# Directe Ableitung einiger Capillaritätsfunctionen

von

#### K. Fuchs.

(Mit 1 Tafel.)

Die wichtigsten Capillaritätsgrössen sind der Binnendruck im Innern einer Flüssigkeit und die Oberflächenspannung. Die Oberflächenspannung erläutert man gewöhnlich folgendermassen. Ein Molekül der Oberflächenhaut einer Flüssigkeit wird nach innen gezogen, weil nach aussen zu weniger Moleküle liegen, die es anziehen, als nach innen zu. Dieser Zug nach innen fällt grösser aus, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit convex ist, und kleiner, wenn die Oberfläche concav ist. Von diesem Grundgedanken ausgehend, hat Laplace im Anhange an die Mécanique céleste den Druck berechnet, welchen die Oberflächenhaut normal zur Oberfläche auf die eingeschlossene Flüssigkeitsmasse ausübt und die Formel gefunden:

$$\frac{1}{4R}\pi\rho^2\int_{r_*}^{r_2}\!\!r_4f(r)\,\partial r.$$

Aus dieser Formel folgt, dass die Flüssigkeit sich so verhalten wird, "als wenn" in ihrer Oberflächenhaut eine Spannung bestünde vom Werthe:

$$\frac{1}{8}\pi\rho^2\int_{r_1}^{r_2}r^4f(r)\,\partial r.$$

Für uns handelt es sich hier um dieses "als wenn". Offenbar gibt nämlich obige Auffassung nicht den mindesten Anhaltspunkt, der auf eine reelle Spannung schliessen liesse. Bei der Laplace'schen Erläuterung sehen wir nicht, wie aus dem Zusammenwirken der zahllosen Einzelnanziehungen sich eine wirk-

liche Oberflächenspannung ergibt, und wir können also nicht sagen, dass Laplace die Oberflächenspannung "direct" berechnet habe.

Massieu hat einen anderen Weg eingeschlagen. Massieu argumentirt folgendermassen: Freie Oberfläche kann man bilden, indem man die Flüssigkeit zerreisst, wobei man ihre Cohäsion zu überwinden, folglich Arbeit zu leisten hat. Freie Oberfläche kann man aber auch dadurch bilden, dass man den Rand der vorhandenen Oberfläche erweitert. Da wir hiebei per Einheit der neu gebildeten Oberfläche nothwendig dieselbe Arbeit verrichten müssen, wie beim Zerreissen der Flüssigkeit, so muss nothwendig in der Oberflächenhaut eine Spannung vorhanden sein, die wir bei Erweiterung des Randes überwinden müssen, wobei wir Arbeit leisten. Dieser Gedanke führt wieder auf die Laplace'schen Formeln. Wir haben aber offenbar hier wiederum die Oberflächenspannung postulirt, nicht aber direct aus den Einzelnanziehungen abgeleitet.

Wenn wir so die zahlreichen bereits vorliegenden Berechnungen der Capillaritätsgrössen durchsehen, dann finden wir, dass dieselben regelmässig den Binnendruck, die Oberflächenspannung, den Randwinkel etc. indirect entwickeln, ohne einen tieferen Einblick in das Zusammenspiel der Einzelnanziehungen zu gewähren. In der vorliegenden Arbeit sollen einige Capillaritätsfunctionen auf möglichst directem Wege entwickelt werden.

Die Rechnungen gewinnen sehr an Klarheit, wenn wir die Molecularkräfte in Elementarkräfte zerlegen. Dies ist folgendermassen zu verstehen. Ein Molekül wirkt auf anderes Molekül anziehend, wenn ihre Entfernung zwischen einer kleinsten Entfernung  $r_1$  und einer grössten Entfernung  $r_2$  liegt. Möglicherweise ist  $r_1 = 0$  und  $r_2 = \infty$ . Die Intensität der Anziehung ist eine Function der Entfernung. Wir nehmen nun an, dass die Molecularkraft eine Summe unendlich vieler Elementarkräfte sei, deren jede von einer gewissen Entfernung r nur bis zu einer unendlich wenig grösseren Entfernung  $r+\partial r$  mit einer Intensität f(r) thätig ist, welche wir innerhalb des Intervalles  $\partial r$  constant denken. Jede Elementarkraft ist also nur in einer Kugelschale thätig, und diese Kugelschalen sind so in einander eingeschachtelt, dass sie zusammengenommen den ganzen Wirkungsbereich der Molecular-

kraft ausmachen. Wir werden jede Rechnung zuerst nur für eine einzige Elementarkraft durchführen.

Wir werden im Allgemeinen die gegebene Flüssigkeit in Schichten parallel der xy-Ebene zerlegen und für ein Volumelement  $\partial x \partial y \partial z$  den Druck berechnen, welcher per Flächeneinheit auf jede seiner sechs Seiten wirkt. Wenn der Druck nicht für alle sechs Seiten gleich ist, dann liegt Spannung vor, welche sich berechnen lässt.

## Die Wechselwirkung von zwei parallelen geraden Flüssigkeitsfäden.

Einleitungsweise betrachten wir einen dünnen, geraden, freien Stab (Fig. 1). Zwei Punkte im Abstande a von einander sollen sich mit einer Kraft p anziehen. Dann herrscht zwischen den zwei Punkten auf der ganzen Strecke a im Stabe der Druck p, während ausserhalb des Punktpaares keinerlei Druck oder Zug erzeugt wird. Nun soll es auf dem Stabe viele Punktpaare geben, deren Punkte je einander mit der Kraft p anziehen. Dann herrscht in irgend einem Punkte o des Stabes der Druck p so oft, innerhalb wie vieler Punktpaare o liegt. Punktpaare, welche den Punkt o nicht in sich fassen, haben auch keinen Einfluss auf den Druck in o. In Fig. 1 herrscht in o1 der Druck o2, in o2 und o3 der Druck o2, in o4 und o5 der Druck o5, in o6 der Druck o6.

Nun betrachten wir (Fig. 2) zwei dünne, gerade, endliche Flüssigkeitsfäden  $n_1$  und  $n_2$  von den Querschnitten  $\partial q_1$  und  $\partial q_2$ . Die Flüssigkeit A des Fadens  $n_1$  habe die Dichte  $\rho_1$ , während die Flüssigkeit B des Fadens  $n_2$  die Dichte  $\rho_2$  besitzt. Die Fäden können wir uns in dünne, unendlich lange Röhren gefasst denken. Die Moleküle des einen Fadens sollen auf die des anderen Fadens mittelst einer Elementarkraft vom Wirkungsradius r wirken.

Wir zerlegen nun den Faden  $n_2$  in gleiche Theilchen von der Länge  $\partial s_2$ , welche also die Masse  $\mu_2 = \rho_2 \, \partial q_2 \, \partial s_2$  besitzen. Diese Masse denken wir je in den Mittelpunkt des betreffenden Fadenstückes concentrirt. Eine solche Masse  $\mu_2$  wirkt nun auf zwei Massenelemente  $\mu_1$  des Fadens  $n_1$ . Wie man leicht findet, ist  $\mu_1 = \rho_1 \partial r \partial q_1 / \sin \alpha$ , wenn  $\alpha$  der Winkel ist, den der Verbindungsradius von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  mit dem Lothe macht. Die Intensität, mit der sich  $\mu_1$  und  $\mu_2$  anziehen, ist  $k = \mu_1 \mu_2 f(r) \partial r$ , wenn zwei

Masseneinheiten einander vermöge der Elementarkraft mit der Intensität f(r) anziehen. Wir finden durch Substitution  $k = \rho_1 \rho_2 \, \partial q_1 \partial q_2 f(r) \partial r \, \partial s / \sin \alpha$ . Die Horizontalcomponente  $\xi$  dieser Kraft ist  $k \sin \alpha$  oder  $\xi = \rho_1 \rho_2 \, \partial q_1 \, \partial q_2 f(r) \, \partial r \, \partial s$ . Nichts hindert uns anzunehmen, dass die beiden Massen  $\mu_1$  im Abstande  $2r \sin \alpha$  oder 2b einander mit der Kraft  $\xi$  anziehen.

Nun betrachten wir die beiden Fäden Fig. 3. Es ist sowohl  $n_1$  als auch  $n_2$  in gleiche Elemente von der Länge  $\partial s$  getheilt und die Massen dieser Elemente je in den Mittelpunkt des Volumelementes concentrirt gedacht. Von jedem solchen Massenpunkte sind die Radien nach den angezogenen Stücken des gegenüberliegenden Fadens gezogen.

