n)$ complexen ganzen Zahlen durchläuft, $\tilde{\omega}(x)$ die Anzahl der verschiedenen (wirklichen und idealen) Primfactoren der ganzen complexen Zahl x, es habe ferner $\varepsilon(x)$ den Werth 0 oder 1, je nachdem die Norm der complexen Zahl α unterhalb der Einheit liegt oder nicht, und die zahlentheoretische Function $\mu(x)$ den Werth $(-1)^{\tilde{\omega}(x)}$, falls x eine complexe Einheit oder ein Product von verschiedenen (wirklichen oder idealen) Primfactoren ist, hingegen den Werth 0, wenn x durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, und es sei endlich die zahlentheoretische Function $\alpha(x)$ so beschaffen, dass die über alle Theiler d der ganzen complexen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_{d} \alpha(d) = f(x)$$

ist, wenn x eine Primzahl ist, während in allen anderen Fällen die Gleichung

$$\sum_{d} \alpha(d) = 0$$

besteht.

Durch die eben angeführte Eigenschaft ist die Function $\alpha(x)$ vollkommen bestimmt, denn mit Benützung des bekannten Satzes, dass, falls $p_1, p_2, \ldots p_r$ sämmtliche Primfactoren der ganzen complexen Zahl x sind, sich jeder Theiler von x, mit Ausnahme von x selbst, ebenso oft unter den Divisoren der ganzen Zahlen

$$x, \frac{x}{p_1 p_2}, \ldots, \frac{x}{p_1 p_2 p_3 p_4}, \ldots, \frac{x}{p_{r-3} p_{r-2} p_{r-1} p_r}, \ldots,$$

als unter den Theilern der ganzen Zahlen

$$\frac{x}{p_1}, \frac{x}{p_2}, \ldots, \frac{x}{p_r}, \frac{x}{p_1 p_2 p_3}, \ldots, \frac{x}{p_{r-2} p_{r-1} p_r}, \ldots$$

findet, leitet man in bekannter Weise die Relation

$$\alpha(x) = \sum_d \bar{f}(d) \mu\left(\frac{x}{d}\right) \qquad \ldots 1)$$

ab, wo $\bar{f}(d)$ den Werth $f(d)$ oder 0 hat, je nachdem d eine Primzahl ist oder nicht. Nach dieser Gleichung ist also

$$\alpha(1) = 0, \quad \alpha(x) = 0, \qquad \ldots 2)$$

wenn x eine (wirkliche oder ideale) Primzahl in einer höheren als der zweiten, oder mehr als eine Primzahl in einer höheren als der ersten Potenz enthält,

$$\alpha(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)} f(p_1), \qquad \ldots 3)$$

wenn x den Primfactor p_1 in der zweiten, alle anderen aber nur in der ersten Potenz enthält, endlich

$$\alpha(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \sum_\lambda f(p_\lambda), \qquad \ldots 4)$$

wo die Summation über alle complexen Primfactoren der ganzen complexen Zahl x zu erstrecken ist, falls x durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist.

Ist speciell $f(x) = 1$, so geht die Function $\alpha(x)$ in die specielle Function $\alpha_0(x)$ über, für welche an die Stelle der Gleichungen 2), 3), 4) die folgenden treten:

$$\alpha_0(1) = 0, \quad \alpha_0(x) = 0 \qquad \ldots 2\,a)$$

$$\alpha_0(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)} \qquad \ldots 3\,a)$$

$$\alpha_0(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \tilde{\omega}(x). \qquad \ldots 4\,a)$$

Für die Anzahl $\mathfrak{A}(n)$ der Individuen des Zahlengebietes (n) bestehen offenbar die Gleichungen

$$\mathfrak{A}(n) = \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

$$\mathfrak{A}(n) = \sum_{x=(n)} \frac{1+\operatorname{sign}\left(\frac{n}{N(x)}-1\right)}{2}$$

$$\mathfrak{A}(n) = \sum_{x=(n)} \frac{1+\operatorname{sign}(n-N(x))}{2}$$

und daher ist

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\alpha(x) = \sum_{x,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\alpha(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d} \alpha(d)\right)$$

oder nach den angeführten Eigenschaften der zahlentheoretischen Function $\alpha(x)$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\alpha(x) = F(n) \qquad \ldots 5)$$

und speciell

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\alpha_0(x) = \Theta(n), \qquad \ldots 6)$$

wo $F(n)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle (wirklichen und idealen) Primzahlen des Complexes (n) durchläuft, und $\Theta(n)$ die Anzahl dieser Primzahlen ist.

Aus diesen Gleichungen lässt sich sofort eine Reihe von Formeln derselben Kategorie ableiten. Es sei x_λ eine zu der erwähnten Classe von complexen Zahlen gehörige ganze complexe Zahl, welche eine vorgeschriebene (durch den Index λ charakterisirte) Eigenschaft besitzt, δ_λ ein zu den Zahlen x_λ gehöriger Theiler der ganzen complexen Zahl x und es mögen die

Functionen $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_2^{(0)}(x)$, $f_3^{(0)}(x)$, $\chi(x)$, $\chi^{(0)}(x)$ folgenden Relationen genügen

$$\sum_{\delta_\lambda} f_2(\delta_\lambda) f_3\left(\frac{x}{\delta_\lambda}\right) = \alpha(x) \qquad \ldots 7)$$

$$\sum_{\delta_\lambda} f_2^{(0)}(\delta_\lambda) f_3^{(0)}\left(\frac{x}{\delta_\lambda}\right) = \alpha_0(x) \qquad \ldots 8)$$

$$\sum_{\delta_\lambda} f_2(\delta_\lambda) = \chi(x)$$

$$\sum_{\delta_\lambda} f_2^{(0)}(\delta_\lambda) = \chi^{(0)}(x),$$

falls x zu den Zahlen x_μ gehört, und

$$\sum_{\delta_\lambda} f_2(\delta_\lambda) = 0$$

$$\sum_{\delta_\lambda} f_2^{(0)}(\delta_\lambda) = 0$$

in allen anderen Fällen, wo die Summationen über alle Divisoren δ_λ von x zu erstrecken sind. Alsdann ist

$$\sum_{x_\lambda=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x_\lambda)}\right) f_2(x_\lambda) = \sum_{x_\lambda,\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x_\lambda y)}\right) f_2(x_\lambda)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{\delta_\lambda} f_2(\delta_\lambda)\right)$$

$$\sum_{x_\lambda=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x_\lambda)}\right) f_2^{(0)}(x_\lambda) = \sum_{x_\lambda,\, y=(n)} \left(\frac{n}{N(x_\lambda y)}\right) f_2^{(0)}(x_\lambda)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{\delta_\lambda} f_2^{(0)}(\delta_\lambda)\right),$$

wo die Summationen bezüglich x_λ über alle dem Gebiete (n) angehörigen complexen Zahlen x_λ auszudehnen sind und in den auf x bezüglichen Summen selbstverständlich nur solche ganze Zahlen des Complexes (n) zu nehmen sind, welche einen unter den Zahlen x_λ befindlichen Theiler besitzen. Aus diesen Gleichungen folgen nach den eben angeführten Beziehungen die Relationen:

$$\sum_{x_\lambda=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x_\lambda)}\right) f_2(x_\lambda) = \sum_{x_\mu=(n)} \chi(x_\mu) = X(n)$$

$$\sum_{x_\lambda=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x_\lambda)}\right) f_2^{(0)}(x_\lambda) = \sum_{x_\mu=(n)} \chi^{(0)}(x_\mu) = X^{(0)}(n).$$

Schreibt man in diesen Gleichungen für n: $\frac{n}{N(y)}$, multiplicirt sodann mit $f_3(y)$, beziehungsweise $f_3^{(0)}(y)$ und summirt bezüglich y über das ganze Zahlengebiet (n), so entstehen die Gleichungen

$$\sum_{y=(n)} X\left(\frac{n}{N(y)}\right) f_3(y) = \sum_{x_\lambda, y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x_\lambda y)}\right) f_2(x_\lambda) f_3(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{\delta_\lambda} f_2(\delta_\lambda) f_3\left(\frac{x}{\delta_\lambda}\right)\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \alpha(x)$$

$$\sum_{y=(n)} X^{(0)}\left(\frac{n}{N(y)}\right) f_3^{(0)}(y) = \sum_{x_\lambda, y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x_\lambda y)}\right) f_2^{(0)}(x_\lambda) f_3^{(0)}(y)$$

$$= \sum_{x=(0)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{\delta_\lambda} f_2^{(0)}(\delta_\lambda) f_3^{(0)}\left(\frac{x}{\delta_\lambda}\right)\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \alpha_0(x),$$

oder nach 5) und 6):

$$\sum_{y=(n)} X\left(\frac{n}{N(y)}\right) f_3(y) = F(n) \qquad 9)$$

$$\sum_{y=(n)} X^{(0)}\left(\frac{n}{N(y)}\right) f_3^{(0)}(y) = \Theta(n). \qquad \ldots 10)$$

Aus diesen allgemeinen Relationen sollen nun einige besonders interessante specielle Formeln abgeleitet werden.

Sind die Zahlen x_λ alle ganzen Zahlen des Gebietes (n) und nimmt man für eine der beiden Functionen $f_2(x)$, $f_3(x)$, beziehungsweise $f_2^{(0)}(x)$, $f_3^{(0)}(x)$ eine zahlentheoretische Function $\varkappa(x)$, welche für jedes Paar ganzer complexer Zahlen des Gebietes (n) die Gleichung

$$\varkappa(xy) = \varkappa(x)\varkappa(y)$$

befriedigt, so lässt sich die andere leicht ermitteln. Ist nämlich beispielsweise $f_2(x) = \varkappa(x)$, so wird $f_2\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{f_2(x)}{f_2(d)}$, wenn d irgend ein Theiler von x ist, und daher verwandelt sich die Gleichung 7) in

$$\sum_d \frac{f_3(d)}{f_2(d)} = \frac{\alpha(x)}{f_2(x)},$$

aus welcher Relation nach der anfänglich benützten Schlussweise folgt

$$f_3(x) = \sum_d \alpha(d) f_2\left(\frac{x}{d}\right)\mu\left(\frac{x}{d}\right) \qquad \ldots 11)$$

Es sei zunächst $f_2(x) = N(x)^\varkappa$, dann wird nach 11)

$$f_3(x) = \sum_d \alpha\left(\frac{x}{d}\right) N(d)^\varkappa \mu(d), \qquad \ldots 12)$$

und es stellt $\sum_d f_2(d)$, wo die Summation über alle (wirklichen und idealen) Theiler der ganzen complexen Zahl x zu erstrecken ist, die Summe $\psi_\varkappa(x)$ der $\varkappa$ten Potenzen der Normen aller Theiler der ganzen complexen Zahl x vor, so dass also

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) f_2(x) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)^\varkappa \qquad \ldots 12\,a)$$

$$= \sum_{x=(n)} \psi_\varkappa(x) = \Psi_\varkappa(n)$$

wird. Die auf der rechten Seite der Gleichung 12) stehende Summe kann leicht nach den Functionen $f(p_\lambda)$ geordnet werden. Führt man nämlich in dieselbe den oben aufgestellten Ausdruck von $\alpha(x)$ ein, so erhält man für den Coëfficienten von $f(p_\lambda)$ die Summe

$$\sum_d \mu\left(\frac{d}{p_\lambda}\right) N\left(\frac{x}{d}\right)^\varkappa \mu\left(\frac{x}{d}\right),$$

wo die Summation über alle durch die Primzahl p_λ theilbaren Divisoren der ganzen complexen Zahl x zu erstrecken ist. Ist nun

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

so wird diese Summe gleich

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2 \cdot} \mu\left(p_1^{\varkappa_1} p_2^{\varkappa_2} \dots p_r^{\varkappa_r}\right) N\left(p_1^{\alpha_1-\varkappa_1} p_2^{\alpha_2-\varkappa_2} \dots p_{\lambda-1}^{\alpha_{\lambda-1}-\varkappa_{\lambda-1}} p_\lambda^{\alpha_\lambda-\varkappa_\lambda-1} p_{\lambda+1}^{\alpha_{\lambda+1}-\varkappa_{\lambda+1}} \dots p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}\right)^\varkappa$$

$$\cdot \mu\left(p_1^{\alpha_1-\varkappa_1} p_2^{\alpha_2-\varkappa_2} \dots p_{\lambda-1}^{\alpha_{\lambda-1}-\varkappa_{\lambda-1}} p_\lambda^{\alpha_\lambda-\varkappa_\lambda-1} p_{\lambda+1}^{\alpha_{\lambda+1}-\varkappa_{\lambda+1}} \quad p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}\right),$$

67*

wo die Grössen $\varkappa_\tau$ nur die Werthe 0 und 1 haben können.

