

Über Faltenpunkte

von

D. J. Korteweg,

Professor der Universität in Amsterdam.

(Mit 1 Tafel.)

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht eine Monographie zu liefern über gewisse singuläre Punkte auf Flächen, die sich den Wendepunkten der Curven in vieler Hinsicht zur Seite stellen lassen. So wie die Wendepunkte bei den Curven kommen die hier erwähnten Punkte bei den Flächen gegebener Ordnung allgemein und in bestimmter Anzahl vor, und, wie die Wendepunkte auf der Hesse'schen Curve liegen, gehören jene Punkte zur Hesse'schen Fläche und besitzen zugleich eine Eigenschaft, welche der Haupteigenschaft der Wendepunkte analog ist, dass nämlich durch sie eine Tangente geführt werden kann, welche mit der Fläche eine Berührung höherer Ordnung hat als die höchste Ordnung der Berührung der durch einen willkürlichen Punkt geführten Tangenten.

Diese singulären Punkte, denen ich den Namen „Faltenpunkte“¹ beizulegen wünsche, haben in letzterer Zeit noch an

¹ In der Literatur der Geometrie des Raumes sind diese Punkte bisher meistens unbenannt geblieben, so z. B. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 3. Auflage, 9. Capitel, und in den dort citirten Abhandlungen Cayley's. Späterhin hat Maxwell (vergl. J. Clerk Maxwell, Theory of Heat, 9^e edition, 1888, Chapter XII, p. 205) den Namen „Tacnodalpunkt“ gebraucht, wodurch gewiss eine der charakteristischen Eigenschaften angedeutet wird. Doch scheint mir der Name „Faltenpunkt“ (point de plissure, plaitpoint, holländisch plooi punt), der sich den deutschen Benennungen: Wendepunkt, Doppelpunkt, Schnabelpunkt, Spitze, Knotenpunkt, Klemmpunkt = Pinchpoint gut anschliesst, noch besser die

Interesse gewonnen, weil ihr Auftreten auf thermodynamischen Flächen eine wichtige physische Bedeutung hat.¹ Während man sie gewöhnlich als gemeinsame Punkte der Spinodalcurve (Curve der parabolischen Punkte) und der Flecnodalcurve (Curve der Berührungspunkte vierpunktiger Tangenten) definiert, weiss man, dass diese beiden Curven und die Connodalcurve (Curve der conjugirten Berührungspunkte) sich in ihnen berühren und kennt auch ihre Anzahl auf einer Fläche gegebener Ordnung;² in anderer Hinsicht aber sind sie, so viel mir bekannt ist, nicht untersucht. Diese Lücke auszufüllen, bezwecke ich in dieser Arbeit, die ich in zwei Abschnitte eingetheilt habe.

Der erste Abschnitt fängt an mit der Untersuchung der Gestaltung einer Fläche in der Nähe eines Faltenpunktes, den ich in einer von der obenerwähnten etwas abweichenden Weise definire. Die Betrachtung dieser Gestaltung führt dann von selbst zu einer Eintheilung in zwei Hauptarten, wobei sich noch zwei besondere Fälle anschliessen, in welchen die allgemeinen Be-

Natur der betreffenden Punkte anzugeben. Ich hoffe nämlich, später zu zeigen (vergl. §. 27 dieser Arbeit), wie sehr das Auftreten, Verschwinden und Ineinanderfliessen der Falten einer sich stetig umformenden Fläche durch das Entstehen, Vergehen und Zusammenkommen ihrer Faltenpunkte beherrscht wird, und wie überhaupt die ganze Gestaltung der Falten einer Fläche abhängig ist von der Anzahl und der Natur der Faltenpunkte, die bei ihrem Entstehen aus einer anfänglich ausschliesslich elliptisch oder hyperbolisch gekrümmten Fläche auftreten müssen. Schon der Umstand aber, dass am Ursprung einer jeden Falte (man denke z. B. an den Faltenwurf eines Kleides), sich ein Faltenpunkt befindet, genügt unseres Erachtens, den gewählten Namen zu rechtfertigen. Der Name „asymptotischer Punkt“, welcher in der Literatur der Flächen dritten Grades den bei diesen Flächen auftretenden Species der Faltenpunkte beigelegt wird, ist wohl nicht empfehlenswerth.

¹ Über die Bedeutung der Faltenpunkte auf thermodynamischen Flächen vergl. Maxwell's Theory of Heat am citirten Orte und auch eine bald in den Archives Neerlandaises zu erscheinenden Arbeit meines hiesigen Collegen Van der Waals. Bei den in dieser letzteren Arbeit behandelten thermodynamischen Flächen tritt die Temperatur als veränderlicher Parameter auf und die in §. 13 meiner Arbeit besprochenen Ausnahmepunkte erster Ordnung können sich also möglicher Weise auf solchen Flächen realisiren.

² Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl., IX. Capitel, §. 476.

trachtungen theilweise ihre Giltigkeit verlieren, und von denen sich späterhin erweist, dass sie auf Doppelfaltenpunkte Bezug haben.

Im zweiten Abschnitte wird eine allgemeine Methode angegeben, um das Betragen singulärer Punkte auf einer sich allmählig umformenden Fläche zu untersuchen, von der meines Erachtens zu erwarten ist, dass sie sich auch bei Anwendung auf andere singuläre Punkte fruchtbar zeigen wird. Mittelst dieser Methode wird dann die Theorie vom Entstehen und Verschwinden der Faltenpunkte einer stetig deformirten Fläche entwickelt.

Erster Abschnitt.

Definition.

1. Wenn eine Doppeltangentialebene sich über die Fläche, welche sie doppelt berührt, fortbewegt, kann es vorkommen, dass die beiden conjugirten Berührungspunkte zusammenfallen. Den Punkt der Fläche, in welchem dieses geschieht, nenne ich einen Faltenpunkt.

Leicht ist es zu beweisen, dass ein solcher Faltenpunkt sowohl auf der Spinodalcurve, als auf der Flecnodalcurve liegen muss. Dazu vergegenwärtige man sich die Doppeltangentialebene einen Augenblick, bevor sie die Stellung, wo die beiden Berührungspunkte zusammenfallen, erreicht hat, und nehme man vorläufig an, dass diese beiden Berührungspunkte auf dem elliptisch gekrümmten Theile der Fläche liegen, dann zeigen sich im Schnitte der Fläche und der Tangentialebene die beiden Berührungspunkte *A* und *B* als isolirte Punkte, die sich unmittelbar neben einander befinden. Wird jetzt die Tangentialebene, indem sie sich selbst parallel bleibt, ein wenig verschoben, so dass sie die Fläche schneidet, dann zeigen sich in der Durchschnittscurve zwei isolirte geschlossene Zweige, die aber bei weiterer Verschiebung in einem Doppelpunkte *C* zusammenfliessen. In diesem Doppelpunkte ist die bewegliche Ebene wieder (einfache) Tangentialebene geworden und es liegt der Punkt *C* also nothwendig auf dem hyperbolisch gekrümmten Theile der Fläche, so dass die Spinodalcurve zwischen den Punkten *C* und *A*, sowie zwischen *C* und *B* ihren Weg nehmen muss; in dem Faltenpunkte aber fallen alle

diese Punkte zusammen, und er liegt also auf der Spinodalcurve.

Weil nun weiter die Gerade AB , welche mit der Fläche vier Punkte gemein hat, im Faltenpunkte eine Tangente der Fläche ist, so gehört der Faltenpunkt auch zur Flecnodalcurve.

Im Falle die Fläche in A und B hyperbolisch gekrümmt ist, oder auch (was nur sehr ausnahmsweise vorkommen kann) in beiden Punkten verschiedenartig, bedarf der Beweis nur einer vor der Hand liegenden Änderung, um gültig zu bleiben.

Gleichung der Fläche in der Nähe eines Faltenpunktes.

2. Will man die Gestaltung einer Fläche in der Nähe eines willkürlichen Punktes studiren, dann kann ihre Gleichung im Allgemeinen in der Gestalt ¹

$$z = a_1 + b_1x + b_2y + c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + \dots \quad 1)$$

geschrieben werden.

Ist nun der betreffende Punkt ein Faltenpunkt und wird er zugleich als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt, indem man weiter die vierpunktige Tangente als y -Axe, die Tangentialebene als xy -Ebene verwendet, dann gilt die einfachere Gleichung:

$$z = c_1x^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + d_3xy^2 + e_1x^4 + \dots \quad 2)$$

denn ausser a_1, b_1, b_2, c_3, d_4 muss auch c_2 Null sein, weil der Faltenpunkt auf der Spinodalcurve liegt und also $4c_1c_3 = c_2^2$.

Wir ändern hier jetzt die Reihenfolge der Glieder, indem wir solche voransetzen, gegen welche in der Nähe des Anfangspunktes alle übrigen in erster Annäherung vernachlässigt werden können. Es sind das die drei Glieder c_1x^2, d_3xy, e_5y^4 , die möglicher Weise unter einander gleiche Grössenordnung besitzen können, wenn nämlich x von der Ordnung y^2 ist. Wenn wir diese letzte Voraussetzung festhalten, bekommen wir die Reihenfolge:

$$z = [c_1x^2 + d_3xy^2 + e_5y^4] + [d_2x^2y + e_4xy^3 + f_6y^5] + \\ + [d_1x^3 + c_3x^2y^2 + f_5xy^4 + g_7y^6] + \dots, \quad \dots 3)$$

¹ Über die Vortheile der hier gewählten Bezeichnungsweise der Coëfficienten vergl. §. 8, Note 2.

wo die zwischen Klammern eingeschlossenen Glieder gleiche Grössenordnung besitzen. Jedenfalls aber, auch wenn die erwähnte Voraussetzung nicht zutrifft, können wir die Gestaltung der Fläche in der Nähe eines Faltenpunktes an der Gleichung

$$z = c_1 x^2 + d_3 xy^2 + e_5 y^4 \quad \dots 4)$$

studieren, denn alle übrigen Glieder können doch immer gegen den einen oder den anderen von den drei berücksichtigten vernachlässigt werden.

Schon die Betrachtung des Durchschnittes der Fläche mit ihrer Tangentialebene gibt dann Veranlassung zur Eintheilung der Faltenpunkte in zwei Hauptarten, je nachdem $4c_1 e_5 - d_3^2 \geq 0$, d. h. je nachdem der Tangentialdurchschnitt reelle oder imaginäre Zweige besitzt.

Die Faltenpunkte erster Art, $4c_1 e_5 - d_3^2 > 0$, und ihre Indicatrix vierter Ordnung.

3. Bei diesen Faltenpunkten besteht der Tangentialschnitt aus einem isolirten Punkte mit reeller Tangente. Die Durchschnitte mit Ebenen $z = z_0$ zeigen die in Fig. 1 abgebildete Gestalt,¹ wie sich am leichtesten durch Lösung der Gleichung 4) nach x ergibt. Es ist dann:

$$x = -\frac{d_3}{2c_1} y^2 \pm \sqrt{\frac{z_0}{c_1} - \frac{4c_1 e_5 - d_3^2}{4c_1^2} y^4}. \quad \dots 5)$$

Beachtung verdient es, dass der Krümmungsradius der Curve in den Punkten C und D gleich und gleichgerichtet ist mit dem der parabolischen Mittellinie $\left(x = -\frac{d_3}{2c_1} y^2\right)$ in O . Zwei reelle Wendepunkte² A_1 und A_2 sind stets vorhanden, sowie

¹ Beim Zeichnen der Curve ist das Coordinatensystem orthogonal angenommen und vorausgesetzt, dass c_1 und d_3 und also, weil $4c_1 e_5 - d_3^2 > 0$, auch e_5 positiv sind. Es liegt darin keinerlei Beschränkung.

