

Über gewisse Configurationen auf ebenen kubischen Curven

von

Dr. **Jan de Vries** in Kampen.

Als meine Arbeit „Über gewisse, der allgemeinen kubischen Curve eingeschriebene Configurationen" (Sitzungsber. Bd. XCVIII, S. 446) gedruckt vorlag, erhielt ich Kenntniss von einer Abhandlung von Herrn Kantor: „Über eine ein—dreideutige Abbildung der Fläche dritter Ordnung" (Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 95); dabei stellte sich heraus, dass die Theorie der desmischen Configuration 9_3 und das daraus hervorgehende Verfahren, um aus einer auf C_3 befindlichen Configuration mittelst Ergänzung ihrer Punkte zu Inflexionstripeln eine grössere Configuration zu bilden, bereits von Herrn Kantor auseinandergesetzt worden. Auch findet sich dort ausgesprochen, dass die Tangentialpolygone der Ordnung 3^n gleichzeitig Cyklen von ein- und umgeschriebenen Dreiecken sind und Configurationen mit den Indices $\frac{1}{2}(3^n-3)$ und 3 erzeugen.

Vor Kurzem hat Herr Schoenflies in einer Arbeit: „Über regelmässige Configurationen n_3 auf den Curven dritter Ordnung" (Göttinger Nachrichten 1889, Nr. 12, S. 334) nachgewiesen, dass die früher von ihm betrachteten Configurationen, welche aus Cyklen von einander wechselseitig ein- und umgeschriebenen Polygonen bestehen, auf den allgemeinen kubischen Curven existiren.

Auf die nachstehenden Methoden zur Bildung von Configurationen auf C_3 bin ich gekommen durch eine briefliche Mittheilung von Herrn Schoenflies, welche diese beiden Sätze enthielt:

I. Die Seiten eines aus sechs conconischen Punkten der C_3 gebildeten Sechseckes bestimmen auf dieser Curve die Punkte einer atrigonischen 15_3; diese Configuration ist identisch mit der Configuration, welche Herr Martinetti[1] erhalten hat durch Schneiden einer Ebene mit den 15 Geraden der kubischen Fläche, welche nach Ausscheidung einer Doppelsechs erübrigen.

II. Die Schnitte der C_3 mit den 18 Diagonalen einer ihr eingeschriebenen atrigonischen $(9_2, 6_3)$ und die 9 Punkte dieser Configuration gehören einer atrigonischen 27_3 an, welche ausser der ursprünglichen noch 8 atrigonische $(9_2, 6_3)$ enthält. Diese 27_3 ist nicht gleichartig mit der durch die Geraden der kubischen Fläche erzeugten 27_3, indem diese keine $(9_2, 6_3)$ besitzt.

Wird der Schnittpunkt einer C_3 mit der Verbindungslinie der auf ihr belegenen Punkte i und k mit ik bezeichnet, so ergibt sich aus den beiden allineirten Tripeln 1, 2, 3 und 4, 5, 6 die atrigonische $(9_2, 6_3)$

$$\left\{\begin{matrix} 14 & 25 & 36 \\ 26 & 34 & 15 \\ 35 & 16 & 24 \end{matrix}\right\}$$

welche ich der Kürze halber ein Bitripel nenne und, wo nöthig, durch das Zeichen β andeute. Diese Construction eines Bitripels aus zwei linearen Tripeln bezeichne ich kurz als die Multiplication der beiden Tripel, die erhaltene Configuration als deren Product.

Durch Multiplication der sämmtlichen linearen Tripel einer auf C_3 befindlichen Configuration $(3p_x, px_3)$[2] mit einem beliebigen allineirten Tripel 1, 2, 3 entsteht offenbar eine neue Configuration mit verdoppeltem Punktindex. Sind a, b, c die Ecken eines Configurationsdreieckes der ursprünglichen Configuration und α, β, γ die mit den Seiten bc, ca, ab incidenten Configurationspunkte, so enthält die neue Configuration die Geraden $(1a, 2b, 3\gamma)$, $(2b, 3c, 1\alpha)$,

---

[1] Sopra alcune configurazioni piane (Ann. di Mat. XIV).