Aus der Definition der zahlentheoretischen Function $\mu(x)$ folgt, dass für alle theilerfremden Werthpaare x, y die Relation

$$\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$$

besteht und daher lässt sich diese Summe auch in folgender Weise schreiben

$$
\begin{aligned}
\tau_\varkappa\left(\frac{x}{p_\lambda}\right) = \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r} & \mu(p_1^{\varkappa_1})\,\mu(p_2^{\varkappa_2}) \ldots \mu(p_r^{\varkappa_r})\, N(p_1^{\alpha_1-\varkappa_1})^\varkappa N(p_2^{\alpha_2-\varkappa_2})^\varkappa \ldots N\left(p_{\lambda-1}^{\alpha_{\lambda-1}-\varkappa_{\lambda-1}}\right)^\varkappa N\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda-\varkappa_\lambda-1}\right)^\varkappa \\
& . N\left(p_{\lambda+1}^{\alpha_{\lambda+1}-\varkappa_{\lambda+1}}\right)^\varkappa \ldots N\left(p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}\right)^\varkappa \mu\left(p_1^{\alpha_1-\varkappa_1}\right) \mu\left(p_2^{\alpha_2-\varkappa_2}\right) \ldots \mu\left(p_{\lambda-1}^{\alpha_{\lambda-1}-\varkappa_{\lambda-1}}\right) \mu\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda-\varkappa_\lambda-1}\right) \\
& \mu\left(p_{\lambda+1}^{\alpha_{\lambda+1}-\varkappa_{\lambda+1}}\right) \ldots \mu\left(p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}\right) = \left\{N\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda-1}\right)^\varkappa \mu\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda-1}\right) - N\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda-2}\right)^\varkappa \mu\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda-2}\right)\right\} \\
& \prod_{\tau=1}^{r}{}' \left\{N\left(p_\tau^{\varkappa\alpha_\tau}\right) \mu\left(p_\tau^{\alpha_\tau}\right) - N\left(p_\tau^{\alpha_\tau-1}\right)^\varkappa \mu\left(p_\tau^{\alpha_\tau-1}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

wenn festgesetzt wird, dass die Function $\mu(\alpha)$ für ein nicht ganzzahliges Argument den Werth 0 haben soll und die Marke am Productzeichen anzeigt, dass der Werth $\tau = \lambda$ auszuschliessen ist. Dieser Ausdruck zeigt, dass der Coëfficient von $f(p_\lambda)$ in $f_3(x)$ den Werth 0 hat, wenn $\frac{x}{p_\lambda}$ auch nur einen Primfactor in einer höheren als der zweiten Potenz enthält, und dass derselbe in allen anderen Fällen gleich dem Producte der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen jener Primtheiler von x ist, welche in $\frac{x}{p_\lambda}$ nur in der ersten Potenz vorkommen, multiplicirt mit dem mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen Producte der um 1 vermehrten $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen jener Primfactoren von x, welche in $\frac{x}{p_\lambda}$ in der zweiten Potenz auftreten, je nachdem die Anzahl der letzteren gerade oder ungerade ist. Ist speciell $\varkappa = 0$, so wird der angeführte Coëfficient gleich 0, wenn $\frac{x}{p_\lambda}$ auch nur einen Primfactor in einer höheren als der zweiten Potenz enthält und erhält den Werth $(-2)^\rho$ in allen anderen Fällen, wenn ρ die Anzahl jener Primzahlen vorstellt, welche in $\frac{x}{p_\lambda}$ in der zweiten Potenz erscheinen.

Man hat demnach die Formeln

$$\sum_{x=(n)} \Psi_\varkappa\left(\frac{n}{N(x)}\right) F_1(x) = F(n) \qquad \ldots 13)$$

$$\sum_{x=(n)} \Psi_\varkappa\left(\frac{n}{N(x)}\right) F_1^{(0)}(x) = \Theta(n), \qquad \ldots 14)$$

wo

$$F_1(x) = \sum_\lambda \tau_\varkappa\left(\frac{x}{p_\lambda}\right) f(p_\lambda)$$

$$F_1^{(0)}(x) = \sum_\lambda \tau_\varkappa\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)$$

ist, wenn die Summation bezüglich λ über alle Primfactoren von x ausgedehnt wird.

Für die eben aufgestellte zahlentheoretische Function $F_1(x)$ lässt sich, wie man leicht zeigen kann, die folgende bemerkenswerthe Gleichung aufstellen:

$$\sum_d F_1(d) = \sum_\lambda f(p_\lambda) N\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)^\varkappa \mu\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)$$

Es sei ferner $f_2(x) = \lambda(x) N(x)^\varkappa$, wo die zahlentheoretische Function $\lambda(x)$ den Werth $+1$ oder -1 besitzt, je nachdem x aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von gleichen oder verschiedenen (wirklichen und idealen) Primzahlen zusammengesetzt ist. Da offenbar nach der Definition von $\lambda(x)$ für jedes Paar von ganzen complexen Zahlen die Gleichung

$$\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$$

besteht, so wird in diesem Falle

$$f_3(x) = \sum_d \alpha(d)\lambda\left(\frac{x}{d}\right)\mu\left(\frac{x}{d}\right)N\left(\frac{x}{d}\right)^{\varkappa} \qquad \ldots 15)$$

$$= \sum_d \alpha(\lambda)\mu^2\left(\frac{x}{d}\right)N\left(\frac{x}{d}\right)^{\varkappa}$$

Da, wie man sofort sieht, die über alle Divisoren d der Primzahlpotenz $p_1^{\alpha_1}$ ausgedehnte Summe $\sum_d \lambda(d)N(d)^{\varkappa}$ den Werth $\sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=\alpha_1} (-1)^{\lambda_1}N(p_1)^{\lambda_1\varkappa}$ besitzt, so ist die über alle Theiler der ganzen complexen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_d \lambda(d)N(d)^{\varkappa} = \prod_{\tau=1}^{r} \sum_{\lambda_\tau=0}^{\lambda_\tau=\alpha_\tau} (-1)^{\lambda_\tau}N(p_\tau)^{\varkappa\lambda_\tau} = \sigma_\varkappa(x).$$

Ist speciell $\varkappa = 0$, so entstehen die interessanten Relationen

$$\sum_d \lambda(d) = 1,$$

falls x das Quadrat einer ganzen complexen Zahl ist, und

$$\sum_d \lambda(d) = 0$$

in allen anderen Fällen. Es wird demnach

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)N(x)^{\varkappa} = \sum_{x,\,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\lambda(x)N(x)^{\varkappa} \ldots 15\,a)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_d \lambda(d)\,N(d)^{\varkappa}\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \sigma_\varkappa(x) = \sum\nolimits_{\varkappa}(n)$$

und speciell

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x) = \mathfrak{A}(\sqrt{n}).$$

Setzt man in die auf der rechten Seite der Gleichung 15) stehende Summe den oben ermittelten Ausdruck von $\alpha(x)$ ein und ordnet nach den Functionen $f(p_\lambda)$, so ergibt sich als Coëfficient von $f(p_\lambda)$ die Summe

$$\sum_d \mu\left(\frac{d}{p_\lambda}\right) \mu^2\left(\frac{x}{d}\right) N\left(\frac{x}{d}\right)^\varkappa,$$

wo die Summation über alle durch p_λ theilbaren Divisoren d der ganzen complexen Zahl x zu erstrecken ist, für welche $\frac{x}{d}$ durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist. Dieselbe kann in folgender Weise geschrieben werden

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r} \mu(p_1^{\varkappa_1}) \mu(p_1^{\varkappa_2}) \ldots \mu\left(p_{\lambda-1}^{\varkappa_{\lambda-1}}\right) \mu\left(p_\lambda^{\varkappa_\lambda - 1}\right) \mu\left(p_{\lambda+1}^{\varkappa_{\lambda+1}}\right) \ldots$$
$$\ldots \mu\left(p_r^{\varkappa_r}\right) N\left(p_1^{\alpha_1 - \varkappa_1}\right)^\varkappa N\left(p_2^{\alpha_2 - \varkappa_2}\right)^\varkappa \ldots N\left(p_r^{\alpha_r - \varkappa_r}\right)^\varkappa,$$

wo die Summation über alle den Bedingungen $\varkappa_\tau = \alpha_\tau, \alpha_\tau - 1$ genügenden Werthsysteme $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ auszudehnen ist. Führt man die einzelnen Summationen aus, so erhält man das Product

$$\left\{\mu\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda - 1}\right) + \mu\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda - 2}\right) N\left(p_\lambda^\varkappa\right)\right\} \prod_{\tau=1}^{r}{}' \left\{\mu\left(p_\tau^{\alpha_\tau}\right) + \right.$$
$$\left. + \mu\left(p_\tau^{\alpha_\tau - 1}\right) N(p_\tau)^\varkappa\right\} = \beta_\varkappa\left(\frac{x}{p_\lambda}\right),$$

wo die Marke am Productzeichen angibt, dass der Werth $\tau = \lambda$ auszuschliessen ist. Dieser Ausdruck zeigt, dass der gesuchte Coëfficient gleich Null ist, wenn die ganze complexe Zahl $\frac{x}{p_\lambda}$ auch nur einen Primfactor in einer höheren als der zweiten Potenz enthält, und dass derselbe in allen anderen Fällen für $\varkappa > 0$ gleich dem Producte der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen jener Primtheiler von x ist, welche in $\frac{x}{p_\lambda}$ in der zweiten Potenz auftreten, multiplicirt mit dem mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen Producte der um eine Einheit verminderten $\varkappa$ten Potenzen der Normen jener Primfactoren von x, welche in $\frac{x}{p_\lambda}$ nur in der ersten Potenz vorkommen, je nachdem die Anzahl der Primdivisoren von $\frac{x}{p_\lambda}$ gerade oder ungerade ist. Ist $\varkappa = 0$, so hat dieser Coëfficient den Werth 0, wenn $\frac{x}{p_\lambda}$ auch nur einen Primfactor in einer anderen als der zweiten Potenz enthält, und ist gleich $(-1)^{\tilde{\omega}\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)}$, falls $\frac{x}{p_\lambda}$ das Quadrat eines Productes von verschiedenen Primzahlen ist. Da offenbar die Function $\mu\left(\sqrt{\frac{x}{p_\lambda}}\right)$ dieselben Werthe hat, so kann man für $\varkappa = 0$ die Gleichung 15) auch in folgender Weise schreiben

$$f_3(x) = \sum f(p_\lambda)\,\mu\left(\sqrt{\frac{x}{p_\lambda}}\right),$$

wo die Summation über alle Primfactoren der ganzen complexen Zahl x zu erstrecken ist.

Man hat demnach die Formeln

$$\sum_{x=(n)} \sum \left(\frac{n}{N(x)}\right) F_2(x) = F(n) \qquad \ldots 16)$$

$$\sum_{x=(n)} \sum \left(\frac{n}{N(x)}\right) F_2^{(0)}(x) = \Theta(n) \qquad \ldots 17)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(x)}}\right) F_3(x) = F(n) \qquad \ldots 18)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(x)}}\right) F_3^{(n)}(x) = \Theta(n), \qquad \ldots 19)$$

wo

$$F_2(x) = \sum_\lambda f(p_\lambda)\,\beta_\varkappa\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)$$

$$F_2^{(0)}(x) = \sum_\lambda \beta_\varkappa\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)$$

ist, wenn die Summation bezüglich λ über alle (wirklichen und idealen) Primfactoren der ganzen complexen Zahl x zu erstrecken ist, $F_3(m)$ den Überschuss der Summe jener Werthe vorstellt, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle (wirklichen und idealen) Primtheiler der ganzen complexen Zahl m durchläuft, deren complementärer Divisor das Quadrat eines Productes einer geraden Anzahl (Null eingeschlossen) von verschiedenen Primzahlen ist, über die Summe derjenigen Werthe, welche diese Function erhält, wenn für x die übrigen Primfactoren von m gesetzt werden, deren complementärer Divisor die zweite Potenz einer durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren ganzen complexen Zahl ist, und $F_3^{(0)}(m)$ die Differenz aus der Anzahl der zuerst erwähnten Primfactoren von m und der Anzahl der zuletzt genannten ist.

Es ist leicht, die über alle Theiler d_2 der ganzen complexen Zahl x, deren complementärer Divisor ein Quadrat ist, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_2} F_3(d_2), \text{ beziehungsweise } \sum_{d_2} F_3^{(0)}(d_2)$$

zu bestimmen. Führt man nämlich für $F_3(d_2)$, beziehungsweise $F_3^{(0)}(d_2)$ den eben ermittelten Werth ein und ordnet nach den Functionen $f(p_\lambda)$, so ergibt sich als Coëfficient von $f(p_\lambda)$ die über alle durch die Primzahl p_λ theilbaren Divisoren d_2 zu erstreckende Summe $\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{d_2}{p_\lambda}}\right)$, welche auch in folgender Form geschrieben werden kann

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r} \mu(p_1^{\varkappa_1})\mu(p_2^{\varkappa_2})\ldots\mu(p_r^{\varkappa_r}),$$

wo selbstverständlich $\varkappa_\tau$ nur die Werthe 0 und 1 haben kann. Da nun aber, falls eine der Grössen $\varkappa_\tau$ den Werth 1 besitzt, die zu dem betreffenden τ gehörige Summe den Werth $1+\mu(p_\lambda)$, d. i. 0 erhält, da ferner nur dann, wenn $\alpha_\tau = 0$ $(\tau \gtrless \lambda)$ $\alpha_\lambda = 1$ ist, sämmtliche Grössen $\varkappa_\tau$ gleich 0 sind, so ist

$$\sum_{d_2} F_3(d_2) = f(x)$$

$$\sum_{d_2} F_3^{(0)}(d_2) = 1,$$

wenn x eine Primzahl ist, und

$$\sum_{d_2} F_3(d_2) = 0$$

$$\sum_{d_2} F_3^{(0)}(d_2) = 0$$

in allen anderen Fällen.

Nun ist

$$\sum_{x=(\sqrt{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^2)}\right) = \sum_{x,\,y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^2 y)}\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \rho_2(x) = P_2(n),$$

wo $\rho_2(x)$ die Anzahl der quadratischen Theiler der ganzen complexen Zahl x vorstellt. Schreibt man in dieser Gleichung für n $\frac{n}{N(y)}$, multiplicirt sodann mit $F_3(y)$, beziehungsweise $F_3^{(0)}(y)$ und summirt bezüglich y über alle dem Gebiete (n) angehörigen Zahlen, so erhält man die Relationen

$$\sum_{y=(n)} P_2\left(\frac{n}{N(y)}\right) F_3(y) = \sum_{x,\,y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^2 y)}\right) F_3(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d_2} F_3(d_2)\right)$$

$$\sum_{y=(n)} P_2\left(\frac{n}{N(y)}\right) F_3^{(0)}(y) = \sum_{x,\,y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^2 y)}\right) F_3^{(0)}(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d_2} F_3^{(0)}(d_2)\right),$$

oder nach den eben aufgestellten Formeln

$$\sum_{y=(n)} P_2\left(\frac{n}{N(y)}\right) F_2(y) = \sum_{p=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p)}\right) f(p) \qquad \ldots 20)$$

$$\sum_{y=(n)} P_2\left(\frac{n}{N(y)}\right) F_2^{(0)}(y) = \sum_{p=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p)}\right), \qquad \ldots 21)$$

wo die Summen auf den rechten Seiten über alle Primzahlen des Gebietes (n) auszudehnen sind.