² Die Discussion der Wendepunkte, die übrigens kein anderes Interesse als das der richtigen Zeichnung der Indicatrix darbietet, geschieht am einfachsten, indem man das zweite Glied des Ausdruckes für $\frac{d^2 x}{dy^2}$:

eine Doppeltangente K_1K_2 ; ist aber $d_3 = 0$, dann ziehen sich K_1, K_2, A_1 und A_2 im Punkte C zusammen, um beim Zeichenwechsel von d_3 an dieser Seite der Curve zu verschwinden, indem an der anderen Seite im Punkte D dergleichen Punkte neu auftreten.

Wichtig für unsere Untersuchung sind die Punkte K_1 und K_2 , denn es ist leicht einzusehen, dass diese beiden Punkte, als Punkte der durch Gleichung 4) dargestellten Fläche, eine gemeinsame Tangentialebene besitzen. Für diese Punkte, die also zur Connodalcurve gehören, ist

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{d_3}{c_1} y \mp \frac{(4c_1e_5 - d_3^2)y^3}{2c_1^2 \sqrt{\frac{z_0}{c_1} - \frac{4c_1e_5 - d_3^2}{4c_1^2} y^4}} = 0, \quad \dots 6)$$

also:

$$y_{K_1} = y_{K_2} = \sqrt[4]{\frac{d_3^2 z_0}{e_5(4c_1e_5 - d_3^2)}}; \quad x_{K_1} = x_{K_2} = -2 \sqrt{\frac{e_5 z_0}{4c_1e_5 - d_3^2}} \quad \dots 7)$$

und für die Gleichung der Connodalcurve findet man durch Elimination von z_0 :

$$x = -\frac{2e_5}{d_3} y^2. \quad \dots 8)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d_3}{c_1} \mp \frac{(4c_1e_5 - d_3^2)y^2 \left(\frac{3z_0}{c_1} - \frac{4c_1e_5 - d_3^2}{4c_1^2} y^4 \right)}{2c_1^2 \left(\frac{z_0}{c_1} - \frac{4c_1e_5 - d_3^2}{4c_1^2} y^4 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

quadriert und nach y^4 differenziert. Man erhält so:

$$\frac{3(4c_1e_5 - d_3^2)^2 z_0}{4c_1^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{z_0}{c_1} + \frac{4c_1e_5 - d_3^2}{4c_1^2} y^4 \right) \left(\frac{3z_0}{c_1} - \frac{4c_1e_5 - d_3^2}{4c_1^2} y^4 \right) \cdot \left(\frac{z_0}{c_1} - \frac{4c_1e_5 - d_3^2}{4c_1^2} y^4 \right)^{-4}$$

Dieses Glied wächst also im vorliegenden Falle stetig mit y^4 vom Werthe Null (für $y^4 = 0$) bis zum Werth ∞ (für $y^4 = \frac{4c_1z_0}{4c_1e_5 - d_3^2}$) und wird also nur einmal dem des ersten Gliedes $\frac{d_3}{c_1}$ gleich.

Für die Gleichung der Spinodalcurve:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \quad \dots 9)$$

ergibt sich:

$$x = - \frac{6 c_1 e_5 - d_3^2}{c_1 d_3} y^2. \quad \dots 10)$$

Weil nun $4 c_1 e_5 - d_3^2 > 0$, so wendet diese Curve ihre Concavität immer nach derselben Seite wie die Connodalcurve. An dieser Seite ist die Fläche hyperbolisch gekrümmt, denn auf der X -Axe ist $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4 c_1 d_3 x$. Übrigens besitzt die Connodalcurve den grösseren Krümmungsradius, denn:

$$\frac{d_3}{e_5} - \frac{2 c_1 d_3}{6 c_1 e_5 - d_3^2} = \frac{(4 c_1 e_5 - d_3^2) d_3}{e_5 (6 c_1 e_5 - d_3^2)},$$

also positiv, wenn $\frac{d_3}{e_5}$ pos. Es liegen also die conjugirten Berührungspunkte K_1 und K_2 immer auf dem elliptisch gekrümmten Theile.

Bedenkt man schliesslich, dass beim Kleinerwerden des Werthes von z_0 die Indicatrix, während sie sich zu einem isolirten Punkte mit reeller Tangente zusammenzieht, in der Richtung der X -Axe verhältnissmässig immer schmäler wird, dann gibt uns Fig. I, wo wir die dem hyperbolisch gekrümmten Theile der Fläche zugekehrte Seite der Spinodalcurve, wie in allen übrigen Figuren, durch Radirungen angedeutet haben, ein Bild der Gestaltung einer Fläche in der Nähe eines ihrer Faltenpunkte der ersten Art. (Vergl. auch die Raumfigur 4.)

Ungenügend wird diese Vorstellung aber im Specialfall $d_3 = 0$. Der Durchschnitt $z = z_0$ wird dann nämlich nach beiden Seiten symmetrisch, Wendepunkte und Punkte der Connodalcurve haben sich im Punkte C zusammengezogen, und was aus den Connodal- und Spinodalcuren geworden ist, kann ohne nähere Untersuchung beschwerlich eingesehen werden. Wir werden also auf diesen Fall zurückkommen müssen. (Vergl. §. 10.)

Die Faltenpunkte zweiter Art, $4c_1e_5 - d_3^2 < 0$.

4. Der Tangentialdurchschnitt besteht bei diesen Punkten aus zwei einander berührenden Curven, die nach derselben oder nach verschiedenen Seiten hin gekrümmt sind, je nachdem $\frac{e_5}{c_1} \geq 0$. Die Durchschnitte $z = z_0$ besitzen unendliche Zweige, welche sich diesen Curven asymptotisch nähern. Fig. 2 gibt eine Abbildung eines solchen Durchschnittes, wenn $\frac{e_5}{c_1} < 0$, indem wieder c_1, d_3 positiv und also jetzt e_5 negativ vorausgesetzt wird und weiter z_0 positiv angenommen ist. Den asymptotischen Tangentialschnitt haben wir punktirt.

Die Gleichung 5) schreibt sich jetzt:

$$x = -\frac{d_3}{2c_1}y^2 \pm \sqrt{\frac{z_0}{c_1} + \frac{d_3^2 - 4c_1e_5}{4c_1^2}y^4}. \quad \dots 11)$$

Ist z_0 positiv, dann besteht also die Curve aus einem Zweige rechts und einem Zweige links von der Mittellinie $\left(x = -\frac{d_3}{2c_1}y^2\right)$. In unserer Figur besitzt der nach rechts gelegene Zweig zwei Wendepunkte A_1 und A_2 ¹ und eine Doppeltangente K_1K_2 . Die Spinodalcurve (Gleichung 10) und die Connodalcurve (Gleichung 8) wenden beide ihre Concavität nach rechts, während die Connodalcurve den grösseren Krümmungsradius zeigt. Der elliptisch

¹ Dass nur zwei reelle Wendepunkte auftreten, ergibt sich wieder durch Betrachtung des zweiten Gliedes des Ausdruckes für $\frac{d^2x}{dy^2}$. Dieses Glied ist hier, wenn man nicht auf das Zeichen achtet, mit y^4 fortwährend im Wachsen begriffen, bis es für $y^4 = \frac{4c_1z_0}{d_3^2 - 4c_1e_5}$ den Maximalwerth $\frac{\sqrt{2(d_3^2 - 4c_1e_5)}}{c_1}$ erreicht, welcher hier, da e_5 negativ ist, den des ersten Gliedes $\frac{d_3}{c_1}$ übertrifft. Lässt man nun y^4 weiter wachsen, dann nimmt das zweite Glied regelmässig ab bis zum Grenzwerte $\frac{\sqrt{d_3^2 - 4c_1e_5}}{c_1} > \frac{d_3}{c_1}$. Es wird also dem ersten Gliede nicht aufs Neue gleich.

gekrümmte Theil der Fläche liegt nach rechts. Die conjugirten Berührungspunkte liegen immer auf dem hyperbolisch gekrümmten Theile. (Vergl. auch die Raumfigur 5.)

Die Durchschnitte mit Ebenen z_0 negativ bieten wenig Interessen. Sie bestehen aus einem oberen und einem unteren Zweige, jeder mit zwei reellen Wendepunkten¹ versehen und ohne Doppeltangente.

5. Ist $\frac{e_5}{c_1}$ positiv, dann sind die beiden Zweige des Tangentialschnittes, sowie die Mittellinie nach derselben Seite, in unserer Fig. 3, wo c_1 und d_3 positiv genommen sind, nach der linken.

Die Schnitte $z = z_0$ können für z_0 positiv, in welchem Falle sie wieder einen linken und einen rechten Zweig haben, je nach Umständen vier Wendepunkte auf dem rechten Zweige oder überhaupt keine zeigen,² jedenfalls aber sind sie ohne Doppeltangente. Dahingegen besitzen jetzt die Schnitte z_0 negativ, die aus einem oberen und einem unteren Zweige bestehen, immer eine Doppeltangente K_1K_2 , wesshalb wir in unserer Figur einen solchen gezeichnet haben.³

Die Spinodalcurve kehrt je nach Umständen ($d_3^2 \geq 6c_1e_5$) ihre hohle Seite nach links oder nach rechts, bleibt aber immer rechts von der nach links hin gekrümmten Connodalcurve, die

¹ Weil das zweite Glied von $\frac{d^2x}{dy^2}$, anfänglich (für $y^4 = \frac{4c_1z_0}{4c_1e_5 - d_3^2}$) unendlich gross, stetig abnimmt, bis es für $y^4 = \frac{12c_1z_0}{4c_1e_5 - d_3^2}$ den Minimalwerth Null erreicht, um dann wieder bis zum Grenzwerthe $\frac{\sqrt{d_3^2 - 4c_1e_5}}{c_1} > \frac{d_3}{c_1}$ anzuwachsen. Es wird also dem ersten Gliede zweimal gleich, und weil das Zeichen sich beim Passiren des Nullwerthes ändert, liegt der erste Wendepunkt links, der zweite rechts von der Mittellinie.

² Jenachdem der Maximalwerth $\frac{\sqrt{2(d_3^2 - 4c_1e_5)}}{c_1} \geq \frac{d_3}{c_1}$, d. h. $d_3^2 \geq 8c_1e_5$.

³ Beide Zweige besitzen an ihrer linken Seite einen Wendepunkt, denn das zweite Glied des Ausdruckes für $\frac{d^2x}{dy^2}$ nimmt, wenn y^4 wächst, stetig ab von ∞ bis zu einem Grenzwerthe $< \frac{d_3}{c_1}$.

also immer auf dem hyperbolisch gekrümmten Theile der Fläche liegt.¹ (Vergl. auch die Raumfigur 6.)

6. Eine räumliche Vorstellung der Gestaltung einer Fläche in der Nähe eines Faltenpunktes geben die Fig. 4, 5, 6. Die erste repräsentirt eine Fläche mit Faltenpunkt erster Art, die anderen solche mit Faltenpunkten zweiter Art, warum wir hier auch den Durchschnitt der Fläche mit der Tangentialebene des Faltenpunktes angeben könnten. Die Connodalcurve ist überall gezogen, die Spinodalcurve mit Radirungen versehen. Die Hauptunterschiede der beiden Arten, nämlich die verschiedene Natur des Tangentialschnittes und die verschiedene Lage der Connodalcurve (bei den Faltenpunkten erster Art auf dem elliptisch, bei denen der zweiten Art auf dem hyperbolisch gekrümmten Theile der Fläche) wird in diesen Figuren zur Anschauung gebracht.