Wenn wir von  $a_1$  bis  $b_1$  vorschreiten, dann treten wir successive in so viel Massenpaare  $\mu_1$  ein, wie oft  $\partial s$  in der Strecke  $a_1b_1$  enthalten ist. Das sei  $z_1$ -mal der Fall. Dann herrscht in  $b_1$  der Druck  $z_1\xi$  oder  $\rho_1\rho_2\,\partial q_1\partial q_2\,f(r)\partial r\xi\partial s$ . Nun ist  $\xi\partial s$  nichts Anderes, als die Strecke  $a_1b_1$ , welche wir mit  $\nu_1$  bezeichnen wollen. Der Druck in  $b_1$  ist also  $\nu_1\rho_1\,\rho_2\,\partial q_1\partial q_2\,f(r)\partial r$ . Dieser Druck bleibt constant, wenn wir noch weiter nach links vorschreiten, da wir dann in jedem Momente aus ebensoviel Massenpaaren austreten, in wieviele wir gleichzeitig eintreten.

Auf ganz analoge Weise finden wir für den Druck, der in  $n_2$  links von  $b_2$  herrscht, den Ausdruck  $\nu_2 \, \rho_1 \, \rho_2 \, \partial q_1 \partial q_2 f(r) \, \partial r$ , wenn  $\nu_2$  das Stück  $a_2 \, b_2$  ist.

Wenn wir  $a_1c=b_2a_2$  zeichnen, dann finden wir, dass stets  $\nu_1+\nu_2=2b$  ist. Die Summe der Drucke in  $n_1$  und  $n_2$ , oder

$$(\nu_1 + \nu_2) \rho_1 \rho_2 \partial q_1 \partial q_2 f(r) \partial r$$

ist also constant, d. h. unabhängig von der relativen Länge der Fäden. Wenn  $n_2$  gegen  $n_1$  sehr lang ist, dann ist  $\nu_1 = o$ ,  $\nu_2 = 2b$  und der Druck ist in  $n_1 = o$ , in  $n_2$  aber gleich  $2b \rho_1 \rho_2 \partial q_1 \partial q_2 f(r) \partial r$ .

Wenn wir nun bestimmen wollen, welcher Druck im Faden  $n_1$  (abgesehen vom Endstücke  $\nu_1$ ) herrscht, dann finden wir ein für künftige Überlegungen sehr nützliches Verfahren durch folgende Überlegung. Die Spannung in  $n_1$  ist bekanntlich  $\nu_1\rho_1\rho_2$   $\partial q_1\partial q_2f(r)\partial r$ , wofür wir auch schreiben können  $(2b-\nu_2)\rho_1\rho_2$   $\partial q_1\partial q_2f(r)\partial r$  oder

Nun bedeutet aber  $2b \, \rho_2 \, \partial q_2$  die Masse  $M_2$ , welche aus  $n_2$  ausgeschnitten wird, wenn wir aus einem von  $a_1$  ferne liegenden Punkte von  $n_1$  eine Kugel  $K_2$  vom Radius r beschreiben. Analog ist  $\nu_2 \, \rho_2 \, \partial q_2$  die Masse  $m_2$ , welche von  $n_2$  abgeschnitten wird, wenn wir vom Endpunkte von  $n_1$  aus eine andere Kugel  $K_1$  vom Radius r beschreiben. Wir können also den Druck in  $n_1$  auch schreiben

$$(\textit{M}_{2}\text{---}\textit{m}_{2})\,\rho_{1}\partial\,q_{1}\,f(r)\,\partial r.$$

Per Einheit des Querschnittes aber ist der Druck in  $n_1$  gleich

$$(M_2-m_2) \rho_1 f(r) \partial r.$$

Wenn die Enden von  $n_2$  senkrecht unter den Enden von  $n_1$  liegen, dann ist  $m_2 = \frac{1}{2} M_2$  und folglich der Druck in  $n_1$  gleich

$$\frac{1}{2} M_2 \rho_1 f(r) \, \partial r.$$

Wenn hingegen  $n_2$  gegen  $n_1$  sehr lang ist, dann ist  $m_2 = M_2$ , d. h. in  $n_1$  herrscht gar kein Druck. In  $n_2$  herrscht dann, wie man leicht findet, der Druck  $M_1\rho_2 f(r) \partial r$ . Den Druck, den  $n_2$  in  $n_1$  erzeugt, können wir auch als contractive Spannung auffassen. Wenn nämlich das Rohr, in welchem sich  $n_1$  befindet, sich erweitert, dann verkürzt sich der Faden und zieht sich mit einer Kraft gleich jenem Drucke zusammen. Wenn aber ein Faden unter Kraftäusserung sich contrahirt, dann sagen wir, er sei gespannt.

Wohin diese Entwicklungen zielen, das mag folgende Bestimmung des Binnendruckes in einem Punkte o einer homogenen endlichen Flüssigkeitsmasse von beliebiger Form klar machen (Fig. 8). Wir betrachten einen Flüssigkeitsfaden  $n_0$  vom Querschnitte  $\partial q_0$ , welcher durch den Punkt o bis an einen beliebigen Punkt der Oberfläche geht, und die umgebende Flüssigkeit bis zum Abstande r zerlegen wir in unendlich dünne, dem Faden  $n_0$  parallele Fäden n. Hiebei bedeutet r den Wirkungsradius einer Elementarkraft. Jeder einzelne dieser Fäden n erzeugt in  $n_0$  einen Längsdruck. Um diese Drucke zu bestimmen, beschreiben wir von o aus mit dem Radius r eine Kugel  $K_2$  und eine gleiche Kugel  $K_1$  vom Endpunkte des  $n_0$  in der Oberfläche. Jeder einzelne Faden n liefert dann in  $n_0$  einen Druck  $(M-m) \rho \partial q_0 f(r) \partial r$ , wobei

M und m die Massen der Fadentheile sind, die durch  $K_2$  und  $K_1$  aus dem Faden n geschnitten werden. Der Gesammtdruck in  $n_0$  ist also  $\Sigma(M-m)\rho \partial q_0 f(r) \partial r$  oder  $\rho \partial q_0 f(r) [\Sigma M-\Sigma m] \partial r$ . Nun ist aber  $\Sigma M$  und  $\Sigma m$  nichts Anderes, als die von den Kugeln  $K_2$  und  $K_1$  eingeschlossenen Flüssigkeitsmassen. Es ist  $\Sigma M = \frac{4}{3} \pi \rho r^3$  und bei ebener Oberfläche O ist  $\Sigma m = \frac{2}{3} \pi \rho r^3$ . Bei concaver Oberfläche  $O_1$  ist zu diesem Werthe von  $\Sigma m$  noch die Masse eines Meniscus hinzuzuaddiren, bei convexer Oberfläche  $O_2$  aber abzuziehen. Für ebene Oberfläche ist also der Druck in  $n_0$  per Einheit des Querschnittes gleich  $\frac{2}{3} \pi \rho^2 r^3 f(r) \partial r$ , und alle Elementarkräfte von  $r = r_1$  bis  $r = r_2$  zusammengenommen liefern bei ebener Oberfläche den Binnendruck

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2\int_{r_1}^{r_2}r^3f(r)\,\partial r.$$

## Die Wechselwirkung von zwei parallelen ebenen Flüssigkeitsschichten.

Die Flüssigkeitsschichten  $N_1$  und  $N_2$  (Fig. 4) im Abstande  $H_1$  von den Dicken  $\partial H_1$  und  $\partial H_2$  und den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$  bestehen aus den Flüssigkeiten A (in  $N_1$ ) und B (in  $N_2$ ), deren Moleküle sich mittelst einer Elementarkraft vom Wirkungsradius r und dem Wirkungsintervall  $\partial r$  anziehen.

Zuerst berechnen wir die Kraft, mit der sich die beiden Lamellen per Flächeneinheit anziehen. In der Schicht  $N_2$  entspricht einem Oberflächenelemente  $\partial o_2 = \delta x \delta y$  ein Volumelement  $\partial o_2 \partial H_2$  und das Massenelement  $\rho_2 \partial o_2 \partial H_2$ , welches wir uns in einen Massenpunkt  $m_2$  zusammengezogen denken. Nun wirkt  $m_2$  vermöge seiner Elementarkraft auf einen Ring in  $N_1$  anziehend. Dieser Ring hat den Radius H tg  $\alpha$ , den Umfang  $2\pi H$  tg  $\alpha$ , den Querschnitt  $\partial r \partial H / \sin \alpha$ , das Volumen  $2\pi H \partial H_1 \partial r / \cos \alpha$  und die Masse  $m_1 = 2\pi \rho_1 H \partial H_1 \partial r / \cos \alpha$ . Jedes Element dieses Ringes wirkt unter dem Winkel  $\alpha$  anziehend auf  $m_1$  oder  $\rho_2 \partial o_2 \partial H_2$ . Die Summe dieser elementaren Anziehungen ist  $m_1 m_2 f(r)$ , und ihre normale Componente ist  $m_1 m_2 f(r)$  oder  $2\pi \rho_1 \rho_2 H \partial H_1 \partial H_2 \partial o f(r) \partial r$ .