[2] Dieses Zeichen möge auch die Configuration n_3 andeuten; in diesem Falle kann p eine gebrochene Zahl sein.

$(3c, 1a, 2\beta)$, welche ein Configurationsdreieck mit den Ecken $1a, 2b, 3c$ bilden; durch Permutation der 1, 2, 3 ergeben sich noch fünf Configurationsdreiecke der neuen Configuration. Demnach:

1. Durch lineare Multiplication einer $(3p_x, px_3)$ der C_3 entsteht eine $(9p_{2x}, 6px_3)$, welche px Bitripel und sechsmal so viele Configurationsdreiecke als die erste Configuration besitzt. Aus einer atrigonischen Configuration erhält man daher eine neue atrigonische Configuration.

Aus dem Vierseite mit den Gegeneckenpaaren a, α; b, β; c, γ findet man durch dieses Verfahren eine $(18_4, 24_3)$ mit 6 Vierseiten, welche beziehungsweise die nachstehenden Gegeneckenpaare besitzen:

$1a,\ 1\alpha$;	$2b,\ 2\beta$;	$3c,\ 3\gamma$
$1a,\ 1\alpha$;	$2c,\ 2\gamma$;	$3b,\ 3\beta$
$1b,\ 1\beta$;	$2a,\ 2\alpha$;	$3c,\ 3\gamma$
$1b,\ 1\beta$;	$2c,\ 2\gamma$;	$3a,\ 3\alpha$
$1c,\ 1\gamma$;	$2a,\ 2\alpha$;	$3b,\ 3\beta$
$1c,\ 1\gamma$;	$2b,\ 2\beta$;	$3a,\ 3\alpha$.

Aus der gegenseitigen Lage dieser Vierseite erhellt, dass ihre reciproke Figur gleichartig ist mit der aus zwei associirten Configurationen $(12_4, 16_3)$ A hervorgegangenen $(24_3, 18_4)$.[1]

Als Product zweier Configurationen der C_3 bezeichne ich die Configuration, welche man erhält, wenn man jedes lineare Tripel der einen mit jedem linearen Tripel der zweiten multiplicirt. Sind a, b, c die Ecken eines Dreieckes der einen und d, e, f die Ecken eines Dreieckes der anderen Configuration, dann ergeben sich durch Projection von d, e, f aus a, b, c die Ecken von 6 Configurationsdreiecken der neuen Configuration. Daher:

2. Das Product einer $(3p_x, px_3)$ mit δ Configurationsdreiecken und einer $(3q_y, qy_3)$ mit δ' Dreiecken ist eine $(9pq_{2xy}, 6pqxy_3)$, welche $pqxy$ Bitripel und $6\delta\delta'$ Configurationsdreiecke enthält.

---

[1] Vergl. meine Arbeit: „Über gewisse ebene Configurationen" (Acta math. 12).

Durch Multiplication von je zwei getrennten Geraden des Bitripels

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right\}$$

entstehen 6 neue Bitripel, welche je eine Gerade der ursprünglichen Configuration und je drei mit diesen Geraden verbundene Gerade enthalten; die übrigen zwei Geraden jedes Bitripels tragen je drei Schnitte der C_3 mit den Diagonalen der ursprünglichen Configuration. Die 18 neuen Punkte bilden mit jenen 12 Geraden die beiden Bitripel

$$\left\{\begin{matrix} 16 & 24 & 35 \\ 37 & 18 & 29 \\ 49 & 57 & 68 \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{matrix} 15 & 26 & 34 \\ 27 & 38 & 19 \\ 48 & 59 & 67 \end{matrix}\right\}$$

(Die genannten drei Bitripel gehören der oben erwähnten 27_3 des Herrn Schoenflies an.) Es gilt nun der Satz:

3. Enthält eine auf C_3 befindliche Configuration bd Bitripel, von denen jede Diagonale als solche zu d Bitripeln gehört, so bilden die Schnittpunkte der Curve mit jenen Diagonalen eine $(18b_{2d},\ 12bd_3)$.

Die oben erwähnte atrigonische 15_3, welche 10 Bitripel besitzt, liefert durch diese Construction eine atrigonische $(60_6,\ 120_3)$ mit 20 Bitripeln.