Um eine neue Formel dieser Kategorie zu erhalten, betrachte ich die über alle Divisoren d_2 der ganzen complexen Zahl x mit quadratischem complementärem Divisor ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_2} \lambda(d_2) f_1(d_2)\, \mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right),$$

wo $f_1(x)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche die willkürliche Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Primtheiler der ganzen complexen Zahl x durchläuft. Diese Summe lässt sich in folgender Form schreiben

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r} \lambda(p_1^{\varkappa_1})\lambda(p_2^{\varkappa_2})\ldots\lambda(p_r^{\varkappa_r}) f_1(p_1^{\varkappa_1} p_2^{\varkappa_2}\ldots p_r^{\varkappa_r})\, \mu(\sqrt{p_1^{\alpha_1-\varkappa_1}})\,.$$
$$.\,\mu(\sqrt{p_2^{\alpha_2-\varkappa_2}})\ldots\mu\left(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}\right),$$

wo die ganzen Zahlen $\varkappa_\tau (\tau = 1, 2, \ldots, r)$ nur die Werthe α_τ, $\alpha_\tau - 2$ besitzen können. Ist zunächst eine der Zahlen $\alpha_\tau > 2$, so wird diese Summe wegen der Relation

$$\lambda(p_\tau^{\alpha_\tau}) = -\mu(p_\tau)\lambda(p_\tau^{\alpha_\tau-2})$$

gleich Null. Ist eine der Grössen α_τ, z. B. α_1 gleich 2, während alle anderen den Werth 1 besitzen, so ist die erwähnte Summe die Differenz der zwei Ausdrücke

$$\lambda(p_1^2)\lambda(p_2)\ldots\lambda(p_r) f_1(p_1 p_2 \ldots p_r), \qquad \mu(p_1)\lambda(p_2)\ldots\lambda(p_r) f(p_2\ldots p_r)$$

und daher gleich $(-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} f(p_1)$, sind aber mindestens zwei der Grössen α_τ, z. B. α_1 und α_2 gleich 2, so hat dieselbe die Form

$$\sum_{\varkappa_3, \ldots, \varkappa_r} \lambda(p_3^{\varkappa_3}) \ldots \lambda(p_r^{\varkappa_r}) f_1(p_1 p_2 \ldots p_r)\, \mu(\sqrt{p_3^{\alpha_3-\varkappa_3}})\, \mu(\sqrt{p_4^{\alpha_4-\varkappa_4}}) \ldots \mu(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}) -$$

$$-\sum_{\varkappa_3, \ldots, \varkappa_r} \lambda(p_3^{\varkappa_3}) \ldots \lambda(p_r^{\varkappa_r}) f_1(p_2 p_3 \ldots p_r)\, \mu(\sqrt{p_3^{\alpha_3-\varkappa_3}})\, \mu(\sqrt{p_4^{\alpha_4-\varkappa_4}}) \ldots \mu(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}) -$$

$$-\sum_{\varkappa_3, \ldots, \varkappa_r} \lambda(p_3^{\varkappa_3}) \ldots \lambda(p_r^{\varkappa_r}) f_1(p_1 p_3 \ldots p_r)\, \mu(\sqrt{p_3^{\alpha_3-\varkappa_3}})\, \mu(\sqrt{p_4^{\alpha_4-\varkappa_4}}) \ldots \mu(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}) +$$

$$+\sum_{\varkappa_3, \ldots, \varkappa_r} \lambda(p_3^{\varkappa_3}) \ldots \lambda(p_r^{\varkappa_r}) f_1(p_3 \ldots p_r)\, \mu(\sqrt{p_3^{\alpha_3-\varkappa_3}})\, \mu(\sqrt{p_4^{\alpha_4-\varkappa_4}}) \ldots \mu(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}),$$

welche unmittelbar zeigt, dass dieselbe in diesem Falle gleich Null ist. Da endlich, falls alle Zahlen α_τ den Werth 1 haben, sich die ganze Summe auf das einzige Glied $(-1)^{\bar{\omega}(x)} \sum_{\lambda} f(p_\lambda)$ reducirt, so sieht man, dass

$$-\sum_{d_2} \lambda(d_2) f_1(d_2)\, \mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right) = \alpha(x) \qquad \ldots 22)$$

ist. Nun ist

$$\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right) = \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r} \mu(\sqrt{p_1^{\alpha_1-\varkappa_1}})\, \mu(\sqrt{p_2^{\alpha_2-\varkappa_2}}) \ldots \mu(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}) \qquad (\varkappa_\tau = \alpha_\tau,\ \alpha_\tau - 2)$$

$$= \sum_{\varkappa_1} \mu(\sqrt{p_1^{\alpha_1-\varkappa_2}}) \sum_{\varkappa_2} \mu(\sqrt{p_2^{\alpha_2-\varkappa_2}}) \quad \sum_{\varkappa_r} \mu(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}})$$

und demnach stets gleich 0, wenn auch nur einer der Exponenten $\alpha_\tau \geqq 2$ ist, und gleich 1, falls x durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist. Nach dieser Bemerkung ist

$$\sum_{x=(\sqrt{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^2)}\right)\mu(x) = \sum_{x,\,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x^2 y)}\right)\mu(x)$$
$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d_2}\mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right)\right)$$
$$= \mathfrak{Q}_2(n),$$

wo $\mathfrak{Q}_2(n)$ die Anzahl der durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren Zahlen des Gebietes (n) ist. Man hat daher nach dem aufgestellten allgemeinen Theoreme die Formeln

$$-\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_2\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)f_1(x) = F(n) \qquad \ldots 23)$$

$$-\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_2\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)\tilde{\omega}(x) = \Theta(n). \qquad \ldots 24)$$

Eine weitere Formel dieser Gruppe erhält man durch die Betrachtung der Summen

$$\sum_d \varphi\left(\frac{x}{d}\right)N(d)F_3(d), \quad \sum_d \varphi\left(\frac{x}{d}\right)N(d)F_3^{(0)}(d), \qquad \ldots 25)$$

wo $\varphi(x)$ die Anzahl aller Glieder des Gebietes (n), deren Norm kleiner als $N(x)$ ist, und welche zu x theilerfremd sind, und $F_3(y)$ die Differenz aus der Summe jener Werthe vorstellt, welche die Function $\frac{f(x)}{x}$ annimmt, wenn ihr Argument alle Primtheiler von y durchläuft, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, und der Summe jener Werthe, welche diese Function erhält, wenn für x die übrigen Primfactoren von y mit durch kein Quadrat (ausser 1) theilbarem complementärem Divisor gesetzt werden, $F_3^{(0)}(y)$ aber die Differenz aus der Summe der reciproken Werthe der zuerst genannten Primtheiler von y und der

Summe der reciproken Werthe der zuletzt genannten vorstellt, so dass also, wie man leicht erkennt,

$$\varphi(x) = \sum_d N(d)\mu\left(\frac{x}{d}\right), \qquad \varphi(1) = 1$$

$$F_3(x) = \sum_\lambda \frac{f(p_\lambda)}{N(p_\lambda)}\mu\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)$$

$$F_3^{(0)}(x) = \sum_\lambda \mu\left(\frac{x}{p_\lambda}\right)\frac{1}{N(p_\lambda)}$$

ist. Aus der ersten von diesen Gleichungen folgt bekanntlich

$$\sum_d \varphi(d) = N(d)$$

und daher ist

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varphi(x) = \sum_{x,\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\varphi(x) \qquad \ldots 25\, a)$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_d \varphi(d)\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} N(x) = D(n).$$

Setzt man in die Summen 25) ferner den Werth von $F_3(d)$, beziehungsweise $F_3^{(0)}(d)$ ein, so erhält man für den Coëfficienten von $f(p_\lambda)$ in denselben den Ausdruck

$$\sum_d \varphi\left(\frac{x}{d}\right)\mu\left(\frac{d}{p_\lambda}\right)\cdot\frac{1}{N(p_\lambda)},$$

welche sich, da offenbar der Definition nach für jedes theilerfremde Werthepaar x, y

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

ist, auch in folgender Weise schreiben lässt

$$\frac{1}{N(x)} \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2,} \varphi(p_1^{\alpha_1-\varkappa_1}) \varphi(p_2^{\alpha_2-\varkappa_2}) \ldots \varphi\left(p_{\lambda-1}^{\alpha_{\lambda-1}-\varkappa_{\lambda-1}}\right) \varphi\left(p_\lambda^{\alpha_\lambda-\varkappa_\lambda-1}\right).$$

$$.\varphi\left(p_{\lambda+1}^{\alpha_{\lambda+1}-\varkappa_{\lambda+1}}\right) \ldots \varphi\left(p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}\right) N(p_1^{\varkappa_1}) N(p_2^{\varkappa_2}) \ldots$$

$$\ldots N(p_r^{\varkappa_r}) \mu(p_1^{\varkappa_1}) \mu(p_2^{\varkappa_2}) \ldots \mu(p_r^{\varkappa_r}),$$

wo die ganzen Zahlen $\varkappa_\tau$ nur die Werthe 0, 1 haben können. Der auf $\varkappa_\tau$ bezügliche Theil dieser r-fachen Summe ist nun aber

$$N(p_\tau^{\alpha_\tau})\{N(p_\tau)-1\}\{1+\mu(p_\tau)\} \qquad (\tau \gtrless \lambda),$$

beziehungsweise

$$N(p_\lambda^{\alpha_\lambda-1})\{N(p_\lambda)-1\}\{1+\mu(p_\lambda)\},$$

falls $\alpha_\tau(\tau \gtrless \lambda)$ grösser als 1, beziehungsweise $\alpha_\lambda > 2$ ist und demnach ist die Summe stets gleich Null, wenn $\frac{x}{p_\lambda}$ auch nur einen Primfactor in einer höheren als der ersten Potenz enthält. Erfüllt nun aber α_τ, beziehungsweise α_λ die eben erwähnte Bedingung, so ist der zugehörige Theil der Summe $-\frac{1}{N(x)}$, beziehungsweise für $\alpha_\lambda = 1$ $\frac{+1}{N(x)}$, und daher ist

$$\sum_d \varphi\left(\frac{x}{d}\right) F_3(d) N(d) = \frac{\alpha(x)}{N(x)}$$

$$\sum_d \varphi\left(\frac{x}{d}\right) F_3^{(0)}(d) N(d) = \frac{\alpha_0(x)}{N(x)}$$

Nach dem angeführten allgemeinen Theoreme ist demnach:

$$\sum_{x=(n)} D\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x) F_3(x) = F(n) \qquad \ldots 26)$$

$$\sum_{x=(n)} D\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x) F_3^{(0)}(x) = \Theta(n). \qquad \ldots 27)$$

II. Formeln der zweiten Gruppe.

Die Methode, welche zur Aufstellung dieser Formeln dient, ist im Wesentlichen nichts Anderes als eine sogenannte Aussiebung, durch welche schon Eratosthenes die reellen Primzahlen aus der Reihe aller reellen ganzen Zahlen ausgeschieden hat (Sieb des Eratosthenes).

Es mögen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ irgendwelche Primzahlen des Gebietes (n), $p'_1, p'_2, \ldots, p'_s$ sämmtliche Primzahlen des Complexes $(\sqrt{n})$ sein und es soll mit

$$\left(\sum_{x=(n)} f(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_r}$$

die Summe der Werthe bezeichnet werden, welche die willkürliche Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle ganzen complexen Zahlen von (n) durchläuft, welche nur aus 1 und den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ zusammengesetzt sind.

Nimmt man von den Zahlen des Gebietes (n) jene weg, welche durch die ρte Potenz der complexen Primzahl p_1 theilbar sind, und deren Anzahl, wie man sofort sieht, gleich $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p_1^\rho)}\right)$ ist, so verbleiben $\mathfrak{A}(n) - \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p_1^\rho)}\right)$ ganze complexe Zahlen. Unter diesen sind ersichtlich $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p_2^\rho)}\right) - \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p_1 p_2)^\rho}\right)$ durch die $r$te Potenz von p_2 theilbar und demnach gibt es in dem ganzen Gebiete

$$\mathfrak{A}(n) - \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p_1)^\rho}\right) - \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p_2)^\rho}\right) + \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p_1 p_2)^\rho}\right)$$

weder durch die $r$te Potenz von p_1, noch durch die $r$te Potenz von p_2 theilbare Zahlen. Die wiederholte Anwendung dieser Schlussweise zeigt, dass in dem Zahlencomplexe (n)

$$\left(\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_r}$$

ganze Zahlen vorhanden sind, welche weder durch p_r^ρ, noch durch $p_2^\rho, \ldots$, noch endlich durch p_r^ρ theilbar sind. Diese Zahlen bestehen aber einerseits aus denjenigen ganzen Zahlen, welche überhaupt durch keine ρ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und denjenigen, welche durch ein Product von ρ^{ten} und höheren Potenzen der übrigen Primzahlen des Complexes (n) getheilt werden können. Da nun offenbar jeder durch keine höhere als die $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl p theilbaren Zahl des Gebietes (n) eine dem Complex $\left(\frac{n}{p^\lambda}\right)$ angehörige, nur durch $p^{\varkappa-\lambda}$ theilbare ganze Zahl entspricht, so erhält man sofort die Relation

$$\left(\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p)^\rho}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_r} = \mathfrak{Q}_\rho(n) + \sum_P \mathfrak{Q}_\rho\left(\frac{n}{P}\right), \quad \ldots 28)$$

wo $\mathfrak{Q}_\rho(n)$ die Anzahl der durch keine ρ^{te} Potenz (ausser 1) theilbaren Individuen von (n) ist und die Summation bezüglich P über alle Zahlen von (n) auszudehnen ist, welche aus den von $p_1, p_2, \ldots, p_r$ verschiedenen Primzahlen des Gebietes (n) gebildet werden können.