Lamelle  $n_0$  befinde sich ein Flüssigkeitselement vom Volumen  $\partial x \partial y \partial H$ . Wir wollen für jede seiner sechs Flächen den Druck berechnen, dem sie per Flächeneinheit ausgesetzt ist.

#### Der verticale Druck.

Je zwei Schichten im Abstande H ziehen einander vermöge einer Elementarkraft per Flächeneinheit mit einer Kraft an, für die wir oben den Ausdruck gewonnen haben

$$2\pi \rho_1 \rho_2 H \partial H_1 \partial H_2 f(r) \partial r$$
.

Wenn die Schicht  $n_1$  in der Höhe  $h_1$  über  $n_0$ , die Schicht  $n_2$  aber in der Tiefe  $h_2$  unter  $n_0$  liegt, dann lautet diese Formel für uns

$$2\pi \rho^2 (h_1 + h_2) \partial H^2 f(r) \partial r$$
.

Diesen Druck überträgt die zwischenliegende Flüssigkeit als Verticaldruck auf  $n_0$ . Wir finden den Druck, den  $n_1$  durch Wechselwirkung mit der unter  $n_0$  liegenden Flüssigkeit liefert, indem wir von  $h_2 = o$  bei  $h_2 = r - h_1$  integriren. Wir erhalten

$$\pi \rho^2 (r^2 - h^2) f(r) \partial r \partial H$$
.

Hier bemerken wir, dass  $\pi \rho(r^2-h^2) \partial H$  die Masse der Scheibe ist, die durch eine von  $n_0$  aus mit dem Radius r beschriebene Kugel aus  $n_1$  ausgeschnitten wird. Wir können diese Masse mit  $S_1$  bezeichnen. Eine Schicht  $n_1$  über  $n_0$  erzeugt also durch Wechselwirkung mit der Flüssigkeit unter  $n_0$  den Druck in  $n_0$ 

$$\rho S_1 f(r) \partial r$$
.

Den Druck, den alle innerhalb der Höhe r liegende Schichten  $n_1$  in  $n_0$  erzeugen, finden wir durch Integration von  $h_1 = o$  bei  $h_1 = r$  und erhalten

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2r^3f(r)\partial r.$$

Hier ist nunmehr  $\frac{2}{3}\pi\rho r^3$  die Masse der Halbkugel, welche durch eine von  $n_0$  aus mit Radius r beschriebene Kugel aus der Flüssigkeit geschnitten wird. Wenn wir diese Masse mit  $M_r$  bezeichnen, weil sie die Höhe r hat, dann ist der Verticaldruck, den  $n_0$  erleidet, gleich

$$\rho M_r f(r) \partial r$$
.

Alle Elementarkräfte von  $r = r_1$  bei  $r = r_2$  liefern dann einen Druck, für den wir durch Integration finden

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2\int_{r_1}^{r_2}r^3f(r)\,\partial r.$$

Diesen Druck per Flächeneinheit erleidet unser Volumelement  $\partial x \partial y \partial H$  an seiner oberen und unteren Fläche.

### Der horizontale Druck.

Wir haben oben gefunden, dass in horizontalen Schichten, deren gerade Ränder senkrecht untereinander liegen und nach den x- und y-Axen orientirt sind, in den Richtungen der beiden Axen in einander den horizontalen Druck erzeugen

$$\frac{1}{2}\,\pi\,\rho_{\mathbf{1}}\rho_{\mathbf{2}}(r^{2}\!\!-\!\!H^{2})\,\partial H_{\mathbf{1}}\partial H_{\mathbf{2}}f(r)\,\partial r.$$

Wenn wir die eine Lamelle mit  $n_0$  identificiren, können wir den horizontalen Druck, den eine Lamelle n in  $n_0$  erzeugt, auch schreiben

$$\frac{1}{2}\pi\rho^2(r^2-H^2)\partial H^2f(r)\partial r.$$

Hiebei bedeutet aber  $\pi \rho (r^2 - H^2) \partial H$  die Masse S einer Scheibe, welche eine von  $n_0$  aus mit dem Radius r beschriebene Kugel K aus der Schichte n ausschneidet. Alle Schichten von H = -r bis H = +r liefern einen Druck in  $n_0$ , welchen wir durch Integration finden. Wir erhalten per Flächeneinheit den Druck

$$\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\rho^2 r f(r)\,\partial r.$$

Hier bedeutet  $\frac{4}{3}\pi\rho r^3$  die Masse der Flüssigkeit, welche von jener Kugel eingeschlossen wird. Wenn wir diese Masse mit  $2M_r$  bezeichnen, dann ist der horizontale Druck in  $n_0$  sowohl nach der x-Axe als nach der y-Axe gleich

$$\rho M_r f(r) \partial r$$
.

Alle Elementarkräfte von  $r=r_1$  bis  $r=r_2$  liefern dann den Horizontaldruck

$$\frac{2}{3}\pi\rho_2\int_{r_1}^{r_2}r^3f(r)\,\partial r.$$

Diesen Druck per Flächeneinheit erleidet unser Element  $\partial x \partial y \partial H$  auf jeder seiner verticalen Wände. Es ist derselbe Druck, den auch die obere und untere Seite erleidet. Die Kräfte halten sich folglich im Gleichgewicht. Wir können also sagen: Der Binnendruck im Inneren einer homogenen Flüssigkeit ist

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2\int_{r_1}^{r_2}r^3f(r)\partial r.$$

Wir wollen das Integral das dritte Molecularintegral nennen, weil in ihm der Radius r in der dritten Potenz vorkommt, und wir wollen es mit  $J^3$  bezeichnen. Der Binnendruck ist dann

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2J^3$$

## Das zweite und vierte Molecularintegral.

## 1. Oberflächenspannung.

Die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit mit ebener Oberfläche, bei der die Dichte  $\rho$  in der Oberflächenhaut dieselbe ist, wie im Innern der Flüssigkeit, berechnen wir in genauem Anschluss an den vorigen Abschnitt. (Fig. 6.)

#### Der verticale Druck.

Wir nehmen an, dass die Schichte  $n_0$  sich unter der Oberfläche in einer Tiefe h < r befindet. Von einem Punkte in  $n_0$  aus beschreiben wir eine Kugel K mit dem Radius r, welche aus jeder Schicht innerhalb der Entfernung r eine Scheibe von der Masse  $S_1$  ausschneidet. Wir haben gesehen, dass jede ober  $n_0$  liegende Schicht durch ihre Wechselwirkung mit der unter  $n_0$  liegenden Flüssigkeit in  $n_0$  einen Druck erzeugt gleich

$$\rho S_1 f(r) \partial r$$
 oder  $\pi \rho^2 (r^2 - h_1^2) f(r) \partial r \partial H$ .

#### Capillaritätsfunctionen.

Alle über  $n_0$  liegenden Schichten geben also einen Verticaldruck, den wir durch Integration von  $h_1 = o$  bis  $h_1 = h$  finden. Wir erhalten

$$\pi \, \rho^2(r^2h - \frac{1}{3} \, h^3) f(r) \, \partial r.$$

Hier bedeutet  $\pi \rho(r^2h - \frac{1}{3}h^3)$  die Masse der Flüssigkeit, welche in Form einer abgestutzten Halbkugel oberhalb  $n_0$  in unserer Kugel K liegt. Wir bezeichnen diese Masse mit  $M_h$ , da sie die Höhe h besitzt und schreiben den in  $n_0$  herrschenden Verticaldruck

$$\rho M_h f(r) \partial r$$
.

Diesen Druck per Flächeneinheit erleidet unser Volumelement  $\partial x \partial y \partial H$  auf seiner oberen und unteren Seite.