Ich nenne zwei getrennte Configurationsgerade, welche durch keine Configurationsgerade verbunden sind, unabhängige Gerade. Nachdem das Product je zweier unabhängigen Geraden ein Bitripel liefert, gilt der Satz:

4. Bildet jede Gerade einer $(3p_x,\ px_3)$ der C_3 mit $q-1$ Geraden eine Gruppe gegenseitig unabhängiger Configurationsgeraden, so liefert jede der $px:q$ Gruppen $\binom{q}{2}$ Bitripel, wonach im Ganzen $3px(q-1)$ neue Gerade erhalten werden, welche mit den neuen Punkten einer

$$\left(\frac{9}{2}p(q-1)_{2x},\ 3px(q-1)_3\right)$$

angehören.

Beispielsweise entsteht durch dieses Verfahren aus der atrigonischen (24_4, 32_3), welche als Restfigur jeder Geraden der Martinetti'schen (27_5, 45_3) erscheint, eine (36_8, 96_3) mit 16 Bitripeln.

Die atrigonische, durch lineare Multiplication aus einem Bitripel erhaltene (27_4, 36_3) liefert durch jene Construction eine (81_8, 216_3) mit 36 Bitripeln, wobei je drei aus unabhängigen Geradentripeln der ersten Configuration erhaltene Bitripel vollständig getrennt liegen.

Es seien 4, 5, 6, 7, 8, 9 sechs conconische Punkte der C_3, daher die Punkte 47, 58, 69 allineirt; durch lineare Multiplication mit dem Tripel 1, 2, 3 erhält man die Geraden

147,	24,	37
258,	38,	15
369,	16,	29
147,	258,	369,

wonach die Punkte 15, 16, 24, 29, 37, 38 ein neues conisches Sextupel bilden. Nachdem in obiger Tabelle in der ersten Zeile 2 und 3, in der zweiten 3 und 1, in der dritten 1 und 2 vertauscht werden können, gehören zur Geraden (147, 258, 369) 8 Kegelschnitte, welche allemal 6 Punkte *ik* tragen. Allein die conische Gruppe 15, 16, 24, 29, 37, 38 gehört auch zu den 7 Geraden, welche aus der obigen durch Vertauschung von 5 mit 6, von 4 mit 9, von 7 mit 8 hervorgehen. Die 18 Punkte *ik* bilden daher 90 conische Sextupel.

5. Durch lineare Multiplication eines conischen Sextupels entsteht eine aus 18 Punkten und 90 Kegelschnitten zusammengesetzte conische Configuration (18_{30}, 90_6).

Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 und a, b, c, d, e, f zwei conische Sextupel der C_3. Multiplicirt man die linearen Tripel

$$1, 2, 12; \quad 3, 4, 34; \quad 5, 6, 56; \quad 12, 34, 56$$

beziehungsweise mit

$$a, b, ab; \quad c, d, cd; \quad e, f, ef; \quad ab, cd, ef,$$

so entstehen die Geraden

$$1a, 2b, 12ab; \quad 3c, 4d, 34cd; \quad 5e, 6f, 56ef; \quad 12ab, 34cd, 56ef,$$

aus denen hervorgeht, dass die Punkte $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, $6f$ ein conisches Sextupel bilden. Beachtet man, dass jede Permutation der a, b, c, d, e, f die Bezeichnung für ein neues Sextupel liefert, so gilt der Satz:

6. Das Product von zwei conischen Sextupeln der C_3 ist eine conische Configuration $(36_{120}, 720_6)$.

Bilden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eine associirte Gruppe (Basis eines Büschels kubischer Curven), so schneidet bekanntlich der durch 1, 2, 3, 4, 9 gelegte C_2 den Gegenpunkt (5678) des Quadrupels 5, 6, 7, 8, und der C_2 der Punkte 5, 6, 7, 8, 9 den Gegenpunkt (1234) aus, indess die Punkte (1234), (5678) und 9 allineirt sind. Durch Multiplication jener beiden conischen Sextupel und des linearen Tripels mit dem allineirten Tripel a, b, c entstehen die conischen Gruppen

$$a1, \quad a2, \quad b3, \quad c4, \quad c9, \quad b(5678);$$
$$a5, \quad b6, \quad b7, \quad c8, \quad c9, \quad a(1234);$$

und die lineare Gruppe

$$c9, \quad a(1234), \quad b(5678).$$

Aus dieser Lagenbeziehung erhellt, dass die Punkte $a1$, $a2$ $a5$, $b3$, $b6$, $b7$, $c4$, $c8$, $c9$ eine kubische Gruppe bilden. Die Gesammtzahl der neuen associirten Gruppen bestimmt man leicht durch die Bemerkung, dass von den 9 Zahlen in jeder Gruppe 3 mit a, 3 mit b, 3 mit c verbunden sind. Demnach:

7. Durch lineare Multiplication entstehen aus jeder kubischen Gruppe $9! : (3!)^3 = 1680$ neue kubische Gruppen.

Ähnlich wie oben für zwei conische Sextupel erhält man für zwei associirte Gruppen den Satz:

8. Projicirt man eine kubische Gruppe der C_3 aus einer zweiten kubischen Gruppe auf die Curve, so bilden die 81 Projectionen $9!$ neue kubische Gruppen.

Die Tangentialpunkte einer associirten Gruppe stellen daher wiederum eine solche Gruppe dar.

Nachdem man die lineare Multiplication eines conischen Sextupels als eine conische Multiplication der linearen Gruppe auffassen kann, folgt aus Satz 5:

9. Das conische Product der linearen Configuration $(3p_x, px_3)$ ist eine conische Configuration $(18p_{30x}, 90px_6)$.

Ferner mit Benutzung der Sätze 5 und 6:

10. Durch lineare oder conische Multiplication erhält man aus jeder conischen Configuration der C_3 zwei neue conische Configurationen.

11. Das Product von zwei conischen Configurationen, wobei jedes conische Sextupel der einen Configuration mit jedem Sextupel der anderen multiplicirt wird, ist wiederum eine conische Configuration.

Eine weitere Quelle für die Construction neuer conischer Configurationen bildet der Satz:

12. Die 24 Antitangentialpunkte eines conischen Sextupels der Serpentine einer zweitheiligen C_3 erzeugen eine reelle conische $(24_{256}, 1024_6)$.

Für die eintheilige C_3 erhält man entsprechend eine reelle $(12_{16}, 32_6)$.

Dies erhellt aus dem bekannten Cremona'schen Satze, wonach die Tangentialpunkte eines conischen Sextupels ein neues conisches Sextupel bilden.

13. Durch Ergänzung der Punkte einer conischen $(6p_x, px_6)$ der Serpentine der zweitheiligen, beziehungsweise eintheiligen C_3 zu cotangentialen Quadrupeln, beziehungsweise conjugirten Paaren, entsteht eine conische $(24p_{256x}, 1024px_6)$, beziehungsweise eine $(12p_{16x}, 32px_6)$.

Die Restpunkte n^{ter} Ordnung von sechs conconischen Punkten der C_3 liegen wiederum in einem C_2. Aus der allineirten Lage der Punkte 1, 2, 12 ergibt sich nämlich die allineirte Lage ihrer Restpunkte[1] 1_n, 2_n, $(12)_n$; dasselbe gilt für 3_n, 4_n, $(34)_n$; 5_n, 6_n, $(56)_n$ und, wofern 1, 2, 3, 4, 5, 6 conconisch sind, auch für $(12)_n$, $(34)_n$, $(56)_n$; demnach bilden $1_n\,2_n\,3_n\,4_n\,5_n\,6_n$ ein conisches Sextupel. Jeder C_2, welcher von fünf dieser Restpunkte je einen Antirestpunkt n^{ter} Ordnung enthält, trifft C_3 daher in einem Antirestpunkte des sechsten.

14. Bestimmt man für sechs conconische Punkte die zugehörigen Osculationsgruppen n^{ter} Ordnung, so entsteht eine conische

---

[1] Vergl. meine Arbeit: Diese Berichte, Bd. XCVIII, S. 460.

$$\left(6(3n-1)_{(3n-1)^4},\ (3n-1)^5_6\right).$$

Ebenso:

15. Die durch ein conisches Sextupel bestimmten Centralgruppen m^{ter} Ordnung erzeugen eine conische

$$\left(6(3m-2)_{(3m-2)^4},\ (3m-2)^5_6\right).$$

16. Ergänzt man die Punkte der conischen $(6p_x,\ px_6)$ zu Osculationsgruppen n^{ter} Ordnung, so entsteht eine conische

$$\left(6p(3n-1)_{(3n-1)^4},\ px(3n-1)^5_6\right).$$

Ähnliches gilt für die Ergänzung zu Centralgruppen.