Die Flecnodalcurve in erster Annäherung.

7. Nimmt man den Anfangspunkt eines neuen parallelen Coordinatensystems im Punkte x, y, z der Fläche, dann wird die neue Gleichung der Fläche:

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial z}{\partial y} y' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} x'^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} x' y' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} y'^2 \right) + \dots \quad \dots 12)$$

Gehört jetzt der Punkt (x, y, z) zur Flecnodalcurve, dann muss es auf seiner Tangentialebene $z' = \frac{\partial z}{\partial x} x' + \frac{\partial z}{\partial y} y'$ eine Gerade $x' = m y'$ geben, die vierpunktige Tangente der Fläche ist. Dieses fordert:

$$m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 m \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots 13)$$

$$m^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3 m^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3 m \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0, \quad \dots 14)$$

¹ Man könnte glauben, dass $c_5 = 0$ ebenso wie $d_3 = 0$ einen Ausnahmefall bildete, weil sich die Punkte K_1 und K_2 dann ins Unendliche entfernen. Werden aber die Glieder höherer Ordnung hinzugezogen, dann zeigt es sich, dass hier keine andere Singularität vorliegt als diese: dass die Connodalcurve einen Wendepunkt besitzt im Anfangspunkte. Vergl. §. 8.

also für die Fläche der Gleichung 4):

$$2c_1m^2 + 4d_3ym + 2d_3x + 12e_5y^2 = 0 \quad \dots 15)$$

$$6d_3m + 24e_5y = 0. \quad \dots 16)$$

Hieraus erhält man durch Elimination von m für die Gleichung¹ der Flecnodalcurve:

$$x = \frac{2e_5(d_3^2 - 8c_1e_5)}{d_3^2} y^2. \quad \dots 17)$$

Spinodal-, Flecnodal- und Connodalcurven in zweiter Annäherung.

8. Da es wünschenswerth war, die in den Gleichungen 8), 10) und 17) in erster Annäherung dargestellten Connodal-, Spinodal- und Flecnodalcurven auch in zweiter Annäherung zu kennen, bin ich zu dieser Berechnung übergegangen und schreibe hier die erhaltenen Resultate nieder.²

Spinodalcurve:

$$x = \frac{d_3^2 - 6c_1e_5}{c_1d_3} y^2 + \frac{18c_1^2e_4e_5 - 12c_1d_2d_3e_5 - 10c_1^2d_3f_6 + d_2d_3^3}{c_1^2d_3^2} y^3 + \dots \quad \dots 18)$$

¹ Aus dieser Gleichung ist sofort das wohlbekannte Theorem abzuleiten, dass in einem Faltenpunkte Flecnodal- und Spinodalcurve (sowie auch die Connodalcurve) einander berühren. Es ist übrigens leicht, einen einfachen Grund anzugeben, wesshalb Flecnodal- und Spinodalcurve immer, wenn beide sich begegnen, eine gerade Anzahl aufeinanderfolgender Punkte gemein haben müssen. Es kann nämlich die Flecnodalcurve den hyperbolisch gekrümmten Theil der Fläche niemals verlassen, also die Spinodalcurve nicht schneiden, weil im elliptisch gekrümmten Theile die Wurzeln der Gleichung 13) conjugirt imaginär werden und also beide zugleich Wurzeln der cubischen Gleichung 14) sein oder nicht sein müssen. Der erste Fall tritt zwar ein bei gewissen vereinzelt gelegenen Punkten (Cayley's Flecnodalpunkten), diese bilden aber keine Curve.

Bei der in §. 2 gewählten Bezeichnungsweise der Coëfficienten der Gleichung der Fläche haben die zu demselben Coëfficienten gehörigen Glieder, wie $18c_1^2e_4e_5$, $12c_1d_2d_3e_5$ u. s. w. die drei folgenden Eigenschaften: 1. Die Anzahl der Buchstaben, $c_1c_1e_4e_5$ ist für alle Glieder die gleiche, 2. ebenso die Summe der Indices: $1+1+4+5$, 3. auch die Summe der Folgeummern der Buchstaben: $3+3+5+5$.

Flecnodalcurve:

$$x = \frac{2e_5(d_3^2 - 8c_1e_5)}{d_3^3} y^2 + \frac{2(d_3^2 - 4c_1e_5)(10d_3^3f_6 + 16d_2d_3c_5^2 - 10d_3^2e_4e_5 - 16c_1e_4e_5^2) + 48c_1d_3^2e_4e_5^2 - 128c_1d_2d_3e_5^2 + 6d_3^4e_4e_5 - 10d_3^5f_6}{d_3^6} y^3. \quad \dots 19)$$

Connodalcurve:

$$x = -\frac{2e_5}{d_3} y^2 + \frac{2(e_4e_5 - d_3f_6)}{d_3^2} y^3 + \quad \dots 20)$$

Gleichung 18) wird erhalten durch Substitution des Ausdruckes

$$x = \frac{d_3^2 - 6c_1e_5}{c_1d_3} y^2 + Ay^3$$

in 9), wo z jetzt aus 3) entnommen wird; Gleichung 19) durch Substitution von

$$x = \frac{2e_5(d_3^2 - 8c_1e_5)}{d_3^3} y^2 + By^3$$

und

$$m = -\frac{4e_5}{d_3} y + Cy^2$$

in 13) und 14).

9. Etwas verwickelter wird die Ableitung der Gleichung 20). Indem wir für die Gleichung der Connodalcurve schreiben:

$$x = -\frac{2e_5}{d_3} y^2 + Dy^3, \quad \dots 21)$$

substituieren wir in diese Gleichung, und in die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_2; \quad \dots 22)$$

$$z_1 - x_1 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 - y_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 = z_2 - x_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_2 - y_2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_2,$$

welche die Identität der Tangentialebenen der Punkte $K_1(x_1, y_1)$ und $K_2(x_1, y_1)$ bedingen, die Ausdrücke:

$$y_1 = y_0 + E y_0^2; \quad y_2 = -y_0 + E' y_0^2. \quad \dots 23)$$

Wir erhalten dann aus 21):

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2e_5}{d_3} y_0^2 + \left(D - \frac{4e_5 E}{d_3} \right) y_0^3; \\ x_2 &= -\frac{2e_5}{d_3} y_0^2 + \left(-D + \frac{4e_5 E'}{d_3} \right) y_0^3, \end{aligned} \quad \dots 24)$$

aus 22) aber:

$$2c_1 D + \frac{d_3^2 - 4c_1 e_5}{d_3} (E + E') + \frac{d_3 e_4 - 4d_2 e_5}{d_3} = 0, \quad \dots 25)$$

$$E = E', \quad \dots 26)$$

$$\begin{aligned} (d_3^2 - 2c_1 e_5) D + \frac{e_5(4c_1 e_5 - d_3^2)}{d_3} (E + E') + \\ + \frac{4d_2 e_5^2 - 3d_3 e_4 e_5 + 2d_3^2 f_6}{d_3} = 0. \end{aligned} \quad \dots 27)$$

also:

$$D = \frac{2(e_4 e_5 - d_3 f_6)}{d_3^2}. \quad \dots 28)$$

Der Doppelfaltenpunkt $d_3 = 0$.

10. In diesem Falle (wenn $d_3 = 0$) verlieren die Gleichungen 18) bis 20) ihre Giltigkeit.

Für die Gleichung der Spinodalcurve findet man dann aus 9) und 3) in erster Annäherung:

$$(c_1 e_3 - d_2^2) x^2 + 3c_1 e_4 x y + 6c_1 e_5 y^2 = 0. \quad \dots 29)$$

Diese Curve zeigt also im Anfangspunkte einen Doppelpunkt mit reellen oder imaginären Zweigen.

Was die Flecnodalcurve angeht, die Gleichungen 13) und 14) werden:

$$\begin{aligned} (2c_1 + \dots) m^2 + (4d_2 x + \dots) m + \\ + (2e_3 x^2 + 6e_4 x y + 12e_5 y^2 + \dots) = 0, \end{aligned} \quad \dots 30)$$

$$(6d_1 + \dots)m^3 + (6d_2 + \dots)m^2 + (12e_3x + 18e_4y + \dots)m + 6e_4x + 24e_5y + \dots = 0. \quad \dots 31)$$

Wegen 30) muss m von derselben Grössenordnung sein wie x und y ; aus 31) geht dann hervor, dass in erster Annäherung

$$x = -\frac{4e_5}{e_4}y. \quad \dots 32)$$

Wir setzen also: $x = -\frac{4e_5}{e_4}y + Ay^2$; $m = By$ und erhalten dann aus 30) eine quadratische Gleichung zur Berechnung von B , während aus 31) für jede Wurzel der zugehörige Werth von A berechnet werden kann. Es besteht also die Flecnodalcurve aus zwei einander berührenden reellen oder imaginären Zweigen; sie hat also im Anfangspunkte mit der Spinodalcurve vier Punkte gemein, und der Anfangspunkt gilt also als doppelter Faltenpunkt. Die Gleichung der Connodalcurve wollen wir hier nicht ableiten und nur das Resultat mittheilen. Auch diese Curve besitzt zwei reelle oder imaginäre Zweige und hat im Anfangspunkte vier Punkte mit der Spinodal-, sowie mit der Flecnodalcurve gemein.

Der Doppelfaltenpunkt $4c_1e_5 - d_3^2 = 0$.

11. Dass wir auch in diesem Falle ($4c_1e_5 - d_3^2 = 0$) mit einem Doppelfaltenpunkte zu schaffen haben, ergibt sich sofort durch Betrachtung der Gleichungen 18) und 19). Es ist nämlich, wenn $d_3^2 = 4c_1e_5$, auch $\frac{d_3^2 - 6c_1e_5}{c_1d_3} = \frac{2e_5(d_3^2 - 8c_1e_5)}{d_3^3} = -\frac{2e_5}{d_3}$. Es haben also jedenfalls Spinodal- und Flecnodalcurven drei Punkte gemein; dann muss aber, weil diese Curven sich nicht schneiden können (vergl. §. 7, die Note), noch ein vierter gemeinsamer Punkt hinzutreten. Dass dem wirklich so ist, kann mittelst der Gleichungen 18) und 19) gezeigt werden, denn die Coëfficienten von y^3 beider Gleichungen werden für $d_3^2 = 4c_1e_5$ wirklich einander gleich.

Dahingegen hat es bei Betrachtung der Gleichungen 18), 19) und 20) den Anschein, als hätten Connodal- und Spinodal-, sowie Connodal- und Flecnodalcurve nur zwei aufeinander-

folgende Punkte **gemein**, was aber unmöglich so sein kann, wenn der Anfangspunkt wirklich ein Doppelfaltenpunkt ist. Die Lösung dieses Widerspruches ist darin zu finden, dass die Gleichung 20) ihre Giltigkeit verloren hat. Das zeigen schon die Gleichungen 25) und 27), die, wenn $d_3^2 = 4c_1e_5$, einander ausschliessen.

Ohne hier weiter auf diese Sache einzugehen, will ich kurz sagen, wie sie sich verhält. Die Connodalcurve besteht aus zwei im Anfangspunkte sich berührenden Zweigen, deren Krümmungshalbmesser einander und denen der Spinodal- und Flecnodalcurve gleich sind. Jeder dieser Zweige, die übrigens stets imaginär sind, hat mit diesen Curven also drei Punkte **gemein**.¹

Zweiter Abschnitt.

Einleitung.