Specielle Fälle dieser Relation sind die folgenden:

$$\left(\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)^\rho}\right)\mu(x)\right)_{p'_1, p'_2, \ldots, p'_s} = \mathfrak{Q}_\rho(n) + \sum_{P'} \mathfrak{Q}_\rho\left(\frac{n}{P'}\right) \ldots 29)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\mu(x) = E(n) \qquad \ldots 30)$$

$$\left(\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_r} = P(n; p_1, p_2, \ldots, p_r) \ldots 31)$$

$$\left(\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x)\right)_{p'_1, p'_2, \ldots, p'_s} = A(n; \sqrt{n}) \qquad \ldots 32)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x) = E(n), \qquad \ldots 33)$$

wo die Summation bezüglich P' über die $A(n; \sqrt{n})$ Primzahlen des Gebietes (n), deren Norm grösser als $\sqrt{n}$ ist, auszudehnen ist, $P(n; p_1, p_2, \ldots, p_r)$ die Anzahl jener Zahlen dieses Gebietes vorstellt, welche nur aus den von $p_1, p_2, \ldots, p_r$ verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind, und $E(n)$ die Anzahl der zum

Gebiete gehörigen Einheiten ist. Wenn man in den Complex nur alle primären complexen Zahlen der in Betracht gezogenen Gattung aufnimmt, so ist $E(n)$ selbstverständlich gleich 1.

Mit Hilfe der eben angewandten Betrachtungsweise zeigt man leicht, dass

$$\left(\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{N(x)^\rho}}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_r}$$

die Anzahl derjenigen ρ^{ten} Potenzen des Gebietes (n) ist, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ theilerfremd sind. Da nun offenbar jeder ρ^{ten} Potenz in (n) eine aus denselben Primfactoren zusammengesetzte ganze complexe Zahl in $(\sqrt[\rho]{n})$ entspricht, so ist der eben erwähnte Ausdruck auch gleich der Anzahl der im Gebiete $(\sqrt[\rho]{n})$ befindlichen, aus den von $p_1, p_2, \ldots, p_r$ verschiedenen Primzahlen des Complexes (n) gebildeten ganzen Zahlen gleich, und daher hat man die Relationen

$$\left(\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{N(x)^\rho}}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_r} = P(\sqrt[\rho]{n}; p_1, p_2, \ldots, p_r) \quad \ldots 34)$$

$$\left(\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{N(x)^\rho}}\right)\mu(x)\right)_{p'_1, p'_2, \ldots, p'_s} = A(\sqrt[\rho]{n};\ \sqrt[2\rho]{n}) \quad \ldots 35)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{N(x)^\rho}}\right)\mu(x) = E(n). \quad \ldots 36)$$

Die speciellen Fälle $\rho = 2$ dieser Formeln ergeben sich auch aus der Gleichung 15 a). Schreibt man in derselben nämlich für n $\frac{n}{N(x)^2}$, multiplicirt mit $\mu(y)$ und summirt bezüglich y über das ganze Gebiet $\sqrt{n}$, so erhält man die Gleichung:

$$\sum_{y=(\sqrt{n})} \sum_{\varkappa} \left(\frac{n}{N(y)^2}\right)\mu(y) = \sum_{x,\, y=(\sqrt{n})} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy)^2}\right)\lambda(x)N(x)^\varkappa \mu(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d_2} \lambda(d_2)N(d_2^\varkappa)\mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right)\right).$$

Nun ist

$$\sum_{d_2}\lambda(d_2)N(d_2^{\varkappa})\mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right)=\sum_{\varkappa_1,\,\varkappa_2,\ldots,\,\varkappa_r}\lambda(p_1^{\varkappa_1})\lambda(p_2^{\varkappa_2})\ldots\lambda(p_r^{\varkappa_r})N(p_1^{\varkappa\varkappa_1})N(p_2^{\varkappa\varkappa_2})\ldots$$
$$N(p_r^{\varkappa\varkappa_r})\mu(\sqrt{p_1^{\alpha_1-\varkappa_1}})\mu(\sqrt{p_2^{\alpha_2-\varkappa_2}})\ldots\mu(\sqrt{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}),$$

wo $\varkappa_\tau(\tau=1,2,\ldots,r)$ nur die Werthe α_τ, $\alpha_\tau-2$ haben kann. Ist zunächst $\varkappa>0$, so ist der auf $\varkappa_\tau$ bezügliche Theil der Summe, wie man sofort sieht, für $\alpha_\tau>1$

$$(-1)^{\alpha_\tau}N(p_\tau^{\alpha_\tau\varkappa})\left\{1-\frac{1}{N(p_\tau)^{2\varkappa}}\right\},$$

hingegen $(-1)^{\alpha_\tau}N(p_\tau^{\alpha_\tau})$ für $\alpha_\tau=1$ und daher ist

$$\sum_{d_2}\lambda(d_2)N(d_2^{\varkappa})\mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right)=(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r}N(x)^{\varkappa}\prod_{\tau=1}^{r}{}'\left\{1-\frac{1}{N(p_r^{2\varkappa})}\right\}\qquad\varkappa\geqq 0$$
$$=\chi(x),$$

wo die Marke am Productzeichen anzeigt, dass jene Primzahlen wegzulassen sind, welche in x nur in der ersten Potenz auftreten. Ist speciell $\varkappa=0$, so ist die erwähnte Summe stets Null, wenn auch nur eine der Zahlen $\varkappa_\tau$ den Werth $\alpha_\tau-2$ erhalten kann. Da dieses aber stets eintreten muss, wenn eine der Zahlen $\alpha_\tau>1$ ist, so erkennt man leicht, dass

$$\sum_{d_2}\lambda(d_2)\mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right)=\mu(x)$$

ist. Man hat daher die Relation

$$\sum_{y=(\sqrt{n})} \sum_{\chi} \left(\frac{n}{N(y^2)}\right) \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \chi(x) \quad \ldots 37)$$

und speciell

$$\sum_{y=(\sqrt{n})} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(y^2)}}\right) \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu(x)$$

oder nach 33)

$$\sum_{y=(\sqrt{n})} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(y^2)}}\right) \mu(y) = E(n), \qquad \ldots 38)$$

aus welcher Relation die den Gleichungen 34) und 35) entsprechenden Formeln hergeleitet werden können.

Schreibt man ferner in der Gleichung 12 a) für n: $\frac{n}{N(y^s)}$, multiplicirt sodann mit $N(y^{s\varkappa})\mu(y)$ und summirt in Bezug auf y über den ganzen Complex $\sqrt[s]{n}$, so erhält man

$$\sum_{y=(\sqrt[s]{n})} \Psi_\varkappa\left(\frac{n}{N(y^s)}\right) N(y^{s\varkappa})\, \mu(y) = \sum_{x,\, y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy^s)}\right) N(xy^s)^\varkappa \mu(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x^\varkappa)\left(\sum_{d_s} \mu\left(\sqrt[s]{\frac{x}{d_s}}\right)\right),$$

wo die Summation bezüglich d_s über alle Theiler von x zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine $s$te Potenz ist. Nun ist aber, wie man sofort erkennt,

$$\sum_{d_s} \mu\left(\sqrt[s]{\frac{x}{d_s}}\right) = \mu_s(x)$$

stets gleich Null, wenn x durch eine $s$te Potenz (ausser 1) theilbar ist, und hat den Werth 1 in allen anderen Fällen und demnach ist

$$\sum_{y=(\sqrt[s]{n})} \Psi_\varkappa\left(\frac{n}{N(y^s)}\right) N(y^{s\varkappa})\mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x^\varkappa)\, \mu_s(x) \ldots 39)$$

$$= K(n)$$

und speciell

$$\sum_{y=(n)} \Psi_{\varkappa}\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa})\mu(y) = \mathfrak{A}(n). \qquad \ldots 40)$$

Wird in der Gleichung 25 a) n durch $\frac{n}{N(y^s)}$ ersetzt, sodann mit $N(y^s)\mu(y)$ multiplicirt und bezüglich y über alle Individuen des Zahlengebietes $(\sqrt[s]{n})$ summirt, so entsteht die Beziehung:

$$\sum_{y=(\sqrt[s]{n})} D\left(\frac{n}{N(y^s)}\right) N(y^s)\mu(y) = \sum_{x,\, y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy^s)}\right) \varphi(x) N(y^s)\mu(y)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x) \left(\sum_{d_s} \frac{\varphi(d_s)}{N(d_s)} \mu\left(\sqrt[s]{\frac{x}{d_s}}\right)\right)$$

Nun ist

$$\sum_{d} \frac{\varphi(d_s)}{N(d_s)} \mu\left(\sqrt[s]{\frac{x}{d_s}}\right) = \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r} \frac{\varphi(p_1^{\varkappa_1})}{N(p_1^{\varkappa_1})} \frac{\varphi(p_2^{\varkappa_2})}{N(p_2^{\varkappa_2})} \quad \frac{\varphi(p_r^{\varkappa_r})}{N(p_r^{\varkappa_r})} \mu(\sqrt[s]{p_1^{\alpha_1-\varkappa_1}})\mu(\sqrt[s]{p_2^{\alpha_2-\varkappa_2}})\ldots\mu(\sqrt[s]{p_r^{\alpha_r-\varkappa_r}}),$$

wo $\varkappa_\tau (\tau = 1, 2, \ldots, r)$ nur die Werthe α_τ und $\alpha_\tau - s$ besitzen kann. Da nun der auf α_τ bezügliche Theil der Summe der Werth 0, $-\frac{1}{N(p_\tau)}$, $1-\frac{1}{N(p_\tau)}$ besitzt, je nachdem $\alpha_\tau > s$, $= s$ oder $< s$ ist, so ist

$$\sum_{d_s} \frac{\varphi(d_s)}{N(d_s)}\, \mu\left(\sqrt[s]{\frac{x}{d_s}}\right) = \frac{(-1)^{\varkappa}\, \mu_{s+1}(x)}{\prod\limits_{\lambda=1}^{r}{}' N(p_\lambda)} \prod_{\lambda=1}^{r}{}'' \left(1-\frac{1}{N(p_\lambda)}\right) = \chi'(x),$$

wo die einfache Marke am Productzeichen anzeigt, dass nur jene $\varkappa$ Primzahlen p_λ zu nehmen sind, welche in x in der s^{ten} Potenz auftreten, die doppelte aber bedeutet, dass jene Werthe von λ zuzulassen sind, für welche p_λ in x in einer niedrigeren als der s^{ten} Potenz erscheint. Ist speciell $s=1$, so erhält man

$$\sum_{d} \frac{\varphi(d)}{N(d)}\, \mu\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{\mu(x)}{N(x)}.$$

Es ergeben sich demnach die Gleichungen:

$$\sum_{y=(\sqrt[s]{n})} D\left(\frac{n}{N(y^s)}\right) N(y^s)\, \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)\, \chi'(x) = K'(n). \qquad \ldots 41)$$

$$\sum_{y=(n)} D\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y)\, \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu(x) \qquad \ldots 42)$$

$$= E(n).$$

Schreibt man endlich in der Gleichung $15a$) für n: $\frac{n}{N(y)}$, multiplicirt mit $N(y)^{\varkappa}\mu(y)$ und summirt über das ganze Gebiet (n), so ergibt sich die Relation

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d} \lambda\left(\frac{x}{d}\right) N(d)^{\varkappa}\mu(d)\right)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)\left(\sum_{d} N(d)^{\varkappa}\mu^{2}(d)\right)$$

oder, wenn die Summe der Normen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen aller durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren Divisoren von x mit $\zeta_{2,\varkappa}(x)$ bezeichnet wird:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(y)}}\right) N(y)^{\varkappa}\mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)\zeta_{2,\varkappa}(x) = Z_{2,\varkappa}(n). \qquad \ldots 43)$$

Ist speciell $\varkappa = 0$, so wird $\zeta_{2,0}(x)$, wie man leicht zeigt, gleich $2^{\tilde{\omega}(x)}$ und daher hat man die specielle Formel:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(y)}}\right)\mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)\,2^{\tilde{\omega}(x)}$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe lässt sich in folgender Form darstellen

$$\sum_{x,\, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\lambda(x)\,2^{\tilde{\omega}(x)} = \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d} \lambda(d)\,2^{\tilde{\omega}(d)}\right),$$

oder weil der auf die Primzahl p_{τ} bezügliche Theil der Summe

$$\sum_{d} \lambda(d) 2^{\tilde{\omega}(d)} = \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r} \lambda(p_1^{\varkappa_1}) \lambda(p_2^{\varkappa_2}) \ldots \lambda(p_r^{\varkappa_r}) 2^{\tilde{\omega}(p_2^{\varkappa_1})} 2^{\tilde{\omega}(p_2^{\varkappa_2})} \ldots 2^{\tilde{\omega}(p_r^{\varkappa_r})} \qquad (0 \leqq \varkappa_\tau \leqq \alpha_\tau)$$

den Werth

$$1 + 2(\lambda(p_\tau) + \lambda(p_\tau^2) + \ldots + \lambda(p_\tau^{\alpha_\tau})) = \lambda(p_\tau^{\alpha_\tau})$$

hat,

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) 2^{\tilde{\omega}(x)} \lambda(x) = \sum_{x=(n)} \lambda(x) = \Lambda(n),$$

und demnach kann die letzte Gleichung auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(y)}}\right) \mu(y) = \Lambda(n). \qquad \ldots 44)$$