#### Der Horizontaldruck.

Jede Schichte  $n_1$  innerhalb der Entfernung  $h_1 < r$  liefert in  $n_0$  den Horizontaldruck

$$\frac{1}{2}\pi\rho^2(r^2-h_1^2)\partial H^2f(r)\partial r,$$

wobei  $\pi \rho (r^2 - h_1^2)$  wieder die Masse obiger Scheibe  $S_1$  bedeutet. Alle Schichten von  $h_1 = -r$  bis  $h_1 = +h$  liefern einen Horizontaldruck, den wir durch Integration bestimmen

$$\frac{1}{2} \pi \rho^2 \left( \frac{2}{3} r^3 + r^2 h - \frac{1}{3} h^3 \right) \partial H f(r) \partial r.$$

Hier bedeutet  $\pi \rho \left(\frac{2}{3}r^3 + r^2h - \frac{1}{3}h^3\right)$  die ganze Flüssigkeitsmasse  $M_{h+r}$ , welche in Form einer abgestutzten Vollkugel in unserer Kugel K enthalten ist. Den Horizontaldruck können wir also per Flächeneinheit auch schreiben

$$\frac{1}{2} \rho M_{h+r} f(r) \partial r.$$

Diesen Druck per Flächeneinheit erleidet also unser Element  $\partial x \partial y \partial H$  auf jeder senkrechten Seitenfläche.

### Die Spannung.

Der Druck, den  $\partial x \partial y \partial H$  in verticaler Richtung auf der oberen und unteren Fläche erleidet, ist per Flächeneinheit

$$p = \pi \rho^2 (r^2 h - \frac{1}{3} h^3) f(r) \partial r.$$

Mit dieser Kraft sucht sich also die Flüssigkeit unseres Elementes in horizontaler Richtung zu expandiren, d. h. wir können sagen, dass in  $n_0$  diese expansive Spannung herrscht. Der Druck auf die Seitenflächen unseres Elementes ist aber per Flächeneinheit

$$q = \frac{1}{2} \pi \rho^2 \left( \frac{2}{3} r^3 + r^2 h - \frac{1}{3} h^3 \right) f(r) \, \partial r$$

und dieser ist mehr als hinreichend, um den Verticaldruck zu paralysiren. Wir finden einen horizontalen Drucküberschuss q-p oder  $\alpha$  gleich

$$\alpha = \frac{1}{2} \pi \rho^2 \left( \frac{2}{3} r^3 - r^2 h + \frac{1}{3} h^3 \right) f(r) \partial r,$$

Hier bedeutet, wie wir auch ohne Rechnung hätten finden können,  $\pi \rho \left(\frac{2}{3}r^3 - r^2h + \frac{1}{3}h^3\right)$  die Masse, welche von unserer Flüssigkeitskugel  $M_{h+r}$  fehlt oder die Masse der Flüssigkeit, welche den über die Oberfläche ragenden Theil der Kugel K ausfüllen würde. Wir bezeichnen sie nach ihrer Höhe mit  $M_{r-h}$ . Der horizontale Drucküberschuss ist per Einheit des Querschnittes also

$$\alpha = \frac{1}{2} M_{r-h} f(r) \, \partial r.$$

Wenn die Schicht  $n_0$  sich zusammenziehen könnte, so würde sie es mit der Kraft  $\alpha$  thun. Darum können wir  $\alpha$  als contractive Spannung der Schicht  $n_0$  auffassen.

Die Spannung aller Lamellen zusammengenommen finden wir durch Integration nach h, wobei  $\alpha \partial h$  die Spannung für die Lamellendicke  $\partial h$  ist. Wir erhalten

$$\int_{h=0}^{h=r} \alpha \, \partial h = \frac{1}{8} \pi \rho^2 r^4 f(r) \, \partial r.$$

Alle Elementarkräfte zusammengenommen liefern folglich die Oberflächenspannung

$$a = \frac{1}{8} \pi \rho^2 \int_{r_1}^{r_2} r^4 f(r) \, \partial r.$$

Wir wollen das Molecularintegral als viertes Molecularintegral  $J^4$  bezeichnen, weil r darin in der vierten Potenz steht. Wir schreiben daher die contractive Oberspannung

$$a=\frac{1}{8}\pi \rho^2 J^4.$$

Für den Druck in einer bestimmten Tiefe h unter der Oberfläche haben wir zwei Werthe gefunden, einen horizontalen und einen abweichenden verticalen Druck. Nun kann aber doch füglich nur Ein Druck in einem gewissen Punkte herrschen. In der Rechnung haben wir den Flüssigkeitsblock als frei angesehen, und dann kann er nicht im Gleichgewichte bleiben. Wenn unser Block aber ein Bestandtheil einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeitsmasse ist, dann wird der Überschuss des horizontalen Druckes, d. h. die horizontale Spannung der Oberflächenhaut, durch den Gegenzug der umgebenden, d. h. fortsetzungsweisen Haut paralysirt, so dass der wirklich in einem Punkte der Oberflächenhaut vorhandene horizontale Druck dann gleich dem Verticaldrucke ist. Dieser ist nach einer Elementarkraft gleich  $\pi \rho^2 (r^2 h - \frac{1}{3} h^3) f(r) \partial r$ . Alle Elementarkräfte zusammen geben also in der Tiefe h unter der Oberfläche den Druck

$$\pi \rho^2 h \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r) \, \partial r - \frac{1}{3} \pi \rho^2 h^3 \int_{r_1}^{r_2} f(r) \, \partial r.$$

Symbolisch schreiben wir

$$\pi \rho^2 h J^2 - \frac{1}{3} \pi \rho^2 h^3 J^0.$$

Wir nennen  $J^2$  und  $J^0$  das zweite und nullte Molecular integrale.

#### 2. Randwinkel.

Die Figur 7 zeigt die ebene Oberfläche o o' einer festen Wand B, und auf derselben liegt eine Flüssigkeit A, deren freie Oberflächen mit e und e' bezeichnet sind. Dieselben bilden mit o o' den Winkel  $\varphi$ , den wir berechnen wollen.

Die Cohäsion von A erzeugt in der ganzen Oberflächenhaut von A, also nicht nur in den aufsteigenden Theilen e und e', sondern auch in der horizontalen, der Wand aufliegenden Haut eine Spannung, welche wir mit

$$\frac{1}{8}\pi \rho_1^2 J_1^4$$

bezeichnet haben. Die Indices 1 bei  $\rho$  und J deuten an, dass vom ersten Stoffe, von der Flüssigkeit A die Rede ist.

Die Spannungen in *B* kümmern uns nicht weiter. Zu berechnen ist aber noch die Spannung, die die Anziehung der Wand auf *A* in den Grenzschichten von *A* erregt.

Suchen wir den verticalen Druck, den eine Schicht  $n_0$  in A in einer Höhe h < r ober der Wandoberfläche durch die ober ihr bis zur Höhe r liegenden Schichten erleidet. Die Schicht n in der Höhe  $r > h_1 > h$  in A erleidet durch die Schicht  $n_2$  in der Tiefe  $h_2$  unter oo' in B den verticalen Zug

$$2\pi\,\rho_{\mathbf{1}}\rho_{\mathbf{2}}\left(h_{\mathbf{2}}+h_{\mathbf{1}}\right)\partial h_{\mathbf{1}}\partial h_{\mathbf{2}}f_{\mathbf{3}}^{\boldsymbol{\cdot}}(r)\,\partial r.$$

Hier bedeuten  $\rho_1$  und  $\rho_2$  die Dichten von A und von B; der Index am Functionszeichen weist auf die Adhäsion hin (im Gegensatze zur Cohäsion).

Alle Schichten  $n_2$  von  $h_2 \equiv o$  bis  $h_2 \equiv r - h_1$  liefern einen verticalen Zug, den wir durch Integration nach  $h_2$  bestimmen, zu

$$\pi \rho_1 \rho_2 (r^2 - h_1^2) \partial h_1 f_3(r) \partial r.$$

Alle Schichten  $n_1$  von  $h_1 = h$  bis  $h_1 = r$  liefern den Verticaldruck, den wir durch Integration nach  $h_1$  bestimmen, zu

$$\gamma = \pi \, \rho_{\rm 1} \rho_{\rm 2} \left( \frac{2}{3} \, r^3 - r^2 h + \frac{1}{3} \, h^3 \right) f_{\rm 3}(r) \, \partial r.$$

Diesen Druck per Flächeneinheit erleidet  $n_0$  auf seiner oberen Fläche. Mit dieser Kraft trachtet sich also  $n_0$  horizontal auszubreiten.