12. In diesem Theile unserer Arbeit werden wir uns mit dem Entstehen und Verschwinden von Faltenpunkten auf einer Fläche, deren Gestalt sich stetig ändert, beschäftigen. Wo es sich um singuläre Punkte handelt, die, wie Faltenpunkte, auf einer durch ihre Gleichung in Punkteordinaten bestimmten Fläche im Allgemeinen vereinzelt (d. h. ohne Curven zu bilden) vorkommen, kann man das Entstehen und Verschwinden immer als einen Übergang vom conjugirt Imaginären zum Reellen oder umgekehrt auffassen. Ein solcher Übergang aber kann nur dann stattfinden, wenn zwei oder mehr der betreffenden singulären Punkte **zusammenfliessen**. Will man also auf einer nach einem bestimmten Gesetze sich stetig ändernden Fläche das Entstehen und Verschwinden dieser Punkte studiren, dann braucht man nur auf das

¹ Im Ganzen also nicht vier, sondern sechs. Die Erklärung liegt darin, dass bekanntlich Spinodal- und Connodalcurve, sowie Flecnodal- und Connodalcurve, ausser den Faltenpunkten noch andere Punkte **gemein** haben, deren je zwei sich dem hier besprochenen Faltenpunkte anschliessen. In einer späteren Arbeit (vergl. hier §. 27) hoffe ich zu beweisen, dass das Auftreten dieser beiden Punkte bei der Spinodalcurve eine wichtige geometrische Bedeutung hat, nämlich, dass sich in der bei Umformung der Fläche aus dem isolirten Punkt entwickelnden Connodalcurve zwei Spitzen zeigen. Dort wird dann auch das Betragen der Connodalcurve bei den beiden Doppelfaltenpunkten vollständige Erklärung finden, was hier weitläufigere Auseinandersetzungen erfordern würde.

Auftreten solcher Punkte höherer Singularität achtzugeben, in denen mehrere dieser Punkte zusammengefloßen sind.

In erster Linie kommen dabei unter den Punkten höherer Singularität, welche diese Eigenschaft besitzen, diejenige in Betracht, zu deren Auftreten nur eine einzige Bedingung zwischen den Coëfficienten der sich deformirenden Fläche gefordert wird. Wir wollen diese Punkte als Ausnahmepunkte¹ erster Ordnung bezeichnen. Jede Fläche gegebener Ordnung kann in jede andere derselben Ordnung stetig umgeformt werden, ohne dass andere Ausnahmepunkte als die erster Ordnung dabei auftreten. Handelt es sich hingegen um eine nicht ganz freie, sondern durch eine gewisse Anzahl Parameter bedingte Deformation, auch dann können im Allgemeinen beim Übergange einer Fläche in eine andere alle Ausnahmepunkte höherer Ordnung vermieden werden, es kann aber Fälle geben, worin das unmöglich ist. In solchen Fällen können wir doch noch durch Einführung eines neuen geschickt gewählten Parameters die Ausnahmepunkte höherer Ordnung umgehen, und wir finden dann zugleich, dass diese aus bestimmten Ausnahmepunkten erster Ordnung zusammengesetzt sind. Wie wir zeigen werden, kommen, was unsere Faltenpunkte betrifft, nur vier verschiedene Arten von diesen Ausnahmepunkten erster Ordnung vor, nämlich die beiden schon besprochenen Doppelfaltenpunkte, weiter Osculations- und Knotenpunkte, die wir also in diesem Abschnitte auf Anzahl, Betragen und Natur der zusammengefloßenen Faltenpunkte untersuchen werden.

13. Wenn die Eigenthümlichkeit der zu betrachtenden singulären Punkte (wie z. B. der Umbilicalpunkte) oder ihre Eintheilung in Arten eine nicht projectivische ist, dann wird es nöthig, auch

¹ Nach dieser Auffassung sind also die Wendepunkte einer algebraischen Curve gegebener Ordnung singuläre, aber keine Ausnahmepunkte, Doppelpunkte hingegen Ausnahmepunkte erster, Spitzen zweiter Ordnung. Hat man mit Curven gegebener Classe zu thun, dann sind Spitzen und Doppelpunkte keine Ausnahmepunkte, conjugirte Berührungspunkte (einer Doppeltangente) und Wendepunkte solche erster, respective zweiter Ordnung. Ganz allgemein kann man innerhalb eines Systems von Flächen, die gewissen Bedingungen genügen müssen, Ausnahmepunkte erster, zweiter, dritter Ordnung auf diesen Flächen unterscheiden, je nach der Zahl der Bedingungen, die noch hinzukommen müssen, um ihr Auftreten zu bedingen.

den Übergang durch das Unendliche genau zu untersuchen. Es wäre dann nämlich möglich, dass beim Durchgang eines Punktes durch die unendliche Ebene regelmässig ein Zusammentreten mehrerer Punkte und Übergang vom Reellen zum Imaginären oder umgekehrt stattfinden sollte, oder auch, dass die Art der Punkte sich dabei änderte. Bei Faltenpunkten ist aber eine solche Untersuchung überflüssig, weil das Auftreten von Ausnahmepunkten in der unendlichen Ebene stets vermieden oder umgangen werden kann, während ein vereinzelter Faltenpunkt, wenn er bei stetiger Deformation der Fläche durch die unendliche Ebene geht, reell und gleichartig bleibt. Als stetig lassen wir dabei jede Deformation im Unendlichen gelten, welche sich in den projectivisch verwandten Räumen als eine solche zeigt.

Bestimmung der Ausnahmepunkte erster Ordnung, die zugleich vielfache Faltenpunkte sind.

14. Es handelt sich also erstens darum, die zu den vielfachen Faltenpunkten gehörigen Ausnahmepunkte erster Ordnung aufzufinden.

Die Gleichung einer Fläche in der Nähe eines ihrer Punkte kann, unter der Bedingung, dass dieser Punkt kein Knotenpunkt ist, stets in die Form

$$z = c_1 x^2 + c_3 y^2 + d_1 x^3 + \dots \quad \dots 33)$$

gebracht werden, wenn nämlich die Tangentialebene als XOY -Ebene, und auch weiter die OX - und OY -Axe zweckmässig gewählt werden. Soll nun der Anfangspunkt ein vielfacher Faltenpunkt sein, dann muss er jedenfalls auf der Spinodalcurve liegen, also c_1 , c_3 oder beide gleich Null sein. Im letzten Falle hat man mit einem Osculationspunkte zu thun, wo der Tangentialdurchschnitt im Anfangspunkte einen dreifachen Punkt zeigt. Ist hingegen nur c_1 oder c_3 gleich Null, dann muss, weil ein vielfacher Faltenpunkt auch zur Flecnodalcurve gehört, die Gleichung 33) nothwendig in die Form 3) gebracht werden können. Spinodal- und Connodalcurven sind dann bekannt (vergl. §. 8, und wenn $d_3 = 0$ §. 10) und die halbe Zahl ihrer gemeinsamen Punkte gibt die Anzahl der zusammengekommenen Faltenpunkte (weil in einem

einzigsten Faltenpunkte zwei ihrer Schnittpunkte enthalten sind). Mehrfache Faltenpunkte können also nur vorkommen, wenn

$$\frac{d_3^2 - 6c_1e_5}{c_1d_3} = \frac{2e_5(d_3^2 - 8c_1e_5)}{d_3^3},$$

d. h. $(d_3^2 - 4c_1e_5)^2 = 0$, oder wenn $d_3 = 0$. Man hat dann mit den beiden schon erwähnten Doppelfaltenpunkten zu schaffen. Es können also unter den Ausnahmepunkten erster Ordnung keine anderen vielfachen Faltenpunkte vorkommen¹ als diese beiden Arten von Doppelfaltenpunkten und möglicher Weise auch Knotenpunkte und Osculationspunkte. Diese singulären Punkte sind es also, die wir umzuformen und auf Anzahl, Art und Betragen der in ihnen enthaltenen Faltenpunkte zu untersuchen haben. Vorher aber wollen wir die Gleichungen aufstellen, die zur Berechnung der Faltenpunkte einer Fläche $z = f(x, y)$ und zur Bestimmung ihrer Art nöthig sind.

Berechnung der Faltenpunkte einer Fläche $z = f(x, y)$.

15. In §. 7 haben wir gesehen, dass in einem Faltenpunkte, als Punkt der Flecnodalcurve, die quadratische Gleichung 13) und die cubische 14) eine Wurzel gemein haben müssen. Weil der Faltenpunkt aber zugleich zur Spinodalcurve gehört, muss die Gleichung 13) zwei gleiche Wurzeln besitzen. Diese beiden Bedingungen sind erfüllt, wenn es möglich ist, einen Werth m zu bestimmen, welcher gleichzeitig den Gleichungen

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \dots 34)$$

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots 35)$$

$$m^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3m^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3m \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0 \quad \dots 36)$$

genügt.

¹ Systematischer, aber weitläufiger wäre dieser Beweis zu führen mittelst Auseinandertreibens der einzelnen Faltenpunkte nach dem in den folgenden Paragraphen skizzirten Verfahren.

Dieses Gleichungssystem werden wir im Folgenden in der Regel zur Bestimmung der Faltenpunkte benutzen. Ist nun x, y, m eine Lösung, dann hat man noch zu entscheiden, ob der zugehörige Faltenpunkt erster oder zweiter Art ist.

Bestimmung der Art.

16. Um diese Entscheidung herbeizuführen, wählen wir den Faltenpunkt als Anfangspunkt eines neuen, dem alten parallelen Coordinatensystems (der x', y', z'), dann wird die Gleichung der Fläche:

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} x' + \frac{\partial z}{\partial y} y' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (x' - my')^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} x'^3 + \dots \right) + \dots \quad (37)$$

Setzt man hier:

$$\begin{aligned} z'' &= z' - \frac{\partial z}{\partial x} x' - \frac{\partial z}{\partial y} y' \\ y'' &= y' \\ x'' &= x' - my' \text{ also } x' = x'' + my'', \end{aligned} \quad (38)$$

dann wird durch diese projectivische Transformation die Art des Faltenpunktes nicht verändert. Die neue Gleichung aber nimmt dann die Form 3) an, wo

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right); \quad d_3 = \frac{1}{6} \left(3m^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 6m \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \right); \\ e_5 &= \frac{1}{24} \left(m^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4m^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 6m^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 4m \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

und man hat also nach §. 2 mit einem Faltenpunkte erster oder zweiter Art zu schaffen, je nachdem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[m^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4m^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 6m^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 4m \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right] - \\ - 3 \left[m^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2m \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \right]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Umformung des Doppelfaltenpunktes $d_3 = 0$.

17. Wir fangen jetzt an mit der Untersuchung des in §. 10 besprochenen Doppelfaltenpunktes.

Eine veränderliche Fläche $F(x, y, z, p) = 0$ besitze für einen gewissen Werth des Parameters p , den wir im Folgenden den kritischen Werth nennen werden, einen Doppelfaltenpunkt dieser Art. Die Gleichung der Fläche wird dann nach §. 2 für diesen Werth des Parameters und bei passender Wahl des Coordinatensystems in die Form

$$z = [c_1 x^2 + e_5 y^4] + [d_2 x^2 y + e_4 x y^3 + f_6 y^5] + \dots \quad \dots 41)$$

gebracht werden können. Für einen um Δp grösseren Werth des Parameters gilt also die Gleichung

$$z = \alpha_1 + \beta_1 x + \beta_2 y + \gamma_2 x y + \gamma_3 y^2 + \delta_3 x y^2 + \delta_4 y^3 + \\ + [c_1 x^2 + e_5 y^4] + [d_2 x^2 y + e_4 x y^3 + f_6 y^5] + \dots \quad \dots 42)$$

in welcher, wie immer im Folgenden, die griechischen Buchstaben Coëfficienten von der Grössenordnung Δp vorstellen.