Aus den Gleichungen 39) bis 44) und den leicht zu erhärtenden Relationen

$$\sum_{x=(n)} F\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa}) \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) F_1(x) = \overline{F}_1(n)$$

$$\sum_{x=(u)} \Theta\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa}) \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) F_1^{(0)}(x) = \overline{F}_1^{(0)}(n)$$

$$\sum_{x=(n)} F\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa}) \lambda(y) \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) F_2(x) = \overline{F}_2(n)$$

$$\sum_{x=(n)} \Theta\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa}) \lambda(y) \mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) F_2^{(0)}(x) = \overline{F}_2^{(0)}(n)$$

ergeben sich die folgenden Formeln der zweiten Gruppe:

$$\left(\sum_{y=(\sqrt[s]{n})} \Psi_{\varkappa}\left(\frac{n}{N(y^{s})}\right) N(y^{s\varkappa})\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = K(n)+\sum_{P} K\left(\frac{n}{N(P)}\right) N(P^{s\varkappa})$$

$$\left(\sum_{y=(n)} \Psi_{\varkappa}\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa})\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = \mathfrak{A}(n)+\sum_{P} N(P^{\varkappa})\,\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(P)}\right)$$

$$\left(\sum_{y=(\sqrt[s]{n})} D\left(\frac{n}{N(y^{s})}\right) N(y^{s})\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = K'(n)+\sum_{P} N(P^{s})\,K'\left(\frac{n}{N(P)}\right)$$

$$\left(\sum_{y=(n)} D\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y)\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = P(n;\; p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r)$$

$$\left(\sum_{y=(n)} D\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y)\,\mu(y)\right)_{p'_1,\,p'_2,\,\ldots,\,p'_s} = A(n;\,\sqrt{n})$$

$$\left(\sum_{y=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(y)}}\right) N(y^{\varkappa})\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = Z_{2,\,\varkappa}(n)+\sum_{P} N(P^{\varkappa})\,Z_{2,\,\varkappa}\left(\frac{n}{N(P)}\right)$$

$$\left(\sum_{y=(n)} \mathfrak{A}\left(\sqrt{\frac{n}{N(y)}}\right) \mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r}, = \Lambda(n)+\sum_{P} \Lambda\left(\frac{n}{N(P)}\right)$$

$$\left(\sum_{y=(n)} F\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa})\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = \bar{F}_1(n) + \sum_{P} N(P)^{\varkappa} \bar{F}_1\left(\frac{n}{N(P)}\right)$$

$$\left(\sum_{y=(n)} \Theta\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa})\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = \bar{F}_1^{(0)}(n) + \sum_{P} N(P)^{\varkappa} \bar{F}_1^{(0)}\left(\frac{n}{N(P)}\right)$$

$$\left(\sum_{y=(n)} F\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa})\,\lambda(y)\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = \bar{F}_2(n) + \sum_{P} N(P^{\varkappa}) \bar{F}_2\left(\frac{n}{N(P)}\right)$$

$$\left(\sum_{y=(n)} \Theta\left(\frac{n}{N(y)}\right) N(y^{\varkappa})\,\lambda(y)\,\mu(y)\right)_{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} = \bar{F}_2^{(0)}(n) + \sum_{P} N(P)^{\varkappa} \bar{F}_2^{(0)}\left(\frac{n}{N(P)}\right).$$

3. Sätze über die Primfactoren der reellen und der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen.

α) Es möge $\Theta_{\tau}^{(p)}(s)$ die Summe der τten Potenzen der reellen Primzahlen p von vorgeschriebener Beschaffenheit, welche nicht grösser als die reelle Zahl s sind, $H^{(r)}_{p,\,m,\,\tau}(n)$ die Summe der τten Potenzen derjenigen Primdivisoren p der ganzen reellen Zahl n vorstellen, welche die reelle Zahl m nicht überschreiten und deren complementärer Divisor eine $r$te Potenz ist. Berücksichtigt man, dass die Differenz $\left[\frac{n}{x^r}\right] - \left[\frac{n-1}{x^r}\right]$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem x^r ein Theiler von n ist oder nicht, so erhält man einerseits die Relation

$$H^{(1)}_{p,\,m,\,\tau}(n) = \sum_{p \leqq m} \left\{\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n-1}{p}\right]\right\} p^{\tau}, \qquad \ldots 45)$$

wo die Summation über alle dem Intervalle $1 \ldots m$ angehörigen Primzahlen p der vorausgesetzten Beschaffenheit auszudehnen ist, andrerseits die Gleichung

$$H^{(r)}_{p,m,\tau}(n) = \sum_{x \geqq \sqrt[r]{\frac{x}{m}}}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left\{ \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right] - \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-1}{x^r}\right]\right)\right\}, \quad \ldots 46)$$

weil offenbar die Differenz in der geschlungenen Klammer gleich p^τ oder 0 ist, je nachdem $\dfrac{n}{x^r}$ eine Primzahl ist oder nicht.

Setzt man in dieser Gleichung $m = \sqrt[r+1]{n}$, so wird dieselbe

$$H^{(r)}_{p,\sqrt[r+1]{n},\tau}(n) = \sum_{x \geqq \sqrt[r+1]{}}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left\{ \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right) - \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-1}{x^r}\right]\right)\right\}$$

Nun kann aber x nur dann den Werth $\sqrt[r+1]{n}$ erhalten, wenn n eine $(r+1)^{\text{te}}$ Potenz ist, und es wird ferner in diesem Falle die zugehörige Differenz in der Summe auf der rechten Seite der Gleichung den Werth p^τ oder 0 haben, je nachdem die $(r+1)^{\text{te}}$ Wurzel aus n eine Primzahl p ist oder nicht. Da nun $[\sqrt[r+1]{n}] - [\sqrt[r+1]{n-1}]$ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem n eine $(r+1)^{\text{te}}$ Potenz ist oder nicht, so besitzt die Differenz $[\sqrt[r+1]{n}]\,\Theta^{(p)}_{\tau}([\sqrt[r+1]{n}]) - [\sqrt[r+1]{n-1}]\,\Theta^{(p)}_{\tau}([\sqrt[r+1]{n-1}])$ den Werth p^τ oder 0, je nachdem $n = p^{r+1}$ ist oder nicht, und daher lässt sich die letzte Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$H^{(r)}_{p,\sqrt[r+1]{n},\tau}(n) = \sum_{x > \sqrt[r+1]{n}}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left\{ \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right) - \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-1}{x^r}\right]\right)\right\} +$$

$$+ [\sqrt[r+1]{n}]\,\Theta^{(p)}_{\tau}([\sqrt[r+1]{n}]) - [\sqrt[r+1]{n-1}]\,\Theta^{(p)}_{\tau}([\sqrt[r+1]{n-1}]).$$

Schreibt man in den Gleichungen 45) und 46) für n der Reihe nach $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$ und berücksichtigt, dass der Relation

$$H^{(r)}_{p,m,\tau}(n-\varkappa) = \sum_{x \geqq \sqrt[r]{\frac{n-\varkappa}{m}}}^{x=[\sqrt[r]{n-\varkappa}]} \left\{ \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-\varkappa}{x^r}\right]\right) - \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-\varkappa-1}{x^r}\right]\right)\right\} \qquad (\varkappa > 0)$$

eine der beiden folgenden Formen gegeben werden kann,

$$H^{(r)}_{p,m,\tau}(n-\varkappa) = \sum_{x \geqq \sqrt[r]{\frac{n-\varkappa+1}{m}}}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left\{ \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-\varkappa}{x^r}\right]\right) - \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-\varkappa-1}{x^r}\right]\right)\right\} + \Theta^{(p)}_{\tau}(m)$$

$$H^{(r)}_{p,m,\tau}(n-\varkappa) = \sum_{x \geqq \sqrt[r]{\frac{n-\varkappa+1}{m}}}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left\{ \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-\varkappa}{x^r}\right]\right) - \Theta^{(p)}_{\tau}\left(\left[\frac{n-\varkappa-1}{x^r}\right]\right)\right\},$$

je nachdem $\sqrt[r]{\frac{n-\varkappa}{m}}$ eine ganze Zahl ist oder nicht, sowie dass die Anzahl der Werthe von $\varkappa$, für welche der erste Fall eintritt, gleich $\left[\sqrt[r]{\frac{n-1}{m}}\right]$ ist, so erhält man durch Addition der auf diese Weise entstehenden Gleichungen die Relationen:

$$\sum_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{p,m,\tau}(x) = \sum_{p \leqq m} \left[\frac{n}{p}\right] p^{\tau} \qquad \ldots 47)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} H^{(r)}_{p,m,\tau}(x) = \sum_{x \geqq \sqrt[r]{\frac{n}{m}}}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \Theta_{\tau}^{(p)}\left(\left[\frac{n}{x^{r}}\right]\right) + \left[\sqrt[r]{\frac{n-1}{m}}\right] \Theta_{\tau}^{(p)}(m).$$

Aus der letzten von diesen Formeln ergibt sich für $n = m$ die specielle Relation

$$\sum_{x=1}^{x=n} H^{(r)}_{p,n,\tau}(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \Theta_{\tau}^{(p)}\left(\left[\frac{n}{x^{r}}\right]\right),$$

welche in Verbindung mit derselben für die Summe $\overline{H}^{(r)}_{p,m,\tau}(x)$ der $r$ten Potenzen aller oberhalb m befindlichen Primtheiler p der ganzen Zahl x von vorgeschriebener Beschaffenheit, deren complementärer Divisor eine $r$te Potenz ist, die Gleichung

$$\sum_{x=1}^{x=n} \overline{H}^{(r)}_{p,m,\tau}(x) = \sum_{x=1}^{x < \sqrt[r]{\frac{n}{m}}} \Theta_{\tau}^{(p)}\left(\left[\frac{n}{x^{r}}\right]\right) - \left[\sqrt[r]{\frac{n-1}{m}}\right] \Theta_{\tau}^{(p)}(m)$$

liefert.

Stellt beispielsweise p alle Primzahlen vor und ist $m=5$, $n=21$, $\tau=0$, $r=1$, 2, so hat man

$$\sum_{x=1}^{x=21} H^{(1)}_{p,5,0}(x) = 0+1+1+1+1+2+0+1+1+2+0+2+0+1+2+1+0+2+0+2+1 = 21$$

$$\sum_{p\geqq 5}^{p\leqq 21} \left[\frac{21}{p}\right] = 10+7+4 = 21$$

$$\sum_{x=5}^{x=21} \Theta_0^{(p)}\left(\left[\frac{21}{x}\right]\right) = 2+2+2+1+1+1+0+0+\ldots+0 = 9$$

$$\left[\frac{20}{5}\right] \cdot \Theta_0^{(p)}(5) = 4.3 = 12$$

$$\sum_{x=1}^{x=21} H^{(2)}_{p,5,0}(x) = 0+1+1+0+1+0+0+1+0+0+0+1+0+0+0+0+0+1+0+1+0 = 7$$

$$\sum_{x=3}^{x=4} \Theta_0^{(p)}\left(\left[\frac{21}{x^2}\right]\right) = 1+0 = 1$$

$$\left[\sqrt{\frac{20}{5}}\right] \cdot \Theta_0^{(p)}(5) = 2.3 = 6.$$

Die Gleichung 47) lässt sich in folgender Weise schreiben

$$\sum_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{p,\,m,\,\tau}(x) = n \sum_{p \leqq m} p^{\tau-1} - \sum_{p \leqq m} \varepsilon_p p^{\tau} \qquad (0 \leqq \varepsilon_p < 1)$$

und daher erhält man, weil offenbar

$$\sum_{p \leqq m} \varepsilon_p p^{\tau} < \Theta_{\tau}^{(p)}(m)$$

ist, die Beziehungen

$$\sum_{p \leqq m} p^{\tau-1} \geqq \frac{\sum\limits_{x-1}^{x=n} H^{(1)}_{p,\,m,\,\tau}(x)}{n} > \sum_{p \leqq m} p^{\tau-1} - \frac{\Theta_{\tau}^{(p)}(m)}{n}$$

$$\sum_{p \leqq m} p^{\tau-1} \geqq \frac{\sum\limits_{p \geqq \frac{n}{m}}^{x=n} \Theta_{\tau}^{(p)}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) + \left(\left[\frac{n-1}{m}\right]\right) \Theta_{\tau}^{(p)}(m)}{n} > \sum_{p \leqq m} p^{\tau-1} - \frac{\Theta_{\tau}^{(p)}(m)}{n}$$

Ist nun $\tau = 0$ und p eine beliebige Primzahl, so ergibt sich aus diesen Beziehungen, da, wie Herr F. Mertens[1] gezeigt hat,

$$\sum_{p \leqq m} \frac{1}{p} = \log\log m + 0\cdot 26149721828\ldots + \Delta$$

$$\Delta < \frac{4}{\log(m+1)} + \frac{2}{m \log m}$$

ist, die Gleichung

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{p,m,0}(x)}{n} = \log\log m + 0\cdot 26149721828\ldots + \Delta_1,$$

wo

$$\Delta_1 < \frac{4}{\log(m+1)} + \frac{2}{m \log m} + \frac{\Theta_0^{(p)}(m)}{n}$$

ist.

---

[1] „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie." Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 78. Band.