Eine horizontale Spannung erzeugt die Wand B in  $n_0$  nicht, da die Schichten in B unendlich sind in Bezug auf die Schichte  $n_0$ , in welchem Falle, wie wir gefunden haben, die kleinere Schicht keine horizontale Spannung erhält. Die Wand erzeugt also in  $n_0$  nur obige expansive Spannung  $\gamma$ . Nun haben wir früher gefunden, dass die Cohäsion von A in derselben Schicht  $n_0$  eine contractive Spannung erzeugt

$$\alpha = \frac{1}{2} \pi \rho_1^2 \left( \frac{2}{3} r^3 - r^2 h + \frac{1}{3} h^3 \right) f_1(r) \partial r.$$

Die wirkliche Spannung in  $n_0$  ist also in contractivem Sinne gleich  $\alpha-\gamma$  oder

$$s = \frac{1}{2} \, \pi \, \Big( \frac{2}{3} \, r^2 - r^2 h + \frac{1}{3} \, h^3 \Big) \Big( \rho_1^2 f_1(r) \, \eth r - 2 \rho_1 \rho_2 f_3(r) \eth r \Big).$$

Wie wir sehen, kann diese Spannung sowohl positiv, als auch negativ, d. h. sowohl contractiv, als auch expansiv sein. Auf die Lamellendicke  $\partial h$  berechnet, ist diese Spannung gleich  $s\partial h$ , und für alle Lamellen von h = o bis h = r ist sie

$$\int_{h=0}^{h=r} s \, \partial h = \frac{1}{8} \pi \left[ \rho_1^2 r^4 f_1(r) \, \partial r - 2 \rho_1 \rho_2 r^4 f_3(r) \, \partial r \right].$$

Alle Elementarkräfte zusammen liefern dann die Spannung, die wir durch Integration von  $r=r_1$  bis  $r=r_2$  finden. Wir erhalten

$$\frac{1}{8}\pi\rho_1^2J_1^4-2 \frac{1}{8}\pi\rho_1\rho_2J_3^4,$$

wofür wir kürzer schreiben können a-2c. Die Contacthaut kann also sowohl contractiv, als auch expansiv gespannt sein. Spannungslos ist sie für a=2c. Die freie Oberfläche e der Flüssigkeit, welche mit der Wand den Winkel  $\varphi$  bildet, hat die contractive Spannung a, und deren der Wand parallele Componente  $a\cos\varphi$  muss der Spannung der Contactschicht das Gleichgewicht halten. So viel sehen wir sofort, dass  $\varphi < R$  sein muss, wenn die

Contactlamelle contractiv gespannt, also a < 2c ist, dass aber  $\varphi > R$  sein muss, wenn die Contactlamelle expansiv gespannt, d. h. a < 2c ist. Für a = 2c, d. h. wenn die Contactlamelle spannungsfrei ist, muss  $\varphi = R$  sein. Wir haben im Allgemeinen die Bedingung

$$a-2c \equiv a\cos\varphi$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{a-2c}{a}.$$

## Das fünfte Molecularintegral.

1. Wir wollen nun Druck und Spannung in einem orthogonalen, nach den Hauptaxen orientirten Blocke (Fig. 6) einer Flüssigkeit betrachten, in welcher die Dichte  $\rho$  nach der z-Axe, also von unten nach oben sich ändert. Wir zerlegen wieder die Flüssigkeit in horizontale Schichten von der Dicke  $\partial H$ , wobei H nach der z-Axe gemessen ist. In einer Schicht  $n_0$  betrachten wir wieder ein Flüssigkeitselement von dem Volumen  $\partial x \partial y \partial H$  und berechnen für jede der drei Hauptrichtungen den Druck, dem das Element ausgesetzt ist.

### Der verticale Druck.

Die Kraft, mit der zwei horizontale Lamellen  $n_1$  und  $n_2$  von den Dicken  $\partial H_1$  und  $\partial H_2$ , den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$  und den Höhen  $h_1$  und  $h_2$  über einer gegebenen Schichte  $n_0$  sich vermöge einer Elementarkraft vom Wirkungsradius r und dem Wirkungsintervall  $\partial r$  per Flächeneinheit anziehen, ist

$$\mathbf{Z} = 2\pi \rho_1 \rho_2 (\mathbf{h_1} - \mathbf{h_2}) \partial \mathbf{H_1} \partial \mathbf{H_2} f(r) \partial r.$$

Da die Dichte mit der Höhe über  $n_0$  sich nach irgend einem Gesetze ändert, diese Änderung aber in der Praxis innerhalb der geringen Wirkungsweite r einer Elementarmolecularkraft nur eine sehr geringe ist, so können wir annehmen, wenn  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit in  $n_0$  ist,

$$\rho_1 = \rho + h_1 \rho' + \frac{1}{2} h_1^2 \rho'' + .$$

$$\rho_2 = \rho + h_2 \rho' + \frac{1}{2} h_2^2 \rho'' + .$$

Hieraus finden wir, wenn wir wieder nur bis zur zweiten Potenz der Abstände gehen, für das Product  $\rho_1 \rho_2$ 

$$\rho_1 \rho_2 = \rho^2 + \rho \rho' (h_1 + h_2) + \frac{1}{2} \rho \rho'' (h_1^2 + h_2^2) + \rho'^2 h_1 h_2.$$

Wir vereinfachen uns die Rechnung, wenn wir einsetzen

$$h_1 = \zeta + \frac{1}{2}H$$
  $h_2 = \zeta - \frac{1}{2}H$ .

Wir erhalten dann

$$\begin{split} (h_1 - h_2) &= H \quad (h_1 + h_2) = 2\zeta \quad h_1 h_2 = \left(\zeta^2 - \frac{1}{4} H^2\right) \\ h_1^2 + h_2^2 &= 2\left(\zeta^2 + \frac{1}{4} H^2\right) \cdot \end{split}$$

Diese Werthe eingesetzt finden wir, wenn wir das Product  $\rho_1 \rho_2$  nach Potenzen von  $\zeta$  ordnen

$$\mathbf{Z} = 2\pi \left( \rho^2 + \frac{1}{4} \left[ \rho \rho'' - \rho'^2 \right] H^2 + 2\rho \rho' \zeta + \left[ \rho \rho'' + \rho'^2 \right] \zeta^2 \right) H \partial H_1 \partial H_2 f(r) \partial r.$$

Wenn  $\zeta$  zwischen  $+\frac{1}{2}H$  und  $-\frac{1}{2}H$  liegt, dann liegt stets die Schicht  $n_1$  oberhalb, die Schicht  $n_2$  aber unterhalb  $n_0$ , und  $n_1$  und  $n_2$  liefern für  $n_0$  eine verticale Druckcomponente. Die Summe aller Druckcomponenten, welche aus solchen Schichtenpaaren vom Abstande H resultiren, finden wir, wenn wir Z von  $\zeta = -\frac{1}{2}H$  bis  $\zeta = +\frac{1}{2}H$  integriren. Die Integration betrifft offenbar nur das Product  $\rho_1$   $\rho_2$ , und wir müssen  $\partial H_1 = \partial H_2 = \partial \zeta$  setzen. Wenn wir die Integration ausführen und die erhaltenen Glieder nach Potenzen von H ordnen, dann erhalten wir

$$\int_{-\frac{1}{2}H}^{+\frac{1}{2}H} Z = 2\pi \left( \rho^2 H^2 \partial H + \frac{1}{3} \left[ \rho \rho'' - \frac{1}{2} \rho'^2 \right] H^4 \partial H \right) f(r) \partial r.$$

Hier haben wir  $\Im \zeta$  wieder durch  $\Im H$  ersetzt. Diesen Druck liefern in  $n_0$  alle Schichtenpaare vom Abstande H. Den ganzen Druck, welchen alle Schichtenpaare von dem Abstande H = o

bis H=r liefern, finden wir durch Integration nach H von H=o bis H=r. Wenn wir integriren und nach r ordnen, dann finden wir den Druck in  $n_0$ 

$$\frac{2}{3} \pi \rho^2 r^3 f(r) \, \partial r + \frac{2}{15} \pi \left( \rho \, \rho'' - \frac{1}{2} \, \rho'^2 \right) r^5 f(r) \, \partial r.$$

Den Druck, den alle Elementarkräfte von  $r=r_1$  bis  $r=r_2$  liefern, finden wir abermals durch Integration, und zwar von  $r=r_1$  bis  $r=r_2$ ; wir erhalten als Verticaldruck in  $n_0$ 

$$p = \frac{2}{3} \pi \rho^2 \int_{r_1}^{r_2} r^3 f(r) \, \partial r + \frac{2}{15} \pi \left( \rho \, \rho'' - \frac{1}{2} \, \rho'^2 \right) \int_{r_1}^{r_2} r^5 f(r) \, \partial r.$$

Dem ersten Integral sind wir schon einmal begegnet und haben es als drittes Molecularintegral  $J^3$  bezeichnet. Analog wollen wir das zweite Integral als fünftes Integral  $J^5$  bezeichnen, nachdem es r in der fünften Potenz enthält. Wir schreiben also diesen Druck einfacher

$$p = \frac{2}{3} \, \pi \, \rho^2 J^3 + \frac{2}{15} \, \pi \left( \rho \, \rho^{\prime \prime} - \frac{1}{2} \, \rho^{\prime 2} \right) J^5.$$

Diesen Druck erleidet also unser Flüssigkeitselement vom Volumen  $\partial x \partial y \partial H$  per Flächeneinheit auf seiner oberen und unteren Fläche.