Zur Bestimmung der auf dieser umgeformten Fläche liegenden Faltenpunkte dienen uns jetzt die Gleichungen 34), 35) und 36). Nehmen wir vorläufig¹ an, x, y, m seien untereinander von derselben Grössenordnung, dann erhalten wir, wenn wir alle Glieder fortlassen, welche dann von geringerer Grössenordnung als die höchstvorkommende sind:

$$2 c_1 m + 2 d_2 x + \gamma_2 = 0 \quad \dots 43)$$

$$2 d_2 m x + 2 \gamma_3 + 12 e_5 y^2 + 6 e_4 x y + 2 e_3 x^2 = 0 \quad \dots 44)$$

$$24 e_5 y + 6 e_4 x + 6 \delta_4 = 0. \quad \dots 45)$$

Da aus 44) hervorgeht, dass x und y und m von der Grössenordnung $\sqrt{\Delta p}$ sein müssen, dürfen wir in 43) und 45) noch die letzten Glieder vernachlässigen. Ohne weitere Schwierigkeit ergibt sich dann die Lösung:

¹ Wenn eine solche Voraussetzung nicht zutrifft, ergibt sich das daraus, dass die Gleichungen einander widersprechen oder für einige der Grössen Nulllösungen geben. Dass sie richtig war, kann hinterher bewiesen werden, indem man verificirt, dass bei der gefundenen Lösung die fortgelassenen Glieder wirklich von geringerer Grössenordnung waren als die berücksichtigten.

$$x = -\frac{4e_5}{e_4}y; \quad m = \frac{4d_2e_5}{c_1e_4}y; \quad \dots 46)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{e_1e_4^2\gamma_3}{6c_1e_4^2e_5 + 16d_2^2e_5^2 - 16c_1e_3e_5^2}}$$

Es spaltet sich also der Doppelfaltenpunkt $d_3 = 0$ bei Umformung in zwei Faltenpunkte. Weil γ_3 zugleich mit Δp das Zeichen wechselt, so findet beim Durchgang von p durch den kritischen Werth im Allgemeinen¹ Übergang vom Reellen zum Imaginären statt. Weil schliesslich in 40) das Hauptglied den Werth $2c_1(24e_5)$ erhält, so sind die beiden reellen Faltenpunkte gleichartig und werden wir desshalb den bei ihrem Zusammenkommen entstehenden Doppelfaltenpunkt als homogenen Doppelfaltenpunkt bezeichnen.

Umformung des heterogenen Doppelfaltenpunktes

$$4c_1e_5 - d_3^2 = 0.$$

18. Für einen dem kritischen sich nähernden Werth des Parameters kann die Gleichung der Fläche geschrieben werden:

$$z = \alpha_1 + \beta_1x + \beta_2y + \gamma_2xy + \gamma_3y^2 + \delta_4y^3 + [c_1x^2 + d_3xy^2 + e_5y^4] + [d_2x^2y + e_4xy^3 + f_6y^5] + \dots 47)$$

Die Voraussetzung, dass x, y, m gleiche Grössenordnung besitzen, würde jetzt zu den Gleichungen

$$2c_1m + 2d_3y + 2d_2x + \gamma_2 = 0 \quad \dots 48)$$

$$2d_3x + 2\gamma_3 = 0 \quad \dots 49)$$

$$6d_3m + 24e_5y + 6c_4x + 6\delta_4 = 0 \quad \dots 50)$$

führen. Durch Substitution von x aus 49) in 48) und 50) entstehen dann aber zwei Gleichungen in m und y , die, weil im vorliegenden Falle $4c_1e_5 - d_3^2$ für den kritischen Werth Null, für $p + \Delta p$ von der Grössenordnung Δp ist, zu endlichen Werthen Veranlassung

¹ Möglich ist es allerdings, dass nach dem Auftreten eines Doppelfaltenpunktes $d_3 = 0$ bei weiterer Umformung der Fläche die vorher reellen Faltenpunkte nicht imaginär werden, sondern wieder reell auseinandergehen. Ein solches Auftreten eines Ausnahmepunktes erster Ordnung, wobei die im Allgemeinen dieses Auftreten begleitenden Erscheinungen fortbleiben, kann als nicht effectiv bezeichnet werden. Bei der freien Umformung einer Fläche gegebener Ordnung in eine andere kann ein nicht-effectives Auftreten von Ausnahmepunkten stets vermieden werden.

geben. Die Voraussetzung der gleichen Grössenordnung erweist sich also als falsch. Nehmen wir hingegen an, x sei mit y^2 und m^2 von derselben Grössenordnung, nämlich von der Grössenordnung Δp , dann erhalten wir aus 34), 35) und 36):

$$2c_1m + 2d_3y + |2d_2ym + \gamma_2 + 2d_2x + 3e_4y^2| = 0 \quad \dots 51)$$

$$2d_3ym + 2\gamma_3 + 2d_3x + 12e_3y^2 = 0 \quad \dots 52)$$

$$6d_3m + 24e_3y + [6d_2m^2 + 18e_4ym + 6e_4x + 60f_6y^2 + 6\delta_4] = 0. \quad \dots 53)$$

Multipliziert man jetzt 51) mit $3d_3$, 53) mit c_1 und subtrahirt, dann erhält man, wenn man das Glied $6(d_3^2 - 4c_1e_3)y$ vernachlässigt, weil es von der Grössenordnung $(\Delta p)^2$ ist:

$$-6c_1d_2m^2 + (6d_2d_3 - 18c_1e_4)ym + (9d_3e_4 - 60c_1f_6)y^2 + \\ + (6d_2d_3 - 6c_1e_4)x + 3d_3\gamma_2 - 6c_1\delta_4 = 0 \dots 54)$$

Nach 51) und 53) ist aber in erster Annäherung

$$m = -\frac{d_3}{c_1}y = -\frac{4e_3}{d_3}y, \quad \dots 55)$$

nach 52)

$$x = -\frac{\gamma_3}{d_3} - \frac{d_3y^2}{2c_1} \quad \dots 56)$$

und endlich nach 54):

$$y^2 = \frac{c_1d_3^2\gamma_2 - 2c_1^2d_3\delta_4 + 2c_1(c_1e_4 - d_2d_3)\gamma_3}{5d_2d_3^3 - 10c_1d_3^2e_4 + 20c_1^2f_6d_3}. \quad \dots 57)$$

Weil also y^2 zugleich mit Δp das Zeichen wechselt, findet, wenn sich ein Doppelpunkt dieser Art auf der veränderlichen Fläche zeigt, auch hier im Allgemeinen Übergang vom Reellen zum Imaginären statt.

In 40) wird jetzt das constante Glied gleich

$$2c_1 \cdot 24e_3 - 3(2d_3)^2 = 12(4c_1e_3 - d_3^2)$$

und ist also von der Ordnung Δp . Darum tritt hier, nachdem der Werth von m aus 55) in 40) substituirt ist, als Hauptglied auf das Glied mit der ersten Potenz von y (Ordnung) $\Delta p^{\frac{1}{2}}$; weil aber nach 57) die beiden Faltenpunkte im Zeichen entgegen-

gesetzte y besitzen, so sind sie ungleichartig. In einem heterogenen Doppelfaltenpunkte $4c_1e_5 - d_3^2 = 0$ kommen also zwei ungleichartige Faltenpunkte zusammen und werden dann imaginär.

Umformung der Osculationspunkte.

19. Beim Auftreten eines Osculationspunktes ist die Gleichung der Fläche für einen dem kritischen sich nähernden Werth des Parameters:

$$z = \alpha_1 + \beta_1 x + \beta_2 y + \gamma_1 x^2 + \gamma_2 xy + \gamma_3 y^2 + d_1 x^3 + d_2 x^2 y + d_3 xy^2 + d_4 y^3 + \dots \quad \dots 58)$$

Als die richtige Voraussetzung gilt hier: m endlich, x, y gleicher Grössenordnung. Dann entstehen aus 34), 35) und 36), respective:

$$2m\gamma_1 + 6d_1 xm + 2d_2 ym + \gamma_2 + 2d_2 x + 2d_3 y = 0 \quad \dots 59)$$

$$m\gamma_2 + 2d_2 xm + 2d_3 ym + 2\gamma_3 + 2d_3 x + 6d_4 y = 0 \quad \dots 60)$$

$$6d_1 m^3 + 6d_2 m^2 + 6d_3 m + 6d_4 = 0. \quad \dots 61)$$

Mit jeder reellen Lösung der Gleichung 61) correspondirt ein reeller Faltenpunkt. Übergang vom Reellen zum Imaginären findet nicht statt. Gleichung 61) ist identisch mit der Gleichung zur Berechnung der Tangente im dreifachen Punkte des Tangentialschnittes im Osculationspunkte. Weil weiter in 40) das quadratische Glied mit negativem Vorzeichen das andere übertrifft, können wir den Satz aussprechen: In jedem Osculationspunkte sind drei Faltenpunkte zusammengefloßen. Die Anzahl der reellen (ein oder drei) Faltenpunkte ist gleich der Anzahl der reellen Zweige des Tangentialschnittes. Die reellen Faltenpunkte sind immer zweiter Art. Übergang vom Reellen zum Imaginären oder umgekehrt findet nicht statt.

Bestimmung der Faltenpunkte einer Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$.

20. In der unmittelbaren Umgebung eines Knotenpunktes ist die Reihenentwicklung 1) nicht mehr zulässig und der in §. 15

betretene Weg wird also unzugänglich, wenn es sich um die Bestimmung des bei der Umformung eines Knotenpunktes auseinandergehenden Faltenpunkte handelt.

Wir müssen also vorher zweckmässige¹ Formeln ableiten zur Berechnung der Faltenpunkte einer Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, wo z nicht explicit in x und y ausgedrückt worden ist.

Es sei der Punkt P mit Coordinaten x, y, z ein Faltenpunkt der Fläche und zugleich Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystems der x', y', z' , dann kann die neue Gleichung der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ geschrieben werden:

$$H'_1 + H'_2 + H'_3 + \dots = 0, \quad \dots 62)$$

wo

$$H'_n = \frac{1}{1.2 \dots n} \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} \right)^n \varphi. \quad \dots 63)$$

Die Gleichung der Tangentialebene in P ist dann

$$H'_1 = 0, \quad \dots 64)$$

und diese Ebene muss, weil der Punkt P zur Spinodalcurve gehört und also die beiden Tangenten des Tangentialschnittes zusammenfallen, den Kegel

$$H'_2 = 0 \quad \dots 65)$$

berühren. Für einen Punkt Q der Berührungsgerade gelten also die Gleichungen 64) und 65). Ausserdem aber ist für einen solchen Punkt

$$\frac{\frac{\partial H'_2}{\partial x'}}{\frac{\partial H'_1}{\partial x'}} = \frac{\frac{\partial H'_2}{\partial y'}}{\frac{\partial H'_1}{\partial y'}} = \frac{\frac{\partial H'_2}{\partial z'}}{\frac{\partial H'_1}{\partial z'}}, \quad \dots 66)$$

weil nämlich die Tangentialebene des Kegels mit $H'_1 = 0$ identisch sein muss. Weil nun aber diese Berührungsgerade, d. h. die

¹ Die Betrachtung der Faltenpunkte als Schnittpunkte dreier bekannter Flächen (Salmon-Fiedler, Allgemeine Geometrie des Raumes, 3. Aufl., §. 477, S. 623), die zum Beispiel zur Bestimmung der Anzahl der Faltenpunkte einer Fläche n^{ter} Ordnung führt, liefert ein unserem Zwecke wenig angemessenes System der Gleichungen.