Aus dieser allgemeinen Gleichung ergeben sich die folgenden speciellen

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{p,\,n,\,0}(x)}{n} = \log\log n + 0\cdot 26149721828\ldots + \Delta_1'$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{p,\,\sqrt{n},\,0}}{n} = \log\log n - \log 2 + 0\cdot 26149721828\ldots + \Delta_1''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n+\eta} H^{(1)}_{p,\,n,\,0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n-\eta} H^{(1)}_{p,\,n,\,0}(x)}{2\eta} = \log\log n + 0\cdot 26149721828\ldots + \Delta_1'''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{10^s} H^{(1)}_{p,\,10^s,\,0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} H^{(1)}_{p,\,10^{s-1},\,0}(x)}{9\,.\,10^{s-1}} = \frac{10}{9}\log s + \log\log 10 - \frac{\log(s-1)}{9} + 0\cdot 26149721828\ldots + \Delta_1^{(IV)}$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{p,\,10^{\varkappa},\,0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{p,\,10^{\varkappa-1},\,0}(x)}{n} = \log\frac{\varkappa}{\varkappa-1} + 0\cdot 26149721828\ldots + \Delta_1^{(V)}$$

wo

$$|\Delta_1'| < \frac{4}{\log(n+1)} + \frac{2}{n\log n} + \frac{\Theta_0^{(p)}(n)}{n}$$

$$|\Delta_1''| < \frac{8}{\log n} + \frac{4}{\sqrt{n}\log n} + \frac{\Theta_0^{(p)}(\sqrt{n})}{n}$$

$$2\eta\,|\Delta_1'''| = (n+\eta)\log\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{\eta}{n}\right)}{\log n}\right) - (n-\eta)\log\left(1+\frac{\log\left(1-\frac{n}{\eta}\right)}{\log n}\right) +$$

$$+\varepsilon_1'(n+\eta)\left\{\frac{4}{\log(n+\eta+1)} + \frac{2}{(n+\eta)\log(n+\eta)} + \frac{\Theta_0^{(p)}(n+\eta)}{n+\eta}\right\} -$$

$$-\varepsilon_2'(n-\eta)\left\{\frac{4}{\log(n-\eta+1)} + \frac{2}{(n-\eta)\log(n-\eta)} + \frac{\Theta_0^{(p)}(n-\eta)}{n-\eta}\right\} \qquad (|\varepsilon_1'|<1,\ |\varepsilon_2'|<1)$$

$$9.10^{s-1}\,|\Delta_1^{(\nu)}| = \varepsilon_1'\left\{\frac{4.10^s}{s\log 10} + \frac{2}{s\log 10} + \Theta_0^{(p)}(10^s)\right\} - \varepsilon_2'\left\{\frac{4.10^{s-1}}{(s-1)\log 10} + \frac{2}{(s-1)\log 10} + \Theta_p^{(0)}(10^{s-1})\right\}$$

ist, welche in Verbindung mit der für die Anzahl $\psi(x)$ aller Divisoren einer reellen ganzen Zahl x wiederholt aufgestellten Relation

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}\psi(x)}{n} = \log n + 0\cdot 1544313298. \quad + \frac{\varepsilon_3'}{\sqrt{n}} \qquad (|\varepsilon_3'| < 4)$$

die folgenden Theoreme liefert:

Ist $\lim_{n,\,\eta=\infty}\dfrac{\eta}{n}=0$, $\lim_{n,\,\eta=\infty}\dfrac{n}{\eta\log n}=0$, so hat jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta\ldots n+\eta$ im Mittel $\log\log n+ +0\cdot26149721828$ Primtheiler und $\log n-\log\log n+ +0\cdot89293411152\ldots$ zusammengesetzte Divisoren.

Ist s eine sehr grosse Zahl, so hat jede s-zifferige Zahl im Mittel $\dfrac{10}{9}\log s-\dfrac{\log(s-1)}{9}+\log\log 10+0\cdot26149721828$ Primtheiler und $\left(s+\dfrac{1}{9}\right)\log 10+\dfrac{\log(s-1)}{9}-\dfrac{10}{9}\log s- -\log\log 10-0\cdot1076588848.$ zusammengesetzte Divisoren.

Jede ganze Zahl von mehr als Ziffern hat im Mittel $\log\dfrac{\varkappa}{\varkappa-1}+0\cdot26149721828.$ $\varkappa$-zifferige Primtheiler.

Jede ganze Zahl des Intervalles $\sqrt{n}\ldots n$ hat im Mittel $\log 2$ Primtheiler, welche oberhalb $\sqrt{n}$ liegen.

Aus dem letzten Theoreme schliesst man sofort, dass im Allgemeinen zwischen $\sqrt{n}$ und n Primzahlen enthalten sind.

Es sei ferner p eine Primzahl von der Form $\alpha\varkappa+\beta$, wo $\varkappa$ grösser als 2 ist. Entwickelt man in diesem Falle nach dem Vorgange Dirichlet's für jede zu $\varkappa$ theilerfremde Zahl μ ein System von Indices in Beziehung auf die Zahl $\varkappa=2^{\lambda}p_1^{\mu_1}.p_2^{\mu_2}\ldots p_r^{\mu_r}$ in der Weise, dass für $\lambda<2$ der Modul 2 nicht berücksichtigt wird, während man für $\lambda>2$ denjenigen Exponenten β_μ sucht, für welchen

$$\mu\equiv(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}5^{\beta_\mu}\ (\mathrm{mod.}\ 2^{\lambda})$$

wird, und für jede Potenz eines ungeraden Primfactors von $\varkappa$ den Index γ_μ von μ für irgend eine primitive Congruenzwurzel bestimmt, setzt sodann für jede zu $\varkappa$ theilerfremde Zahl μ

$$c_\mu=\varepsilon^{\frac{\mu-1}{2}}\eta^{\beta_\mu}\omega_1^{\gamma_\mu^{(1)}}\omega_2^{\gamma_\mu^{(1)}}\ldots\omega_r^{\gamma_\mu^{(r)}},$$

wo

$$\varepsilon^2=1,\ \eta^{2^{\nu-2}}=1,\ \omega_\lambda^{p_\lambda^{\mu_\lambda-1}(p_\lambda-1)}=1\qquad(\lambda=1,2,\ldots,r)$$

ist, hingegen für jedes μ, welches mit $\varkappa$ einen Theiler gemein hat

$$c_\mu=0,$$

so ist, wie Herr F. Mertens a. a. O. gezeigt hat,

$$\varphi(\varkappa)\sum_{p\leqq}\frac{1}{p}=\log\log m+0\cdot 26149721828\ldots-\sigma+ \\ +\sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}A(\varepsilon,\eta,\omega_1,\ldots,\omega_r)+\Delta_2,$$

wo

$$a'\equiv\frac{1}{a}\pmod{\varkappa}$$

$$\sum_q\frac{c_q}{q}=A(\varepsilon,\eta,\omega_1,\ldots,\omega_r)$$

$$|\Delta_2|<\frac{2\lambda C\varphi(\varkappa)}{\log(m+1)}$$

und σ die Summe der reciproken Primtheiler von $\varkappa$ ist, die Summation bezüglich q über alle Primzahlen, die auf ε, η, ω_1, ω_2, .., ω_r bezügliche aber über alle Wurzelcombinationen ε, η, $\omega_1,\ldots,\omega_r$ mit einziger Ausnahme derjenigen Verbindung, in welcher alle genannten Grössen den Werth 1 haben, zu erstrecken ist.

Man hat daher die Gleichung

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{\alpha\varkappa+\beta,\,m,\,0}(x)}{n}=\frac{\log\log m}{\varphi(\varkappa)}+\frac{1}{\varphi(\varkappa)}\Big\{0\cdot 26149721828\ldots-\sigma+ \\ +\sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}A(\varepsilon,\eta,\omega_1,\ldots,\omega_r)\Big\}+\Delta_3 \qquad (\varkappa>2),$$

wo

$$|\Delta_3|<\frac{2\lambda C}{\log(m+1)}+\frac{\Theta^{(\alpha\varkappa+\beta)}_{0\,(m)}}{n}$$

ist, in welcher die speciellen Relationen

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{4\alpha+1,\,m,\,0}(x)}{n}=\frac{\log\log m}{2}-0\cdot 2867420562\ldots+\Delta_3$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{4\alpha+3,\,m,\,0}(x)}{n}=\frac{\log\log m}{2}+0\cdot 048239269\ldots+\Delta_3$$

enthalten sind.

Aus diesen allgemeinen Gleichungen ergeben sich die speciellen

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{\alpha x+\beta,\, n,\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log\ n}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)}\left\{0\cdot 26149721828\ldots - \sigma + \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\} + \Delta_3'$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{\alpha x+\beta,\, \sqrt{n},\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log\ n}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)}\left\{0\cdot 26149721828\ldots - \log 2 - \sigma + \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\} + \Delta_3''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n+\eta} H^{(1)}_{\alpha x+\beta,\, n,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n-\eta} H^{(1)}_{\alpha x+\beta,\, n,\, 0}(x)}{2\eta} = \frac{\log\log\ n}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)}\left\{0\cdot 26149721828\ldots - \sigma + \right.$$

$$\left. + \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\} + \Delta_3'''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} H^{(1)}_{\alpha x+\beta,\, 10^s,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} H^{(0)}_{\alpha x+\beta,\, 10^{s-1},\, 0}(x)}{9\,.\,10^{s-1}} = \frac{1}{\varphi(x)}\left\{\frac{10}{9}\log\ s - \frac{\log(s-1)}{9} + \log\log 10 + \right.$$

$$\left. + 0\cdot 26149721828\ldots - \sigma + \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\} + \Delta_3^{(IV)}$$

so ist, wie Herr F. Mertens a. a. O. gezeigt hat,

$$\varphi(\varkappa)\sum_{p\leqq}\frac{1}{p}=\log\log m+0\cdot 26149721828\ldots-\sigma+$$
$$+\sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega}c_{a'}A(\varepsilon,\eta,\omega_1,\ldots,\omega_r)+\Delta_2,$$

wo

$$a'\equiv\frac{1}{a}\ (\mathrm{mod}\ \varkappa)$$
$$\sum_q\frac{c_q}{q}=A(\varepsilon,\eta,\omega_1,\ldots,\omega_r)$$
$$|\Delta_2|<\frac{2\lambda C\varphi(\varkappa)}{\log(m+1)}$$

und σ die Summe der reciproken Primtheiler von $\varkappa$ ist, die Summation bezüglich q über alle Primzahlen, die auf ε, η, ω_1, ω_2, .., ω_r bezügliche aber über alle Wurzelcombinationen ε, η, $\omega_1,\ldots,\omega_r$ mit einziger Ausnahme derjenigen Verbindung, in welcher alle genannten Grössen den Werth 1 haben, zu erstrecken ist.

Man hat daher die Gleichung

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}H^{(1)}_{\alpha\varkappa+\beta,\,m,\,0}(x)}{n}=\frac{\log\log m}{\varphi(\varkappa)}+\frac{1}{\varphi(\varkappa)}\Big\{0\cdot 26149721828\ldots-\sigma+$$
$$+\sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega}c_{a'}A(\varepsilon,\eta,\omega_1,\ldots,\omega_r)\Big\}+\Delta_3\qquad(\varkappa>2),$$

wo

$$|\Delta_3|<\frac{2\lambda C}{\log(m+1)}+\frac{\Theta_{0\,(m)}^{(\alpha\varkappa+\beta)}}{n}$$

ist, in welcher die speciellen Relationen

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}H^{(1)}_{4\alpha+1,\,m,\,0}(x)}{n}=\frac{\log\log m}{2}-0\cdot 2867420562\ldots+\Delta_3$$
$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n}H^{(1)}_{4\alpha+3,\,m,\,0}(x)}{n}=\frac{\log\log m}{2}+0\cdot 048239269\ldots+\Delta_3$$

enthalten sind.

Aus diesen allgemeinen Gleichungen ergeben sich die speciellen

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{\alpha\varkappa+\beta,\, n,\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log n}{\varphi(\varkappa)} + \frac{1}{\varphi(\varkappa)}\left\{0\cdot 26149721828\ldots - \sigma + \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\} + \Delta_3'$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{\alpha\varkappa+\beta,\, \sqrt{n},\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log n}{\varphi(\varkappa)} + \frac{1}{\varphi(\varkappa)}\left\{0\cdot 26149721828\ldots - \log 2 - \sigma + \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\} + \Delta_3''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n+\eta} H^{(1)}_{\alpha\varkappa+\beta,\, n,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n-\eta} H^{(1)}_{\alpha\varkappa+\beta,\, n,\, 0}(x)}{2\eta} = \frac{\log\log n}{\varphi(\varkappa)} + \frac{1}{\varphi(\varkappa)}\Bigg\{0\cdot 26149721828\ldots - \sigma +$$

$$+ \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\Bigg\} + \Delta_3'''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} H^{(1)}_{\alpha\varkappa+\beta,\, 10^s,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} H^{(0)}_{\alpha\varkappa+\beta,\, 10^{s-1},\, 0}(x)}{9\,.\,10^{s-1}} = \frac{1}{\varphi(\varkappa)}\Bigg\{\frac{10}{9}\log s - \frac{\log(s-1)}{9} + \log\log 10 +$$

$$+ 0\cdot 26149721828\ldots - \sigma + \sum_{\varepsilon,\,\eta,\,\omega} c_{a'}\, A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\Bigg\} + \Delta_3^{(IV)}$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{4\alpha+1,\, n,\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log\, n}{2} - 0\cdot 2867420562\ldots + \Delta'_3$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{4\alpha+1,\, \sqrt{n},\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log\, n}{2} - \left\{\frac{\log 2}{2} + 0\cdot 2867430562\ldots\right\} + \Delta''_3$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n+\eta} H^{(1)}_{4\alpha+1,\, n,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n-\eta} H^{(1)}_{4\alpha+1,\, n,\, 0}(x)}{2\eta} = \frac{\log\log\, n}{2} - 0\cdot 2867420562\ldots + \Delta'''_3$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} H^{(1)}_{4\alpha+1,\, 10^s,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s-1}} H^{(1)}_{4\alpha+1,\, 10^{s-1},\, 0}(x)}{9\,.\,10^{s-1}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{10}{9}\log s + \log\log 10 - \frac{\log\,(s-1)}{9} - 0\cdot 5734841124\right\} + \Delta^{(IV)}_3$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{4\alpha+3,\, n,\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log\, n}{2} + 0\cdot 048239269\ldots + \Delta'_3$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n} H^{(1)}_{4\alpha+3,\, \sqrt{n},\, 0}(x)}{n} = \frac{\log\log n}{2} + 0\cdot048239269\ldots - \frac{\log 2}{2} + \Delta_3''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=n+\eta} H^{(1)}_{4\alpha+3,\, n,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=n-\eta} H^{(1)}_{4\alpha+3,\, n,\, 0}(x)}{2\eta} = \frac{\log\log n}{2} + 0\cdot048239269\ldots + \Delta_3'''$$