## Der horizontale Druck.

Eine Schicht  $n_0$  zeigt unter der Einwirkung einer Schicht  $n_1$  im Abstande H in jeder Richtung, also sowohl in der Richtung der x-Axe, als auch in der Richtung der y-Axe den Druck per Flächeneinheit

$$X = Y = R = \frac{1}{2} \pi \rho \rho_1 (r^2 - H^2) \partial H_0 \partial H_1 f(r) \partial r.$$

Für  $\rho_1$  schreiben wir  $\rho + h_1 \rho' + \frac{1}{2} h_1^2 \rho'' + .$  und für  $\partial H_1$  folgerichtig  $\partial h_1$ . Die Summe aller horizontalen Drucke, welche von allen Schichten  $n_2$  von  $h_1 = -r$  bis  $h_1 = +r$  in  $n_0$  erzeugt werden, finden wir durch Integration nach  $h_1$  von  $h_1 = -r$  bis  $h_1 = +r$  und erhalten

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2r^3f(r)\,\partial r+\frac{1}{15}\pi\rho\rho''r^5f(r)\,\partial r.$$

Für alle Elementarkräfte zusammengenommen finden wir

$$\begin{split} q &= \frac{2}{3} \pi \rho^2 \int_{r_1}^{r_2} r^3 f(r) \, \partial r + \frac{1}{15} \pi \rho \rho'' \int_{r_1}^{r_2} r^3 f(r) \, \partial r \\ &= \frac{2}{3} \pi \rho^2 J^3 + \frac{1}{15} \pi \rho \rho'' J^5. \end{split}$$

## Die Spannung.

Unser Flüssigkeitselement vom Volumen  $\partial x \partial y \partial H$  in der Lamelle  $n_0$  erleidet den verticalen Druck p per Flächeneinheit an der oberen und unteren Fläche und den Druck q per Flächeneinheit an seinen verticalen Seitenflächen. Diese Drucke heben sich nur theilweise gegenseitig auf, und es resultirt ein horizontaler Drucküberschuss

$$\begin{split} s &= q - p = -\frac{1}{15} \pi \rho \rho'' J^5 + \frac{1}{15} \pi \rho'^2 J^5 \\ &= -\frac{1}{15} \pi (\rho \rho'' - \rho'^2) J^5. \end{split}$$

Dieser horizontale Drucküberschuss erscheint uns als horizontale Spannung per Flächeneinheit. Wir lesen aus der Formel:

In einer nicht homogenen Flüssigkeit zeigen die (ebenen) Schichten gleicher Dichte im Allgemeinen zwei Spannungen; die erste hängt von dem Gefälle  $\rho'$ , die zweite von  $\rho''$ , also von der Krümmung der Dichtigkeitscurve ab.

Die Steigerung  $\rho'$  der Dichtigkeitseurve in irgend einer Schicht  $n_0$  verursacht in derselben unbedingt contractive Spannung, welche dem Quadrate der Steigerung  $\rho'$  proportional ist.

Die Spannung, welche von  $\rho'$  abhängt, ist unbedingt contractiv; sie ist dem Quadrate des Gefälles der Dichtigkeitseurve proportional und ist unabhängig von der absoluten Dichte  $\rho$  der Flüssigkeit.

Die Spannung, welche von  $\rho''$  abhängt, kann sowohl expansiv, als auch contractiv sein. Sie ist expansiv, wo die Dichtigkeitscurve concav verlauft, während sie contractiv ist, wo die Dichtig-

keitseurve convex ist; die Spannung ist der Dichte  $\rho$  der Flüssigkeit in der in Rede stehenden Lamelle proportional.

Die Spannung einer Lamelle ist = o, wenn  $\rho'' = o$  und  $\rho' = o$  ist, d. h. wenn die Flüssigkeit homogen ist oder wenn  $\rho \rho'' = {\rho'}^2$  ist. Das kann also nur dort der Fall sein, wo die Dichtigkeitscurve concav verlauft.

Wieder taucht die Frage auf, ob im Elemente  $\partial x \partial y \partial H$  der Druck p oder der Druck q herrscht, da doch nur einer von beiden herrschen kann, wenn Gleichgewicht vorhanden ist. Wenn unser Flüssigkeitsblock nur ein Theil einer grösseren Masse ist, dann wird der horizontale Drucküberschuss, d. i. die horizontale Spannung, durch den Gegenzug der sich nach allen Seiten anschliessenden gleichartigen Schichten paralysirt, so dass dann auf allen sechs Flächen nur der Druck p, d. i. der Verticaldruck herrscht. Dieser ist aber

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2J^3 + \frac{1}{15}\pi\rho\rho''J^5 - \frac{1}{15}\rho'^2J^5.$$

Der Druck in einer Lamelle wird also durch das Gefälle der Dichtigkeitscurve unbedingt erniedrigt, und zwar ist diese Erniedrigung dem Quadrat des Gefälles  $\rho'$  proportional und von der absoluten Dichte  $\rho$  unabhängig.

13

Die Krümmung der Dichtigkeitscurve kann den Binnendruck sowohl erhöhen, als auch erniedrigen. Wo  $\rho'' < o$  ist, d. h. wo die Curve convex verlauft, dort wird der Binnendruck erniedrigt, während er erhöht wird, wo die Curve concav verlauft.

Der Binnendruck ist derselbe, wie in der homogenen Flüssigkeit, wo  $2\rho \rho'' = \rho'^2$  ist. Das kann also nur dort sein, wo die Curve concav verlauft.

2. Wir wollen nun annehmen, dass in einem Gefässe über der Flüssigkeit A sich die Flüssigkeit B befindet und dass an der Grenze der beiden sich eine Mischungsschicht gebildet hat. Wir wollen Druck und Spannung in dieser Mischungsschicht berechnen.

#### Der verticale Druck.

Wir zerlegen wieder die Flüssigkeit in Schichten von der Dicke  $\partial H$ . In einer Schicht  $n_0$  seien die Flüssigkeiten A und B

derart gemischt, dass in der Volumeinheit von gleicher Mischung das Volumen  $\omega_1$  von A und das Volumen  $\omega_2$  von B enthalten wäre. Natürlich ist dann  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ . Wenn reine Flüssigkeit A die Dichte  $\rho_1$  besitzt, reine Flüssigkeit B aber die Dichte  $\rho_2$ , dann hat in der Schicht  $n_0$  die Flüssigkeit A die Dichte  $\omega_1 \rho_1$ , während B ebendaselbst die Dichte  $\omega_2 \rho_2$  besitzt. In der Höhe  $h_1$  über der Schicht  $n_0$  befindet sich eine andere Schicht  $n_1$ , wo die Dichte  $a_1$  der Flüssigkeit A gleich ist

$$a_1 = (\omega_1 \rho_1) + h_1 \frac{\partial (\omega_1 \rho_1)}{\partial z} + \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 (\omega_1 \rho_1)}{\partial z^2} + \dots$$

Nun ist  $\rho_1$  constant und nur  $\omega_1$  variabel, also

$$\frac{\partial (\omega_1 \rho_1)}{\partial z} = \rho_1 \omega_1' \qquad \frac{\partial^2 (\omega_1 \rho_1)}{\partial z^2} = \rho_1 \omega_1'',$$

so dass wir schreiben können

$$a_{1} = \omega_{1} \rho_{1} + h_{1} \rho_{1} \omega_{1}' + \frac{1}{2} h_{1}^{2} \rho_{1} \omega_{1}'' + \dots$$

$$= \rho_{1} \left( \omega_{1} + h_{1} \omega_{1}' + \frac{1}{2} h_{1}^{2} \omega_{1}'' + \dots \right).$$