Tangente des Tangentialschnittes im Faltenpunkte, die Fläche vierfach in P schneiden muss, so ist auch noch:

$$H'_3 = 0. \quad \dots 67)$$

Die Gleichungen 64), 66), 67) und die Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ der gegebenen Fläche genügen dann aber zur Berechnung der Unbekannten x, y, z und der Verhältnisse $x' : y' : z'$.

Bestimmung der Art.

21. Es sei x', y', z' ein Punkt Q der erwähnten Berührungsgerechten PQ , $x' + \xi\lambda, y' + \eta\lambda, z' + \zeta\lambda$ ein ausser dieser Geraden in der Tangentialebene gelegener Punkt R , dann ist nothwendig

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad \dots 68)$$

Betrachtet man jetzt ξ, η, ζ als constante und endliche Coëfficienten, welche die Richtung der Geraden QR bestimmen und λ als eine veränderliche kleine Grösse, dann beschreibt der Punkt R eine durch Q in der Tangentialebene des Faltenpunktes P gezogene Gerade, deren Schnittpunkte mit der Fläche durch Substitution der Coordinaten $x' + \xi\lambda, y' + \eta\lambda, z' + \zeta\lambda$ in 62) bestimmt werden können. Achtet man auf die Gleichungen 64), 65), 66), 67) und 68), dann ergibt diese Substitution in erster Annäherung:¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x'} + \eta \frac{\partial}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial}{\partial z'} \right)^2 H'_2 \cdot \lambda^2 + \\ + \left(\xi \frac{\partial}{\partial x'} + \eta \frac{\partial}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial}{\partial z'} \right) H'_3 \cdot \lambda + H'_4 = 0. \end{aligned} \quad \dots 69)$$

Diese quadratische Gleichung in λ wird also, wenn man mit einem Faltenpunkte zweiter Art zu schaffen hat, reelle, im entgegengesetzten Falle imaginäre Wurzeln besitzen müssen. Es

¹ Das Glied $\left(\xi \frac{\partial}{\partial x'} + \eta \frac{\partial}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial}{\partial z'} \right) H'_2$ fällt fort wegen 66) und 68),

und weil $\frac{\partial H'_1}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ u. s. w. Es ist λ von der Grössenordnung x'^2, y'^2, z'^2 .

ist also ein Faltenpunkt erster oder zweiter Art anwesend, je nachdem

$$S' = 2H'_4 \cdot S - A^2 \geq 0, \quad (70)$$

wobei

$$S = \left(\xi \frac{\partial}{\partial x'} + \eta \frac{\partial}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial}{\partial z'} \right)^2 H'_2. \quad (71)$$

$$A = \left(\xi \frac{\partial}{\partial x'} + \eta \frac{\partial}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial}{\partial z'} \right) H'_3. \quad \dots (72)$$

Selbstverständlich muss nun diese Bedingung (70), wenn an (68) festgehalten wird, das heisst, wenn der Punkt R in der Tangentialebene des Faltenpunktes bleibt, von der Wahl der durch ξ , η , ζ angedeuteten Richtung unabhängig sein. Dass dem wirklich so ist, ergibt sich aus folgenden Betrachtungen.

Es seien ξ , η , ζ die Cartesischen Coordinaten eines Punktes, dann repräsentirt die Gleichung $S = 0$ einen Kegel, der, wenn wir ξ , η , ζ auf dieselben Coordinatenebenen wie x' , y' , z' beziehen, identisch ist mit dem Kegel (65) und also durch die Ebene

$$B = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (73)$$

identisch mit (64) tangirt wird. Die Berührungsgerade, identisch mit PQ , liegt aber ausserdem in der Ebene $A = 0$ (wenn x' , y' , z' in A als die Coordinaten des Punktes Q aufgefasst werden), denn durch die Substitution

$$\frac{\xi}{x'} = \frac{\eta}{y'} = \frac{\zeta}{z'} \quad (x', y', z' \text{ Coordinaten des Punktes } Q) \quad (74)$$

genügt man, wie aus (67) folgt, der Gleichung dieser Ebene $A = 0$.

Der Kegel $S = 0$ wird also durch die Ebene $B = 0$ in der Geraden $B = 0$, $A = 0$ tangirt, und bekanntlich lässt sich dann seine Gleichung in die Gestalt

$$S = kA^2 + (k_1\xi + k_2\eta + k_3\zeta)B = 0 \quad \dots (75)$$

bringen.

Dann repräsentirt aber auch die Gleichung

$$S' = 2H'_4 \cdot S - A^2 = (2kH'_4 - 1)A^2 + 2(k_1\xi + k_2\eta + k_3\zeta)H'_4B = 0 \quad \dots (76)$$

einen durch die Ebene $B = 0$ tangirten Kegel.

Nennen wir jetzt den durch die reellen Tangentialebenen eines Kegels zweiter Ordnung beschriebenen Raum den äusseren Raum dieses Kegels, dann handelt es sich nach 70) nur noch darum, das Zeichen von S' im Punkte ξ, η, ζ , also, weil dieser Punkt immer auf der Tangentialebene 73) des Kegels $S' = 0$ liegt, im äusseren Raum dieses Kegels zu bestimmen. Dieses Zeichen nun ist dem des Discriminanten der Function S' entgegengesetzt. Für den besonderen Fall $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ lässt sich dieses Theorem sehr leicht beweisen. Dann muss es aber allgemein giltig sein, denn durch die zu einer Coordinatentransformation gehörigen linearen Substitutionen wird das Zeichen des Discriminanten nicht verändert.

22. Wir können also die Bedingung 70) ersetzen durch:

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial x'} \right)^2; & 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial x' \partial y'} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial H'_3}{\partial y'} \right); & 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial x' \partial z'} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial H'_3}{\partial z'} \right) \\ 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial x' \partial y'} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial H'_3}{\partial y'} \right); & 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial y'} \right)^2; & 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial y' \partial z'} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial H'_3}{\partial z'} \right) \\ 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial x' \partial z'} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial H'_3}{\partial z'} \right); & 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial y' \partial z'} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial H'_3}{\partial z'} \right); & 2 H'_4 \cdot \frac{\partial^2 H'_2}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial H'_3}{\partial z'} \right)^2 \end{array} \right| \leq 0. \quad 77)$$

Entwickelt man hier nach den Potenzen von H'_4 , so fallen die Glieder der ersten und nullten Potenz weg. Dividirt man dann durch $4H'_4{}^2$, so erhält man schliesslich, dass ein gegebener Faltenpunkt zur ersten oder zweiten Art gehört, je nachdem

$$2 \cdot \Delta'_1 \cdot H'_4 + \Delta'_2 \leq 0, \quad 78)$$

W0

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x'^2} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta y'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta z'} \\ \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta y'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta y'^2} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta y' \delta z'} \\ \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta z'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta y' \delta z'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta z'^2} \end{vmatrix}; \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x'^2} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta y'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta z'} & \frac{\delta H'_3}{\delta x'} \\ \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta y'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta y'^2} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta y' \delta z'} & \frac{\delta H'_3}{\delta y'} \\ \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta z'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta y' \delta z'} & \frac{\delta^2 H'_2}{\delta z'^2} & \frac{\delta H'_3}{\delta z'} \\ \frac{\delta H'_3}{\delta x'} & \frac{\delta H'_3}{\delta y'} & \frac{\delta H'_3}{\delta z'} & 0 \end{vmatrix} \quad (79)$$

Hier lässt sich mittelst 65) und 67) der Ausdruck Δ'_2 noch sehr vereinfachen, wobei aber die Symmetrie verloren geht. Durch geeignete Multiplication und Addition der Reihen und Zeilen findet man nämlich leicht:

$$\Delta'_2 = \frac{1}{x'^2 y'^2 z'^2} \begin{vmatrix} x'^2 \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x'^2} & x' y' \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta y'} & x' \frac{\delta H'_2}{\delta x'} & x' \frac{\delta H'_3}{\delta x'} \\ x' y' \frac{\delta^2 H'_2}{\delta x' \delta y'} & y'^2 \frac{\delta^2 H'_2}{\delta y'^2} & y' \frac{\delta H'_2}{\delta y'} & y' \frac{\delta H'_3}{\delta y'} \\ x' \frac{\delta H'_2}{\delta x'} & y' \frac{\delta H'_2}{\delta y'} & 0 & 0 \\ x' \frac{\delta H'_3}{\delta x'} & y' \frac{\delta H'_3}{\delta y'} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{z'^2} \begin{vmatrix} \frac{\delta H'_2}{\delta x'} & \frac{\delta H'_3}{\delta x'} \\ \frac{\delta H'_2}{\delta y'} & \frac{\delta H'_3}{\delta y'} \end{vmatrix}^2 \quad (80)$$

Es ist also Δ'_2 immer eine positive Grösse, was in Übereinstimmung ist mit der bekannten Thatsache, dass bei Flächen dritter Ordnung, wo $H'_4 = 0$, nur Faltenpunkte zweiter Art auftreten.

Umformung eines Knotenpunktes.

23. Die Gleichung der veränderlichen Fläche kann kurz vor oder nach dem Entstehen eines Knotenpunktes unter Anwendung einer leicht begreiflichen Bezeichnungswiese geschrieben werden:

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta z + H_2 + H_3 + H_4 + \dots = 0, \quad \dots 81)$$

oder, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten einer geeigneten Verschiebung unterwerfen:

$$\varphi = \alpha + H_2 + H_3 + H_4 + \dots = 0. \quad \dots 82)$$

Die Gleichungen 64), 66) und 67), deren Lösung in Combination mit 82) uns die Coordinaten x, y, z der Faltenpunkte und die Richtungen ($x' : y' : z'$) der Tangenten der zugehörigen Tangentialschnitte liefert, schreiben sich dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' = 0 \quad \dots 83)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} x' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} z' - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \dots 84)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} x' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} z' - u \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \dots 85)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} x' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z' - u \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \dots 86)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} x' + \frac{\partial}{\partial y} y' + \frac{\partial}{\partial z} z' \right)^3 \varphi = 0, \quad \dots 87)$$

wo u den gemeinsamen Werth der Quotienten 66) darstellt.

Wir bemerken nun zuerst, dass den Gleichungen 84), 85) und 86) in erster Annäherung durch die Annahme

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = u$$

genügt wird, weil dann die von H_2 in 82) abhängigen Glieder fortfallen. In Übereinstimmung mit dieser Thatsache substituiren wir in unserem Systeme von Gleichungen:

$$x' = u(x + \xi); \quad y' = u(y + \eta); \quad z' = u(z + \zeta). \quad \dots 88)$$

Wir erhalten dann, indem wir zur Abkürzung setzen

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} \xi + \frac{\partial H_2}{\partial y} \eta + \frac{\partial H_2}{\partial z} \zeta = U_2 \quad \dots 89)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x} \xi + \frac{\partial H_3}{\partial y} \eta + \frac{\partial H_3}{\partial z} \zeta = U_3 \quad \dots 90)$$

und jede Gleichung nur so weit niederschreiben, als wir im Folgenden ihre Glieder gebrauchen werden:

$$2H_2 + 3H_3 + 4H_4 + U_2 + U_3 = 0 \quad \dots 91)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x} + 2 \frac{\partial H_4}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial x} = 0 \quad \dots 92)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} + 2 \frac{\partial H_4}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial y} = 0 \quad \dots 93)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial z} + 2 \frac{\partial H_4}{\partial z} + \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial z} = 0 \quad \dots 94)$$

$$6H_3 + 24H_4 + 6U_3 = 0. \quad \dots 95)$$

Berücksichtigen wir jetzt in erster Linie in jeder Gleichung nur die Glieder der höchsten Grössenordnung, dann kann aus 92) bis 94) geschlossen werden, dass ξ , η , ζ zur Grössenordnung x^2 gehören, und dann aus 91) und 95), dass die Coordinatenverhältnisse $x:y:z$ den Gleichungen $H_2 = 0$ und $H_3 = 0$ genügen müssen. Zur Bestimmung der Coordinaten selbst muss man aber auch auf die Glieder geringerer Grössenordnung eingehen.