$$\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=10^s} H^{(1)}_{4\alpha+3,\, 10^s,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=1}^{x=10^{s}-1} H^{(1)}_{4\alpha+3,\, 10^s-1,\, 0}(x)}{9.10^{s-1}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{10}{9}\log s + \log\log 10 - \frac{\log(s-1)}{9} + 0\cdot096478538\ldots\right\} + \Delta_3^{(IV)},$$

wo

$$|\;\Delta_3'\;| < \frac{2\lambda C}{\log(n+1)} + \frac{\Theta_0^{(p)}(n)}{n}$$

$$|\;\Delta_3''\;| < \frac{4\lambda C}{\log n} + \frac{\Theta_0^{(p)}(\sqrt{n})}{n}$$

$$2\eta\,|\;\Delta_3'''\;| = \frac{1}{\varphi(\varkappa)}\left\{(n+\eta)\log\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{\eta}{n}\right)}{\log n}\right) - (n-\eta)\log\left(1+\frac{\log\left(1-\frac{\eta}{n}\right)}{\log n}\right)\right\} +$$

$$+\varepsilon_1'\left\{\frac{2\lambda C(n+\eta)}{\log(n+\eta+1)} + \frac{\Theta_0^{(p)}(n+\eta)}{n+\eta}\right\} - \varepsilon_2'\left\{\frac{2\lambda C(n-\eta)}{\log(n-\eta+1)} + \frac{\Theta_0^{(p)}(n-\eta)}{n-\eta}\right\}$$

$$9\; 10^{s-1}\,|\Delta_3^{(IV)}| = \varepsilon_1' \left\{\frac{2\lambda C.10^{s}}{s\log 10} + \Theta_0^{(p)}(10^{s})\right\} - \varepsilon_1' \left\{\frac{2\lambda C.10^{s-1}}{(s-1)\log 10} + \Theta_0^{(p)}(10^{s-1})\right\} \qquad (|\varepsilon_1'|, |\varepsilon_2'| < 1)$$

ist. Diese Relationen liefern die Theoreme:

Ist $\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$, $\lim_{\eta, n=\infty} \frac{n}{\eta \log n} = 0$, so hat jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta \ldots n+\eta$ im Mittel $\frac{\log\log n}{\varphi(\varkappa)} + \frac{1}{\varphi(\varkappa)}\left\{0 \cdot 26149721828\ldots - \sigma + \sum_{\varepsilon, \eta, \omega} c_{a'} A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\}$ Primtheiler von der Form $\alpha\varkappa + \beta\, (\varkappa > 2)$.

Ist $\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$, $\lim_{\eta, n=\infty} \frac{n}{\eta \log n} = 0$, so hat jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta \ldots n+\eta$ im Mittel $\frac{\log\log n}{2} - 0 \cdot 2867420562\ldots$ Primtheiler von der Form $4\alpha+1$ und $\frac{\log\log n}{2} + 0 \cdot 048239269\ldots$ Primtheiler von der Form $4\alpha+3$.

Ist s eine hinlänglich grosse Zahl, so hat jede s-zifferige Zahl im Mittel $\frac{1}{\varphi(\varkappa)}\left\{\frac{10\log s}{9} + \log\log 10 - \frac{\log(s-1)}{9} + 0 \cdot 26149728128\ldots - \sigma + \sum_{\varepsilon, \eta, \omega} c_{a'} A(\varepsilon, \eta, \omega_1, \ldots, \omega_r)\right\}$ Primfactoren von der Form $\alpha\varkappa + \beta\, (\varkappa > 2)$.

Ist s eine hinlänglich grosse Zahl, so hat jede s-zifferige Zahl im Mittel $\frac{10\log s + 9\log\log 10 - \log(s-1)}{18} - 0 \cdot 2867420562\ldots$ Primtheiler von der Form $4\alpha+1$ und $\frac{10\log s + 9\log\log 10 - \log(s-1)}{18} + 0 \cdot 048239269\ldots$ Primdivisoren von der Form $4\alpha+3$.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $0\cdot 334981252\ldots$ Primfactoren von der Form $4\alpha+3$ mehr als von der Form $4\alpha+1$.

$\beta)$ Für irgend eine Classe von complexen Zahlen ist die über alle Primzahlen p des Gebietes (m) von vorgeschriebener Beschaffenheit ausgedehnte Summe

$$\sum_{p=(m)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p)}\right) N(p)^{\tau} = \sum_{p=(m),\, x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(px)}\right) N(p)^{\tau}$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{p_x} N(p_x)^{\tau}\right),$$

wo die Summation bezüglich p_x über alle Primtheiler p der ganzen complexen Zahl x zu erstrecken ist, deren Norm nicht grösser als die reelle Zahl m ist. Bezeichnet man die Summe der Normen der τ^{ten} Potenzen dieser Primfactoren, analog der für reelle Zahlen verwendeten Bezeichnungsweise mit $H_{p,\,m,\,\tau}(x)$, so erhält man demnach die Gleichung:

$$\sum_{x=(n)} H_{p,\,m,\,\tau}(x) = \sum_{p=(m)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(p)}\right) N(p)^{\tau},$$

Für die Anzahl aller aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären complexen ganzen Zahlen, deren Norm nicht grösser als die reelle Zahl m ist, besteht, wie ich gezeigt habe,[1] die Relation

$$\mathfrak{A}(m) = \frac{\pi m}{4} + \varepsilon\sqrt{m} \qquad (|\varepsilon| < 1)$$

und daher hat man für die primären Primfactoren dieser complexen Zahlen die Gleichung

$$\sum_{x=(n)} H_{p,\,m,\,\tau}(x) = \frac{\pi n}{4}\sum_{p=(m)} N(p)^{\tau-1} + \sqrt{n}\sum_{p=(m)} \varepsilon_p N(p)^{\tau-\frac{1}{2}} \quad (|\varepsilon_p| < 1)$$

---

[1] „Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen." Denkschriften der math.-naturw. Classe der k. Akad. der Wissensch., 50. Band.

aus welcher sich für den speciellen Werth $\tau = 0$ für die Anzahl dieser Primtheiler die Formel

$$\sum_{x=(n)} H_{p,m,0}(x) = \frac{\pi n}{4} \sum_{p=(m)} \frac{1}{N(p)} + \sqrt{n} \sum_{p=(m)} \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{N(p)}} \qquad (|\varepsilon_p|<1) \ldots 48)$$

ergibt.

Nun ist

$$\left| \sum_{p=(m)} \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{N(p)}} \right| < \sum_{p=(m)} \frac{1}{\sqrt{N(p)}}$$

oder weil jede reelle Primzahl $\mathfrak{p}$ von der Form $4\alpha+1$ sich in zweifacher Weise als Summe von zwei Quadraten darstellen lässt, und jede reelle Primzahl $\mathfrak{q}$ von der Form $4\alpha+3$ in dem Gebiete der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen Primzahl bleibt und demnach die Norm $\mathfrak{q}^2$ besitzt,

$$\left| \sum_{p=(m)} \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{N(p)}} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \sum_{3}^{m} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}}} + \sum_{3}^{\sqrt{m}} \frac{1}{\mathfrak{q}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \sum_{3}^{m} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}}} + \frac{\log\log m - \log 2}{2} +$$

$$+ 0 \cdot 048239269 \ldots + \frac{2+C}{\log(\sqrt{m}+1)} + \frac{2}{\sqrt{m}\log m},$$

wo die auf der rechten Seite befindlichen Summen über die betreffenden reellen Primzahlen des angegebenen Intervalles auszudehnen sind.

Setzt man die über alle reellen Primzahlen p_1 des Intervalles $2 \ldots m_1$ ausgedehnte Summe

$$\sum_{2}^{m_1} \log p_1 = \overline{\psi}(m_1),$$

so ist, wie Herr F. Mertens a. a. O. gezeigt hat,

$$\overline{\psi}(m_1) < 2m_1$$

und demnach ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{3}^{m}\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}}}<\sum_{x=2}^{x=m}\frac{\bar{\psi}(x)-\bar{\psi}(x-1)}{\sqrt{x}\log x}$$

$$<\frac{\bar{\psi}(m)}{\sqrt{[m]+1}\log(\sqrt{[m]+1})}+\sum_{x=2}^{x=m}\bar{\psi}(x)\left\{\frac{1}{\sqrt{x}\log x}-\frac{1}{\sqrt{x+1}\log(x+1)}\right\}$$

$$<\frac{2\sqrt{m}}{\log m}+2\sum_{x=2}^{x=m}\frac{(\sqrt{x+1})-\sqrt{x})\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\log(x+1)}$$

oder, weil

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{3}^{m}\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}}}<\frac{2\sqrt{m}}{\log m}+\sum_{x=2}^{x=m}\frac{1}{\sqrt{x+1}\log(x+1)}.$$

Nun ist

$$\sum_{x=2}^{x=m}\frac{1}{\sqrt{x+1}\log(x+1)}=\sum_{x=2}^{x=[\sqrt{m}]}\frac{1}{\sqrt{x+1}\log(x+1)}+\sum_{x=[\sqrt{m}]+1}^{x=m}\frac{1}{\sqrt{x+1}\log(x+1)}$$

$$< \sum_{x=2}^{x=[\sqrt{m}]} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\log([\sqrt{m}]+1)} \sum_{x=2}^{x=m} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$< 2\left\{\sqrt{[\sqrt{m}]+1} + \frac{\sqrt{m}}{\log([\sqrt{m}]+1)}\right\}$$

und daher hat man schliesslich

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{3}^{m} \frac{1}{\sqrt{p}} < 2\left\{\frac{2\sqrt{m}}{\log m} + \sqrt[4]{m} + \frac{1}{2\sqrt{[\sqrt{m}]}}\right\}$$

Die Gleichung 48) kann daher in folgender Weise geschrieben werden

$$\sum_{x=(n)} H_{p,m,0}(x) = \frac{\pi n}{4} \sum_{p=(m)} \frac{1}{N(p)} + \Delta_4 \sqrt{n},$$

wo

$$|\Delta_4| < 4\left\{\frac{2\sqrt{m}}{\log m} + \sqrt[4]{m} + \frac{1}{2\sqrt{[\sqrt{m}]}}\right\} + \frac{\log\log m - \log 2}{2} + 0\cdot 048239269\ldots + \frac{2+C}{\log m} + \frac{2}{\sqrt{m}\log m}$$

ist.

Es sei nun p eine ungerade primäre complexe Primzahl von der Form $\alpha\varkappa+\beta$, wo $\varkappa$ eine mindestens durch die dritte Potenz von $(1+i)$ theilbare ganze complexe Zahl und β eine ungerade primäre, zu $\varkappa$ theilerfremde ganze complexe Zahl vorstellt; es möge ferner p_s eine zweigliederige, q_s aber eine eingliederige complexe Primzahl vorstellen.

Ermittelt man nun nach Dirichlet's Vorgange für jede zu $\varkappa$ theilerfremde ganze complexe Zahl μ ein System von Indices in Bezug auf den Modul

$$\varkappa = (1+i)^{\lambda} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_s^{\beta_s}$$

in der Weise, dass der Modul $(1+i)^{\lambda}$ für $\lambda = 3$ unberücksichtigt bleibt, hingegen für $\lambda > 3$ zwei reelle ganze Zahlen $\delta_{\mu}, \varepsilon_{\mu}$ gesucht werden, von denen die erste kleiner als $2^{\left[\frac{\lambda-2}{2}\right]}$, die zweite aber kleiner als $2^{\left[\frac{\lambda-3}{2}\right]}$ ist und für welche die Congruenz

$$(-1+2i)^{\delta_{\mu}} 5^{\varepsilon_{\mu}} \equiv \mu \pmod{(1+i)^{\lambda}}$$

besteht, dass ferner für jede Potenz $p_{\tau}^{\alpha_{\tau}}$ eines zweigliederigen Primfactors unter Zugrundelegung einer bestimmten primitiven Congruenzwurzel g_{τ} in Beziehung auf diese Primzahlpotenz eine reelle ganze Zahl $\gamma_{\mu}^{(\tau)}$ kleiner als $N(p_{\tau})^{\alpha_{\tau}-1}\{N(p_{\tau})-1\}$, für welche

$$\mu = g_{\tau}^{\gamma_{\mu}^{(\tau)}} \pmod{p_{\tau}^{\alpha_{\tau}}}$$

ist, und endlich für jede eingliederige Primzahlpotenz $q_{\sigma}^{\beta_{\sigma}}$ zunächst zwei Zahlen λ_{σ}, ν_{σ}, welche nach dem Modul $q_{\sigma}^{\beta_{\sigma}}$, beziehungsweise zu den Exponenten $(q_{\sigma}^2-1)q_{\sigma}^{\beta_{\sigma}-1}$ und $q_{\sigma}^{\beta_{\sigma}-1}$ gehören, bestimmt und sodann zwei Exponenten $\zeta_{\mu}^{(\sigma)} < (q_{\sigma}^2-1)q_{\sigma}^{\beta_{\sigma}-1}$, $\eta_{\mu}^{(\sigma)} < q_{\sigma}^{\beta_{\sigma}-1}$ gesucht werden, für welche die Congruenz