Bezeichnet man die beiden Schnittpunkte einer C_4 mit der Verbindungslinie zweier auf der Curve belegenen Punkte i, k durch $(ik)_1$ und $(ik)_2$, so ergibt sich aus dem conischen Octupel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dass die Punkte

$$\left\{\begin{matrix} (ik)_1 & (lm)_1 & (np)_1 & (qr)_1 \\ (ik)_2 & (lm)_2 & (np)_2 & (qr)_2 \end{matrix}\right\}$$

allemal in einem C_2 liegen. Die 28 Geraden ik liefern demnach $8!:(2^4.4!)$ verschiedene conische Octupel, wonach die 56 neuen Punkte mit 105 Kegelschnitten eine conische $(56_{15}, 105_8)$ erzeugen.

Bildet man aus dem ursprünglichen Octupel zwei Quadrupel 1, 2, 3, 4 und 5, 6, 7, 8, so erhellt, dass die auf den Seiten des Viereckes 1234 belegenen Curvenpunkte mit den durch die Seiten des Viereckes 5678 herausgeschnittenen Curvenpunkten durch 9 Kegelschnitte verbunden werden und mit ihnen eine conische $(24_3, 9_8)$ darstellen.

17. Die 56 Schnittpunkte einer C_4 mit den Seiten eines ihr eingeschriebenen conischen Achteckes bilden mit 105 C_2 eine $(56_{15}, 105_8)$, in welcher 35 conische Configurationen $(24_3, 9_8)$ enthalten sind.

Wird das conische Octupel durch zwei lineare Quadrupel ersetzt, so gilt der Satz:

18. Das Product von zwei allineirten Punktquadrupeln der C_4 ist eine conische $(32_6, 24_8)$.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man, ähnlich wie für die kubischen Curven gezeigt wurde, aus einer linearen Configuration der C_4 conische Configurationen herleiten, indem man alle Geraden mit einer linearen Gruppe multiplicirt oder das Product von zwei linearen Configurationen der Curve bestimmt.

Indem jede Gruppe einer conischen Quadrupelinvolution der C_4 mit jeder Gruppe der corresidualen Involution conconisch ist,[1] erzeugen n beliebige Quadrupel der einen mit n beliebigen Quadrupeln der corresidualen Involution eine conische Configuration $(8n_n,\ n^2_8)$. Construirt man für jeden C_2 dieser Configuration die in Satz 17 angedeutete $(24_3,\ 9_8)$, so gilt:

19. Die Seiten von n aus Quadrupeln einer conischen Involution und n aus Quadrupeln der residualen Involution gebildeten Vierecken treffen die C_4 in den Punkten einer conischen Configuration $(24n_{3n},\ 9n^2_8)$.

Gehören n Quadrupel einer der 63 autoresidualen Involutionen an, so liefert die entsprechende Construction eine conische $\left(12n_{3(n-1)},\ 9\binom{n}{2}_8\right)$.

Die Sätze 17 und 18 lassen sich auf Curven n^{ter} Ordnung ausdehnen:

20. Ist ein $2n$-Eck einer Curve n^{ter} Ordnung und zugleich einem Kegelschnitte eingeschrieben, so treffen seine Seiten die Curve in $(n-2)\binom{2n}{2}$ Punkten, welche mit $(2n)!:(2^n.n!)$ Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung eine Configuration darstellen, deren Punktindex $(2n-2)!:(2^{n-1}(n-1)!)$, deren Curvenindex $n(n-2)$ ist.

21. Das Product von zwei linearen n-punktigen Gruppen der C_n ist eine aus Punkten und Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gebildete $(n^2(n-2)_{(n-1)!},\ n!_{n(n-2)})$.

[1] Vergl. meine Arbeit: „Involutions quadruples sur courbes biquadratiques“ (Archives Néerlandaises, tome XXIII, § I, 1; § III, 12).