Multiplirt man 92) bis 94), respective mit x , y , z , dann erhält man nach Summation:

$$3H_3 + 8H_4 + U_2 + 2U_3 = 0. \quad \dots 96)$$

Diese Gleichung, combinirt mit 91) und 95), erlaubt uns, H_2 , H_3 und U_2 in Glieder der Ordnung x^4 auszudrücken. Man findet:

$$H_3 = -4H_4 - U_3 \quad \dots 97)$$

$$U_2 = 4H_4 + U_3 \quad \dots 98)$$

$$H_2 = 2H_4 + \frac{1}{2}U_3. \quad \dots 99)$$

Substitution dieser Werthe in die Gleichung 82) der Fläche ergibt dann

$$H_4 + \frac{1}{2}U_3 = \alpha, \quad \dots 100)$$

und es handelt sich noch nur um die Berechnung von U_3 , d. h. um Auflösung von ξ , η , ζ aus 92) bis 94) und Substitution in U_3 . Die Gleichungen 92) bis 94) können aber in erster Annäherung geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} \xi + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} \eta + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial z} \zeta + \frac{\partial H_3}{\partial x} = 0 \quad \dots 101)$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} \xi + \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} \eta + \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial z} \zeta + \frac{\partial H_3}{\partial y} = 0 \quad \dots 102)$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial z} \xi + \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial z} \eta + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \zeta + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0, \quad \dots 103)$$

und wenn wir jetzt wieder in Übereinstimmung mit 79) die Bezeichnungsweise

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial H_3}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial H_3}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} & \frac{\partial H_3}{\partial z} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} & \frac{\partial H_3}{\partial y} & \frac{\partial H_3}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} \quad \dots 104)$$

einführen, dann findet man leicht als Resultat der Substitution:

$$U_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad \dots 105)$$

Zur Berechnung der Faltenpunkte eines umgeformten Knotenpunktes erhalten wir also schliesslich die Gleichungen

$$H_2 = 0 \quad \dots 106)$$

$$H_3 = 0 \quad \dots 107)$$

$$H_4 + \frac{\Delta_2}{2\Delta_1} = \alpha, \quad \dots 108)$$

wo der Ausdruck Δ_2 sich mittelst 106) und 107) noch wie Δ'_2 in §. 22 vereinfachen lässt. Es ist nämlich:

$$\Delta_2 = \frac{1}{z^2} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_3}{\partial y} \end{array} \right|^2 \quad \dots 109)$$

Setzen wir $y = mx$; $z = nx$, dann genügen die Gleichungen 106) und 107) zur Berechnung von m und n , indem dann mittelst 108), wo Δ_1 eine Zahl und Δ_2 einen Ausdruck vierter Ordnung in x, y, z bezeichnet, zu jeder der sechs Lösungen m, n ein Werth von x^4 gefunden wird.

Im Ganzen sind also 24 Faltenpunkte vorhanden, von welchen aber wenigstens die Hälfte imaginär sein muss.

24. Bei der weiteren Discussion haben wir jetzt die beiden Fälle zu unterscheiden, dass der Tangentenkegel $H_2 = 0$ reell, oder dass er imaginär ist. Im zweiten Falle ist der Knotenpunkt ein isolirter Punkt, zu dem ein Blatt der Fläche zusammengeschrumpft ist. Weil dann keine reellen Werthe für m und n existiren können, sind alle 24 Faltenpunkte imaginär.

Auf einem sich aus einem isolirten Punkte neu entwickelnden Blatte einer Fläche befinden sich anfänglich keine reellen Faltenpunkte.

Besitzt der Knotenpunkt hingegen einen reellen Tangentenkegel, dann stossen in ihn zwei Flächentheile zusammen, die sich nach Auflösung des Knotens entweder trennen oder verbinden.¹ Weil nun das Zeichen des Ausdruckes H_2 im inneren Raum des Kegels, wie wir in §. 21 bewiesen haben, mit dem

¹ Vergl. Klein, Mathem. Ann., Bd. VI, 1873: Über Flächen dritter Ordnung, S. 552.

Zeichen vom Discriminanten Δ_1 übereinstimmt, so wird bei der Fläche 82) der Zustand der Verbindung oder der Trennung vorhanden sein, je nachdem $\alpha\Delta_1 \geq 0$, denn am Zeichen von α kann man sofort ablesen, ob der Anfangspunkt nach der Umformung dem inneren Raume, wo φ im Zeichen mit Δ_1 übereinstimmt, oder dem äusseren Raume des Tangentenkegels einverleibt worden ist. Besitzen also α und Δ_1 gleiche Zeichen, dann hat sich der innere Raum ausgebreitet und Verbindung hat stattgefunden; im entgegengesetzten Falle Trennung. Weil nun α in erster Annäherung mit Δp proportional ist, also zugleich mit Δp das Zeichen wechselt, wird im Allgemeinen bei jedem Durchgange des Parameters p durch einen kritischen Werth, der das Auftreten eines Knotenpunktes mit sich bringt, eine Trennung früher verbundener oder eine Verbindung früher getrennter Flächentheile eintreten.

Nach diesen Bemerkungen ist es leicht, folgende Regel festzustellen:

Mit jeder reellen Lösung m, n , oder — was dasselbe ist — mit jeder durch den Knotenpunkt der Fläche $H_2 + H_3 = 0$ gehenden reellen Geraden, correspondiren vier Faltenpunkte. Von diesen vieren sind zwei fortwährend imaginär, die zwei anderen sind reell oder imaginär, je nach dem Zeichen von α ; sie treten also entweder bei den verbundenen oder bei den getrennten Flächentheilen als reelle Faltenpunkte auf, um im Augenblicke der Trennung oder der Verbindung imaginär zu werden.

25. Was schliesslich die Art der bei der Umformung eines Knotenpunktes entstehenden Faltenpunkte anbelangt, dafür gilt folgende einfache Regel:

Die bei der Trennung reell werdenden Faltenpunkte sind erster Art, die bei Verbindung reell werdenden zweiter Art.

Man hat nämlich zur Bestimmung der Art in 78), wegen 88) (in welchen letzten Gleichungen in erster Annäherung ξ, τ, ζ fortgelassen werden können) zu substituiren: $x' = ux, y' = uy, z' = uz$. Dadurch transformirt sich diese Bedingung 78), wenn

man nur auf die Glieder der höchsten Grössenordnung achtet, in

$$2\Delta_1 \cdot H_4 + \Delta_2 \leq 0, \quad \dots 110)$$

was sich mittelst 108) in

$$2\alpha\Delta_1 \leq 0 \quad \dots 111)$$

umsetzen lässt. Nach §. 24 aber findet Trennung oder Verbindung statt, je nachdem $\alpha\Delta_1 \leq 0$.

Zusammenstellung der erhaltenen Resultate.

26. Wir wollen jetzt die in diesem Abschnitte erhaltenen Resultate noch einmal kurz zusammenfassen.

Wenn eine Fläche einer stetigen Umformung unterworfen ist und dabei das Auftreten von Ausnahmepunkten höherer Ordnung, sowie das nicht effective Auftreten solcher erster Ordnung (vergl. §. 17, die Note auf S. 21) vermieden wird, kann das Reell- oder Imaginärwerden von Faltenpunkten nur in den Augenblicken geschehen, wo sich auf der Fläche einer von den folgenden vier Ausnahmepunkten erster Ordnung zeigt: homogene Doppelfaltenpunkte ($d_3=0$); heterogene Doppelfaltenpunkte ($d_3^2-4c_1e_3=0$); Osculationspunkte, Knotenpunkte.

In den homogenen Doppelfaltenpunkten kommen zwei gleichartige Faltenpunkte zusammen. Übergang vom Reellen zum Imaginären findet statt.

In den heterogenen Doppelfaltenpunkten kommen zwei ungleichartige Faltenpunkte zusammen. Übergang vom Reellen zum Imaginären findet statt.

In den Osculationspunkten kommen so viele (ein oder drei) reelle Faltenpunkte zusammen, als der Tangentialschnitt reelle Zweige zeigt. Diese Faltenpunkte sind immer zweiter Art. Übergang vom Reellen zum Imaginären findet nicht statt. Die ganze Zahl der zusammengekommenen Faltenpunkte (reell und imaginär) ist drei.

In einem Knotenpunkte kommen im Ganzen 24 Faltenpunkte zusammen. Ist der Knotenpunkt ein isolirter Punkt, dann sind alle 24 imaginär. Stossen hingegen im Knotenpunkte zwei Flächentheile zusammen, dann ist die Zahl der bei der Umformung auftretenden reellen Faltenpunkte gleich der doppelten Zahl der bei einer gewissen abgeleiteten Fläche dritter Ordnung durch

den Knotenpunkt gehenden reellen Geraden. Diese Fläche dritter Ordnung erhält man, wenn man in die Gleichung der gegebenen Fläche mit dem Knotenpunkte als Anfangspunkt der Coordinaten alle Glieder vierter und höherer Ordnung fortlässt. Diese Faltenpunkte werden paarweise entweder bei der Trennung reell, bei der Verbindung imaginär und sind dann erster Art; oder sie werden reell bei Verbindung, imaginär bei Trennung und sind dann zweiter Art.

Bemerkenswerth ist es weiter, dass Änderung der Art eines Faltenpunktes gar nicht vorkommen kann. Dazu würde der Ausdruck $d_3^2 - 4c_1e_5$ das Zeichen wechseln müssen, also Null werden. Dieses geschieht aber nur in Doppelfaltenpunkten zweiter Art, Osculations- und Knotenpunkten, dann tritt aber keine Änderung der Art, sondern im ersten und letzten Falle ein Imaginärwerden ein.

27. Während wir hiemit die uns im Anfange dieses Abschnittes gestellte Aufgabe als völlig erledigt betrachten können bleibt noch eine weitere, nicht weniger wichtige Untersuchung übrig. Es ist nämlich leicht einzusehen, dass das Entstehen und Verschwinden der Faltenpunkte von merkwürdigen Veränderungen im Laufe der Connodalcurve (und auch der Flecnodal- und Spinodalcurve) begleitet ist, die für jeden der vier Ausnahmepunkte erster Ordnung einen anderen Charakter besitzen. Das Studium dieser Veränderungen bildet eine Art Analyse der Falten einer Fläche. Ihre Anzahl kann man mittelst ihrer Connodalcurven zählen. Dabei hat man geschlossene und ungeschlossene Falten zu unterscheiden. Erstere werden durch zwei Faltenpunkte begrenzt, bei letzteren kehren beide Zweige der Connodalcurve in sich selbst zurück, ohne dass die einander conjugirten Berührungspunkte jemals zusammenfallen. Andere Fälle gibt es, wenn man der unendlichen Ebene keine specielle Bedeutung beilegt, wenigstens bei algebraischen Flächen nicht. Der übliche Begriff einer Falte muss selbstverständlich etwas verallgemeinert werden. So besitzt zum Beispiel die aus drei isolirten Kugelflächen bestehende Fläche sechster Ordnung drei ungeschlossene Falten. Denkt man sich die drei Kugeln anfänglich durch Flächen-theile verbunden, die langsam verschwinden, dann wird man diese Verallgemeinerung billigen müssen.