$$\lambda_{\sigma}^{\zeta_{\mu}^{(\sigma)}} \nu_{\sigma}^{\eta_{\mu}^{(\sigma)}} \equiv \mu \pmod{q_{\sigma}^{\beta_{\sigma}}}$$

erfüllt wird, und setzt für jedes zu $\varkappa$ theilerfremde μ

$$c_{\mu} = \xi_1^{N(p_1)^{\alpha_1-1}\{N(p_1)-1\}} \xi_2^{N(p_2)^{\alpha_2-1}\{N(p_2)-1\}} \ldots \xi_r^{N(p_r)^{\alpha_r-1}\{N(p_r)-1\}}$$

$$. \eta_1'^{\zeta_{\mu}^{(1)}} \eta_2'^{\zeta_{\mu}^{(2)}} \ldots \eta_s'^{\zeta_{\mu}^{(s)}} . \zeta_1'^{\eta_{\mu}^{(1)}} \zeta_2'^{\eta_{\mu}^{(2)}} \ldots \zeta_s'^{\eta_{\mu}^{(s)}} . \omega_1^{\delta_{\mu}} \omega_2^{\varepsilon_{\mu}},$$

wo

$$\xi_1^{N(p_1)^{\alpha_1-1}\{N(p_1)-1\}}=1,\ \xi_2^{N(p_2)^{\alpha_2-1}\{N(p_2)-1\}}=1,\ \ldots,\ \xi_r^{N(p_r)^{\alpha_r-1}\{N(p_r)-1\}}=1$$

$$\eta_1'^{(q_1^2-1)q_1^{\beta_1-1}}=1,\ \eta_2'^{(q_2^2-1)q_2^{\beta_2-1}}=1,\qquad \eta_s'^{(q_s^2-1)q_s^{\beta_s-1}}=1$$

$$\zeta_1'^{q_1^{\beta_1-1}}=1,\ \zeta_2'^{q_2^{\beta_2-1}}=1,\qquad \zeta_s'^{q_s^{\beta_s-1}}=1$$

$$\omega_1^{2^{\left[\frac{\lambda-2}{2}\right]}}=1,\ \omega_2^{2^{\left[\frac{\lambda-3}{2}\right]}}=1$$

ist, während für jedes μ, welches durch einen der Primfactoren von $\varkappa$ theilbar ist, $c_\mu=0$ genommen wird, so ist, wie Herr F. Mertens bewiesen hat,[1]

$$\sum_{p=(m)}\frac{1}{N(p)}=\frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\log\log m-0\cdot5734841124\ldots-$$

$$-\sigma+Q+\sum c_\rho\mathfrak{W}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta_1',\ldots,\eta_s',\zeta_1',\ldots,\zeta_s',\omega_1,\omega_2)\Big\}+\frac{\varepsilon}{\log m}$$

(ε endlich für jedes m),

wenn

$$\frac{1}{\rho}\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ \varkappa)$$

$$\sum_3^\infty\frac{1}{q^2}=Q,\quad \sum_3^\infty\frac{c_q}{N(q)}=\mathfrak{W}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta_1',\ldots,\eta_s',\zeta_1',\ldots,\zeta_s',\omega_1,\omega_2)$$

ist, q irgend eine complexe Primzahl, σ die Summe der reciproken Werthe der Normen aller ungeraden primären Primtheiler von $\varkappa$ bedeutet und die Summe über alle Wurzelcombinationen $\xi_1,\ldots,\xi_r$, $\zeta_1',\ldots,\zeta_s'$, $\eta_1',\ldots,\eta_r'$, ω_1, ω_2 zu erstrecken ist, in denen mindestens eine der genannten Grössen von 1 verschieden ist.

Die Gleichung 48) wird daher in diesem Falle in folgende übergehen

---

[1] „Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie." Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 77. Bd., S. 289 bis 339.

$$\frac{\sum\limits_{x=(n)} H_{p,\,m,\,0}(x)}{n} = \frac{4}{\varphi(\varkappa)} \Big\{ \log\log m - 0\cdot 5734841124\ldots - \sigma + Q +$$

$$+ \sum c_\rho \mathfrak{W}(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \zeta'_1, \ldots, \zeta'_s, \omega_1, \omega_2) \Big\} + \Delta_5 \qquad (p = \alpha\varkappa + \beta),$$

wo

$$|\Delta_5| < \frac{1}{n} \Big\{ \Big(\frac{8\sqrt{m}}{\log m} + 4\sqrt[4]{m} + \frac{2}{\sqrt{[\sqrt{m}]}} + \frac{\log\log m - \log 2}{2} + 0\cdot 048239269\ldots \Big) \sqrt{n} +$$

$$+ \frac{\eta}{\log m} + \frac{2}{\sqrt{m}\log m} \Big\} + \frac{2+C}{\sqrt{m}\,\log m}$$

ist, wenn η für alle Werthe von m endlich bleibt.

Aus dieser allgemeinen Gleichung ergeben sich die folgenden speciellen

$$\frac{\sum\limits_{x=(n)} H_{\alpha\varkappa+\beta,\,n,\,0}(x)}{n} = \frac{4}{\varphi(\varkappa)} \Big\{ \log\log n - 0\cdot 5734841124\ldots - \sigma + Q +$$

$$+ \sum c_\rho \mathfrak{W}(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \zeta'_1, \ldots, \zeta'_s, \omega_1, \omega_2) \Big\} + \Delta'_5$$

$$\frac{\sum\limits_{x=(n)} H_{\alpha\varkappa+\beta,\, \sqrt{n},\, 0}(x)}{n} = \frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\log\log n - \log 2 - 0\cdot 5734841124\ldots - \sigma + Q +$$

$$+ \sum c_\rho \mathfrak{W}(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \zeta'_1, \ldots, \zeta'_s, \omega_1, \omega_2)\Big\} + \Delta''_5$$

$$\frac{\sum\limits_{x=(n+\eta)} H_{\alpha\varkappa+\beta,\, n+\eta,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=(n-\eta)} H_{\alpha\varkappa+\beta,\, n-\eta,\, 0}(x)}{2\eta} = \frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\log\log n - 0\cdot 5734847124\ldots - \sigma + Q +$$

$$+ \sum c_\rho \mathfrak{W}(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \zeta'_1, \ldots, \zeta'_s, \omega_1, \omega_2)\Big\} + \Delta'''_5$$

$$\frac{\sum\limits_{x=(10^s)} H_{\alpha\varkappa+\beta,\, 10^s,\, 0}(x) - \sum\limits_{x=(10^{s-1})} H_{\alpha\varkappa+\beta,\, 10^{s-1},\, 0}(x)}{9\,.\,10^{s-1}} = \frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\frac{10}{9}\log s - \log\log 10 - \frac{\log(s-1)}{9} - 0\cdot 573484124\ldots -$$

$$-\sigma + Q + \sum c_\rho \mathfrak{W}(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \zeta'_1, \ldots, \zeta'_s, \omega_1, \omega_2)\Big\} + \Delta^{(IV)}_5,$$

wo

$$|\Delta_5'| < \frac{8}{\log n} + \frac{4}{\sqrt[4]{n}} + \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}} + \frac{\log\log n - \log 2 + 0\cdot 096478538\ldots}{2\sqrt{n}} + \frac{\overline{\eta}}{n\log n} + \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}\log n} + \frac{2+C}{\sqrt{n}\log n}$$

$$|\Delta_5''| < \frac{16}{\sqrt[4]{n}\log n} + \frac{4}{n^{\frac{3}{8}}} + \frac{2}{n^{\frac{5}{8}}} + \frac{\log\log n - 2\log 2 + 0\cdot 096478538\ldots}{2\sqrt{n}} + \frac{2\overline{\eta}}{n\log n} + \frac{4}{n^{\frac{5}{4}}\log n} + \frac{4+2C}{\sqrt{n}\log n}$$

$$2\eta\,|\Delta_5'''| = \frac{4}{\varphi(x)}\left\{(n+\eta)\log\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{\eta}{n}\right)}{\log n}\right) - (n-\eta)\log\left(1+\frac{\log\left(1-\frac{\eta}{n}\right)}{\log n}\right)\right\} + \varepsilon_1'\left\{\frac{8(n+\eta)}{\log(n+\eta)} + \right.$$

$$+\frac{\overline{\eta}}{\log(n+\eta)} + 4(n+\eta)^{\frac{3}{4}} + 2(n+\eta)^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\sqrt{n+\eta}\,\log(n+\eta)} + \frac{(2+C)\sqrt{n+\eta}}{\log(n+\eta)} +$$

$$\left.+\{\log\log(n+\eta) - \log 2 + 0\cdot 096478538\ldots\}\frac{\sqrt{n+\eta}}{2}\right\} - \varepsilon_2'\left\{\frac{8(n-\eta)}{\log(n-\eta)} + \frac{\overline{\eta}}{\log(n-\eta)} + \right.$$

$$+4(n-\eta)^{\frac{3}{4}} + 2(n-\eta)^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\sqrt{n-\eta}\,\log(n-\eta)} + \frac{(2+C)\sqrt{n-\eta}}{\log(n-\eta)} +$$

$$\left.+\frac{\sqrt{n-\eta}\,(\log\log(n-\eta) - \log 2 + 0\cdot 096478538\ldots)}{2}\right\}$$

$$9.10^{s-1}\,|\Delta_5^{(IV)}| = \varepsilon_1' \left\{ \frac{8.10^s}{s\log 10} + \frac{\bar{\eta}}{s\log 10} + 4.10^{\frac{3s}{4}} + 2.10^{\frac{s}{4}} + \frac{2}{10^{\frac{s}{2}}.s\log 10} + \frac{(2+C)\,10^{\frac{s}{2}}}{s\log 10} + \right.$$
$$\left. + \frac{10^{\frac{s}{2}}\{\log\log 10+\log s-\log 2+0\cdot096478538\ldots\}}{2} \right\} - \varepsilon_2' \left\{ \frac{8.10^{s-1}}{(s-1)\log 10} + \frac{\bar{\eta}}{(s-1)\log 10} + \right.$$
$$+ 4.10^{\frac{3(s-1)}{4}} + 2.10^{\frac{s-1}{4}} + \frac{2}{10^{\frac{s-1}{2}}(s-1)\log 10} + \frac{(2+C)\,10^{\frac{s-1}{2}}}{(s-1)\log 10} +$$
$$\left. + \frac{10^{\frac{s-1}{2}}\{\log\log 10+\log (s-1)-\log 2+0\cdot096478538\ldots\}}{2} \right\} \qquad (|\varepsilon_1'|,\ |\varepsilon_2'|<1),$$

welche in Verbindung mit der für die Anzahl $\psi(x)$ aller primären complexen Theiler der ganzen complexen Zahl x bestehenden Relation

$$\frac{\sum\limits_{x=(n)} \psi(x)}{n} = \pi^2\left(\log n + 0\cdot1544313298\ldots + \frac{8\,\mathfrak{M}}{\pi}\right) + \Delta_6,$$

wo Δ_6 von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$ und

$$\mathfrak{M} = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^x \log(2x+1)}{2x+1}$$

ist, folgende Theoreme liefert:

Ist $\lim_{\eta,\,n=\infty}\dfrac{\eta}{n}=0$, $\lim_{\eta,\,n=\infty}\dfrac{n^{\frac{3}{4}}}{\eta}=0$, so hat jede ganze complexe Zahl des Intervalles $n-\eta\,.\;.\,n+\eta$ im Mittel

$$\frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\log\log n-0\cdot5734841124\ldots-\sigma+Q+$$
$$+\sum c_\rho\mathfrak{W}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta'_1,\ldots,\eta'_s,\zeta'_1,\ldots,\zeta'_s,\omega_1,\omega_2)\Big\}$$

primäre ungerade Primtheiler von der Form $\alpha\varkappa+\beta$ und

$$\pi^2\left(\log n+1\cdot1544313298\ldots+\frac{8\,\mathfrak{M}}{\pi}\right)-$$
$$-\frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\log\log n-0\cdot5734841124\ldots-\sigma+Q+$$
$$+\sum c_\rho\mathfrak{W}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta'_1,\ldots,\eta'_s,\zeta'_1,\ldots,\zeta'_s,\omega_1,\omega_2)\Big\}$$

andere primäre Theiler.

Ist s eine hinlänglich grosse Zahl, so hat jede aus den vierten Einheitswurzeln gebildete ganze complexe Zahl mit s-zifferiger Norm im Mittel

$$\frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\frac{10\log s+9\log\log 10-\log(s-1)}{9}-0\cdot5734841124\ldots-$$
$$-\sigma+Q+\sum c_\rho\mathfrak{W}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta'_1,\ldots,\eta'_s,\zeta'_1,\ldots,\zeta'_s,\omega_1,\omega_2)\Big\}$$

primäre ungerade Primtheiler von der Form $\alpha\varkappa+\beta$ und

$$\pi^2\left(s\log 10+0\cdot1544313298\ldots+\frac{8\,\mathfrak{M}}{\pi}+\frac{\log 10}{9}\right)-$$
$$-\frac{4}{\varphi(\varkappa)}\Big\{\frac{10\log s+9\log\log 10-\log(s-1)}{9}-0\cdot5734841124\ldots-$$
$$-\sigma+Q+\sum c_\rho\mathfrak{W}(\xi_1,\ldots,\xi_r,\eta'_1,\ldots,\eta'_s,\zeta'_1,\ldots,\zeta'_s,\omega_1,\omega_2)\Big\}$$

andere primäre Theiler.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$, deren Norm zwischen $\sqrt{n}$ und n liegt, hat im Mittel $\dfrac{4\log 2}{\varphi(\varkappa)}$ ungerade primäre Primtheiler von der Form $\alpha\varkappa+\beta$, deren Norm grösser als $\sqrt{n}$ ist.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: 98_2a

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: Über complexe Primzahlen 1036-1091