Auf ganz ähnliche Weise finden wir die Dichte der Flüssigkeit B in  $n_1$  gleich

$$b_1 = \rho_2 \left( \omega_2 + h_1 \omega_2' + \frac{1}{2} h_1^2 \omega_2'' + \dots \right)$$

Nun gilt wegen  $\omega_1 + \omega_2 = 1$  auch  $\omega_2' = -\omega_1'$  und  $\omega_2'' = -\omega_1''$ ; also ist auch

$$b_{1} = \rho_{2} \left( \omega_{2} - h_{1} \omega_{1}' - \frac{1}{2} h_{1}^{2} \omega_{1}'' \right) \cdot$$

In einer zweiten Schicht  $n_2$  in der Höhe  $h_2$  über  $n_0$  ist analog die Dichte von A oder  $a_2$  gleich

$$a_2 = \rho_1 \left( \omega_1 + h_2 \, \omega_1' + \frac{1}{2} \, h_2^2 \, \omega_1'' \right)$$

und die Dichte  $b_2$  von B gleich

$$b_{\rm 2} = \rho_{\rm 2} \Big( \omega_{\rm 2} - h_{\rm 2} \omega_{\rm 1}' - \frac{1}{2} \, h_{\rm 2}^2 \, \omega_{\rm 1}'' \Big) \cdot$$

Zwischen den Schichten  $n_1$  und  $n_2$  finden nun vier Anziehungen statt:

- I. Die A-Flüssigkeit in  $n_1$  wird angezogen
- 1. durch die A-Flüssigkeit in  $n_2$ ,
- 2. durch die B-Flüssigkeit in  $n_2$ .

II. Die B-Flüssigkeit in  $n_1$  wird angezogen

- 3. durch die A-Flüssigkeit in  $n_2$ ,
- 4. durch die B-Flüssigkeit in  $n_2$ .

Die erste und vierte Anziehung beruhen auf Cohäsionskräften, indem gleichartige Flüssigkeiten einander anziehen, während die dritte und zweite Anziehung auf Adhäsionskräften beruhen, nachdem ungleichartige Stoffe sich anziehen. Die allgemeine Formel für Verticalanziehung zweier Flüssigkeitsschichten per Flächeneinheit ist

$$2\pi \rho_1 \rho_2 H \partial H_1 \partial H_2 f(r) \partial r$$
.

Auf unsere vier obigen Anziehungen überschrieben, lautet die Formel

$$\begin{array}{lll} A_{1}A_{2} \colon & 2\pi\,a_{1}a_{2}\,(h_{1}-h_{2})\,\partial H_{1}\partial H_{2}\,f_{11}(r)\,\partial r\\ A_{1}B_{2} \colon & 2\pi\,a_{1}b_{2}\,(h_{1}-h_{2})\,\partial H_{1}\partial H_{2}\,f_{12}(r)\,\partial r\\ B_{1}A_{2} \colon & 2\pi\,b_{1}a_{2}\,(h_{1}-h_{2})\,\partial H_{1}\partial H_{2}\,f_{12}(r)\,\partial r\\ B_{1}B_{2} \colon & 2\pi\,b_{1}b_{2}\,(h_{1}-h_{2})\,\partial H_{1}\partial H_{2}\,f_{22}(r)\,\partial r \end{array}$$

Die vorgesetzten Symbole deuten die Flüssigkeiten an, welche sich anziehen; dasselbe deuten die Indices der Functionszeichen an. Im zweiten und dritten Falle ist von derselben Kraft die Rede, nämlich von der Adhäsion von A und B; darum ist auch in beiden Fällen die Indicirung dieselbe. Wir haben nun in obige vier Ausdrücke die Werthe  $a_1$   $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$  einzusetzen. Wir berechnen zunächst nur die vier Producte  $a_1$   $a_2$ ,  $a_1$   $b_2$ ,  $b_1$   $a_2$ ,  $b_1$   $b_2$ , wobei wir nur bis zur zweiten Potenz des h vorschreiten. Wir finden, wobei wir  $\omega'$  und  $\omega''$  für  $\omega'_1$  und  $\omega''_1$  schreiben:

$$\begin{split} a_1 a_2 &= \rho_1^2 \Big( \omega_1^2 + [h_1 + h_2] \, \omega_1 \omega' + \frac{1}{2} \, [h_1^2 + h_2^2] \omega \, \omega'' + h_1 h_2 \, \omega'^2 \Big) \\ a_1 b_2 &= \rho_1 \, \rho_2 \, \Big( \omega_1 \omega_2 + [h_1 \omega_2 - h_2 \omega_1] \, \omega' + \frac{1}{2} \, [h_1^2 \omega_2 - h_2^2 \omega_1] - h_1 h_2 \, \omega'^2 \Big) \end{split}$$

$$\begin{split} b_1 a_2 &= \rho_1 \, \rho_2 \left( \omega_1 \omega_2 + [h_2 \omega_2 - h_1 \omega_1] \, \omega' + \frac{1}{2} \, [h_2^2 \, \omega_2 - h_1^2 \, \omega_1] - h_1 h_2 \, \omega'^2 \right) \\ b_1 \, b_2 &= \rho_2^2 \left( \omega_2^2 - [h_1 + h_2] \, \omega_2 \, \omega' - \frac{1}{2} \, [h_1^2 + h_2^2] \, \omega_2 \, \omega'' + h_1 h_2 \, \omega'^2 \right) \cdot \end{split}$$

In diese Formeln führen wir nun wieder ein

$$h_1 = h + \frac{1}{2}H$$
  $h_2 = h - \frac{1}{2}H$ 

und überdies noch vorkommenden Falles  $\omega_2 - \omega_1 = n$ . Unsere vier Producte nehmen dann die Formen an, wenn wir nach h ordnen

$$\begin{split} a_1 a_2 &= \rho_1^2 \left( \omega_1^2 + \frac{1}{4} \left[ \omega_1 \omega'' - \omega'^2 \right] H^2 + 2 \omega_1 \omega' h + \left[ \omega_1 \omega'' + \omega'^2 \right] h^2 \right) \\ a_1 b_2 &= \rho_1 \, \rho_2 \left( \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{2} \, \omega' H + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \, \omega'' n + \omega'^2 \right] H^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \omega' n + \frac{1}{2} \, \omega'' H \right] h + \left[ \frac{1}{2} \, \omega'' n - \omega'^2 \right] h^2 \right) \\ b_1 a_2 &= \rho_1 \, \rho_2 \left( \omega_1 \omega_2 - \frac{1}{2} \, \omega' H + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \, \omega'' n + \omega'^2 \right] H^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \omega' n + \frac{1}{2} \, \omega'' H \right] h + \left[ \frac{1}{2} \, \omega'' n - \omega'^2 \right] h^2 \right) \\ b_1 b_2 &= \rho_2^2 \left( \omega_2^2 - \frac{1}{4} \left[ \omega_2 \omega'' + \omega'^2 \right] H^2 - 2 \omega_2 \omega' h + \left[ - \omega_2 \omega'' + \omega'^2 \right] h^2 \right) \end{split}$$

Wenn wir diese Werthe in den Ausdrücken für  $A_1A_2...B_1B_2$  einsetzen, dann können wir dem h jeden Werth zwischen  $+\frac{1}{2}h$  und  $-\frac{1}{2}H$  geben, und stets fählt dann  $n_2$  unter,  $n_1$  aber ober  $n_0$ , so dass sie auf  $n_0$  druckerzeugend wirken. Durch Integration von  $h=-\frac{1}{2}H$  bis  $h=+\frac{1}{2}H$  finden wir den Druck, den alle Lamellenpaare von dem Abstande H in  $n_0$  erzeugen. Wir erhalten

$$\begin{split} &A_{1}A_{2}\colon\ 2\pi\ \rho_{1}^{2}\left(\omega_{1}^{2}H+\frac{1}{3}\left[\omega_{1}\omega''-\frac{1}{2}\ \omega'^{2}\right]H^{3}\right)H\ \partial Hf_{11}(r)\ \partial r\\ &A_{1}B_{2}\colon\ 2\pi\ \rho_{1}\rho_{2}\left(\omega_{1}\omega_{2}H+\frac{1}{2}\ \omega'H^{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ \omega''n+\frac{1}{2}\ \omega'^{2}\right]H^{3}\right)H\ \partial Hf_{12}(r)\ \partial r \end{split}$$

$$\begin{split} &B_{1}A_{2}\colon\ 2\pi\rho_{1}\rho_{2}\left(\omega_{1}\omega_{2}H-\frac{1}{2}\,\omega'H^{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\,\omega''n+\frac{1}{2}\,\omega'^{2}\right]H^{3}\right)H\,\partial Hf_{12}(r)\,\partial r\\ &B_{1}B_{2}\colon\ 2\pi\,\rho_{2}^{2}\left(\omega_{2}^{2}H-\frac{1}{3}\left[\omega_{2}\omega''+\frac{1}{2}\,\omega'^{2}\right]H^{3}\right)H\,\partial Hf_{22}(r)\,\partial r \end{split}$$