Obwohl ich die hier skizzierte Untersuchung theilweise vollendet habe, ziehe ich es vor, die erhaltenen Resultate später mitzutheilen.

Anwendung auf Flächen dritter Ordnung.

28. Die Flächen niedrigster Ordnung, bei welchen Faltenpunkte auftreten können, sind die Flächen dritter Ordnung. Im Folgenden wollen wir kurz angeben, wie sich die allgemeine Theorie für diese Flächen vereinfacht. Weil die Flecnodalcurve einer solchen Fläche durch die Gesammtheit der auf ihr liegenden Geraden gebildet wird, können Faltenpunkte nur auf diesen Geraden vorkommen.

Bringt man durch eine solche Gerade eine Ebene, dann schneidet diese die Fläche ausserdem in einem Kegelschnitt, dessen Schnittpunkte mit der Geraden als conjugirte Berührungspunkte der Connodalcurve (die also auch mit der Geraden identisch ist) aufgefasst werden müssen. Wo nun aber der Kegelschnitt die Gerade berührt, also die beiden conjugirten Punkte der Connodalcurve zusammenfallen, dort liegt ein Faltenpunkt vor. Es sind also die Faltenpunkte der Flächen dritter Ordnung nichts anderes als die in der Theorie dieser Flächen wohlbekannten asymptotischen Punkte, deren sich zwei, reell oder imaginär, auf jeder Geraden der Fläche befinden. Auch sieht man gleich ein, dass nur Faltenpunkte zweiter Art auftreten können.

29. Nehmen wir einen Faltenpunkt einer Fläche dritter Ordnung als Anfangspunkt der Coordinaten, die zugehörige Gerade als Y -Axe, die Tangentialebene als XOY -Ebene, dann ist es (vergl. §. 2) leicht einzusehen, dass sich die Gleichung der Fläche in die Gestalt

$$z \cdot (F_2(x, y, z)) = c_1 x^2 + d_3 xy^2 + d_2 x^2 y + d_1 x^3 \quad \dots 112)$$

bringen lässt.

Im Falle eines Doppelfaltenpunktes muss nun $d_3 = 0$ oder $4c_1 e_5 - d_3^2 = 0$ sein, was aber hier auf dasselbe hinauskommt, weil $e_5 = 0$. Wenn aber in 112) $d_3 = 0$ ist und man verschiebt den Anfangspunkt der Coordinaten längs der Geraden $x = 0, z = 0$, indem man y durch $y + b$ ersetzt, dann behält die Gleichung dieselbe Gestalt und also muss jeder Punkt der Geraden

als Doppelfaltenpunkt betrachtet werden. In zwei Punkten der Geraden aber, nämlich in ihren Schnittpunkten mit der Fläche $F_2(x, y, z) = 0$, fällt in der Gleichung 112) das einzige Glied erster Ordnung $\alpha F_2(o, b, o)$ fort. Diese beiden Punkte sind also Knotenpunkte der Fläche, und die Gerade, die sie verbindet, ist bekanntlich eine vierfache Gerade der Fläche dritter Ordnung. Doppelfaltenpunkte treten also bei Flächen dritter Ordnung ausschliesslich bei vierfachen Geraden auf. Alle Punkte solcher Geraden sind als Doppelfaltenpunkte zu betrachten.

Das Auftreten der Osculationspunkte bietet nichts Abweichendes dar. Der Tangentialschnitt besteht selbstverständlich aus drei Geraden, von denen zwei imaginär sein können.

Die Knotenpunkte der Fläche dritter Ordnung zeigen die vom allgemeinen Falle abweichende Eigenschaft, dass bei ihnen reelle Faltenpunkte nur bei dem Prozesse des Verbindens entstehen können. Es folgt das schon aus dem Umstande, dass überhaupt nur Faltenpunkte zweiter Art bei diesen Flächen vorkommen (vergl. §§. 22 und 25). Man kann es aber auch unmittelbar aus 108) ablesen, denn nach 109) ist Δ_2 ein Quadrat, also positiv, während H_4 bei Flächen dritter Ordnung fortfällt. Reelle Lösungen der Gleichungen 106) bis 108) können also nur dann vorkommen, wenn $\alpha\Delta_1$ positiv ist, d. h. bei Verbindung.

30. Schliesslich wollen wir noch zeigen, wie die allgemeine Theorie, auf Flächen dritter Ordnung angewendet, zu einem Theoreme bezüglich der Anzahl der reellen Faltenpunkte führt.

Wir können eine Fläche dritter Ordnung in jede andere auf stetige Weise umformen, ohne dass jemals mehr als ein Knotenpunkt zugleich auftritt. Wir können also bei der Umformung von Flächen dritter Ordnung die Doppelfaltenpunkte vermeiden, und weil beim Auftreten von Osculationspunkten die Zahl der reellen Faltenpunkte sich nicht ändert, kann nur in den Knotenpunkten Übergang vom Reellen zum Imaginären stattfinden oder umgekehrt. Weil nun aber die Zahl der bei der Verbindung reell werdenden Faltenpunkte der doppelten Zahl der reellen Geraden des Knotenpunktes gleich ist; weil weiter diese Geraden Doppelgeraden sind, die, so wie die Faltenpunkte bei Trennung imaginär, bei Verbindung reell werden, und

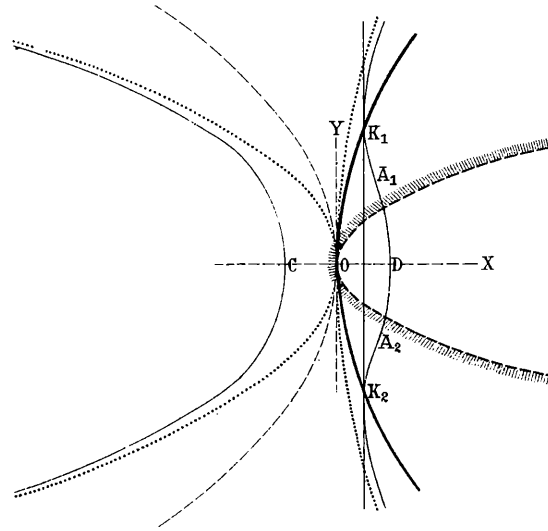
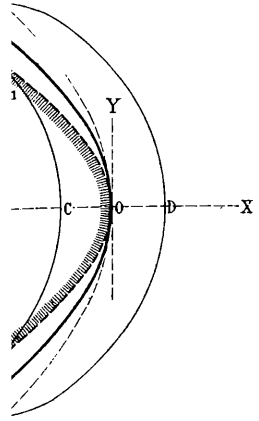


Fig. 3.

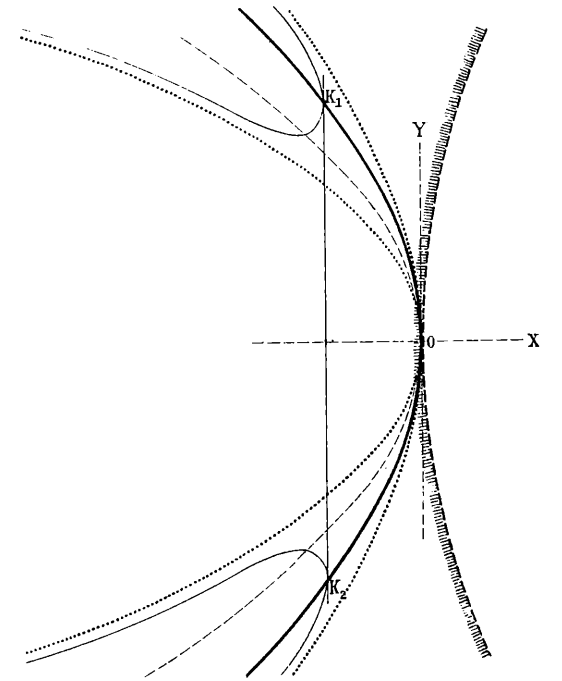


Fig. 4.

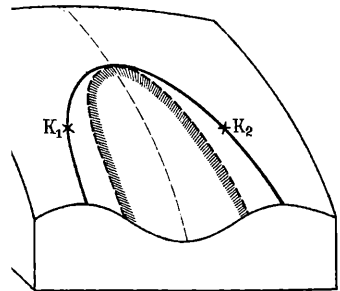


Fig. 5.

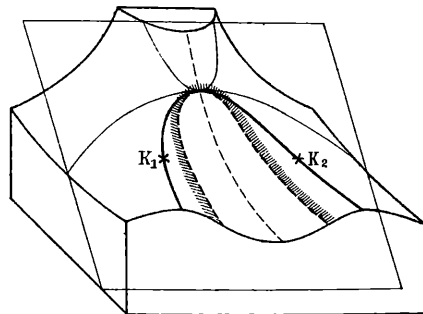
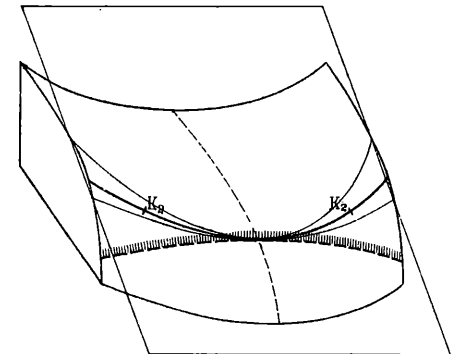


Fig. 6.



Lith. Anstalt v. J. Barth, Fünfhaus Wien.

weil schliesslich auf Flächen dritter Ordnung Doppelgerade nur bei Anwesenheit von Knotenpunkten auftreten, so muss die Differenz zwischen der Zahl der reellen Faltenpunkte und der reellen Geraden für alle Flächen dritter Ordnung die gleiche sein. Zur Bestimmung dieser Differenz genügt also die Betrachtung einer einzigen Fläche dritter Ordnung, z. B. der Diagonalfäche von Clebsch. Diese besitzt 27 reelle Gerade und 10 Osculationspunkte, in welchen 30 reelle Faltenpunkte zusammenliegen. Wir gelangen also zu dem Satze:

Bei jeder Fläche dritter Ordnung ist die Differenz zwischen der Zahl der reellen Faltenpunkte und der reellen Geraden gleich **drei**.

Obwohl ich diesen Satz in der Literatur der Flächen dritter Ordnung nirgendwo bestimmt ausgesprochen gefunden habe, kann er doch dem Inhalt nach nicht neu genannt werden. So gibt Zenthen (Math. Ann., Bd. VIII, S. 5) für jede der fünf Hauptarten mit 27, 15, 7, 3 und 3 reellen Geraden, die Zahl der reellen Geraden mit imaginären Faltenpunkten an, nämlich respective 12, 6, 2, 0 und 0. Die Zahl der reellen Geraden mit reellen Faltenpunkten wird dann aber 15, 9, 5, 3 und 3 und also die der reellen Faltenpunkte 30, 18, 10, 6 und 6.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: [98_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Korteweg D. J.

Artikel/Article: [Über Faltenpunkte 1154-1191](#)