Die Schichtenpaare von allen möglichen Abständen von  $H \equiv o$  bis  $H \equiv r$  liefern in  $n_0$  einen Druck, den wir durch Integration nach H von  $H \equiv o$  bis  $H \equiv r$  finden. Wir erhalten

$$\begin{split} &A_{1}A_{2}\colon \, 2\pi\,\rho_{1}^{\,2}\Big(\frac{1}{3}\,\omega_{1}^{2}\,r^{3} + \frac{1}{15}\left[\,\omega_{1}\omega'' - \frac{1}{2}\,\omega'^{2}\right]r^{5}\Big)f_{11}(r)\,\partial r\\ &A_{1}B_{2}\colon \, 2\pi\,\rho_{1}\rho_{2}\,\Big(\frac{1}{3}\,\omega_{1}\omega_{2}r^{3} + \frac{1}{8}\,\omega'r^{4} + \frac{1}{15}\left[\,\frac{1}{2}\,\omega''n + \frac{1}{2}\,\omega'^{2}\right]r^{5}\Big)f_{12}(r)\,\partial r\\ &B_{1}A_{2}\colon \, 2\pi\,\rho_{1}\rho_{2}\Big(\frac{1}{3}\,\omega_{1}\omega_{2}r^{3} - \frac{1}{8}\,\omega'r^{4} + \frac{1}{15}\left[\,\frac{1}{2}\,\omega''n + \frac{1}{2}\,\omega'^{2}\right]r^{5}\Big)f_{12}(r)\,\partial r\\ &B_{1}B_{2}\colon \, 2\pi\,\rho_{2}^{\,2}\Big(\frac{1}{3}\,\omega_{2}^{\,2}\,r^{3} - \frac{1}{15}\left[\,\omega_{2}\omega'' + \frac{1}{2}\,\omega'^{2}\right]r^{5}\Big)f_{22}(r)\,\partial r \end{split}$$

Alle Elementarkräfte von  $r=r_1$  bis  $r=r_2$  zusammengenommen liefern einen Druck in  $n_0$ , den wir durch Integration nach r zwischen den obigen Grenzen erhalten. Wir finden

Ü

$$\begin{split} &A_{1}A_{2} \colon \ 2\pi \, \rho_{1}^{2} \bigg( \frac{1}{3} \, \omega_{1}^{2} J_{1}^{3} + \frac{1}{15} \bigg[ \, \omega_{1} \, \omega'' - \frac{1}{2} \, \omega'^{2} \bigg] \, J_{1}^{5} \bigg) \\ &A_{1}B_{2} \colon \ 2\pi \, \rho_{1}\rho_{2} \left( \frac{1}{3} \, \omega_{1}\omega_{2} J_{3}^{3} + \frac{1}{8} \, \omega' J_{3}^{4} + \frac{1}{15} \bigg[ \, \frac{1}{2} \, \omega'' n + \frac{1}{2} \, \omega'^{2} \bigg] \, J_{3}^{5} \right) \\ &A_{1}A_{2} \colon \ 2\pi \, \rho_{1}\rho_{2} \left( \frac{1}{3} \, \omega_{1}\omega_{2} J_{3}^{3} - \frac{1}{8} \, \omega' J_{3}^{4} + \frac{1}{15} \bigg[ \, \frac{1}{2} \, \omega'' n + \frac{1}{2} \, \omega'^{2} \bigg] \, J_{3}^{5} \right) \\ &B_{1}B_{2} \colon \ 2\pi \, \rho_{2}^{2} \bigg( \frac{1}{3} \, \omega_{2}^{2} J_{2}^{3} - \frac{1}{15} \bigg[ \, \omega_{2} \, \omega'' + \frac{1}{2} \, \omega'^{2} \bigg] \, J_{2}^{5} \bigg) \end{split}$$

Diese vier Ausdrücke zusammengenommen liefern den verticalen Druck, den ein in der Lamelle  $n_0$  gelegenes Flüssigkeitselement vom Volumen  $\partial x \partial y \partial H$  an seiner oberen und unteren Fläche per Flächeneinheit erleidet. Bei dem Buchstaben J deutet der untere Index 1 an, dass das Integral sich auf die Cohäsion der ersten Flüssigkeit A bezieht; in der zweiten und dritten Zeile hat J den unteren Index 3, welcher die Adhäsion der beiden

Flüssigkeiten andeutet, während in der letzten Zeile der Index 2 die Cohäsion von B andeutet. Ferner ist bekanntlich  $n = \omega_2 - \omega_1$ .

#### Der horizontale Druck.

Wir gehen nun auf die Bestimmung des horziontalen Druckes über, der in der Schichte  $n_0$  herrscht. Derselbe ist für alle Richtungen, also auch für die Richtung der x und die Richtung der y derselbe, und zwar ist der allgemeine Ausdruck für denselben

$$q = \frac{1}{2} \pi \rho_{1} \rho_{2} (r^{2} - H^{2}) \partial H_{1} \partial H_{2} f(r) \partial r.$$

Als zweite Schichte wollen wir  $n_0$  ansehen, also den Index 2 durch den Index o ersetzen.

Nun wiederholen sich die Überlegungen, die wir bei Bestimmung der Verticaldruckes machen mussten. Wieder haben wir zwischen  $n_0$  und  $n_1$  vier Wechselwirkungen. Es wirkt nämlich

$$A_1$$
 in  $n_1$  auf  $A_0$  in  $n_0$ 
 $A_1$   $n_1$   $B_0$   $n_0$ 
 $B_1$   $n_1$   $A_0$   $n_0$ 
 $B_1$   $n_1$   $R_0$   $n_0$ 

Die Dichte von  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_0$ ,  $B_0$  ist

$$A_{1} \qquad \qquad \rho_{1} \left( \omega_{1} + H \, \omega' + \frac{1}{2} \, H^{2} \, \omega'' \right)$$

$$B_{1} \qquad \qquad \rho_{2} \left( \omega_{2} - H \, \omega' - \frac{1}{2} \, H^{2} \, \omega'' \right)$$

$$A_{0} \qquad \qquad \rho_{1} \omega_{1}$$

$$B_{0} \qquad \qquad \rho_{2} \omega_{2}$$

Die obigen vier Wechselwirkungen liefern nun durch successive Substitution im Ausdrucke für q in  $n_0$  folgende vier horizontale Drucke:

$$\begin{split} B_{1}A_{0} \colon & \frac{1}{2} \pi \rho_{1}\rho_{2}\omega_{1} \left(\omega_{2} - H \omega' - \frac{1}{2} H^{2}\omega''\right) (r^{2} - H^{2}) \partial H_{1} \partial H_{2}f_{12}(r) \partial r \\ B_{1}B_{0} \colon & \frac{1}{2} \pi \rho_{2}^{2} \omega_{2} \left(\omega_{2} - H \omega' - \frac{1}{2} H^{2}\omega''\right) (r^{2} - H^{2}) \partial H_{1} \partial H_{0}f_{22}(r) \partial r \end{split}$$

Die Schicht  $n_1$  kann nun alle Abstände H von  $n_0$  von H = -r bis H = +r haben. Die Wirkung aller dieser zwischen diesen Grenzen liegenden Schichten zusammengenommen finden wir durch Integration nach H von H = -r bis H = +r. Wir erhalten folgende Werthe:

$$\begin{split} &A_{1}A_{0}\colon & \pi\,\rho_{1}^{2}\,\omega_{1}\left(\frac{2}{3}\,\omega_{1}\,r^{3} + \frac{1}{15}\,\omega''r^{5}\right)\!f_{11}(r)\,\partial r\,\partial H_{0} \\ &A_{1}B_{0}\colon & \pi\,\rho_{1}\rho_{2}\,\omega_{2}\left(\frac{2}{3}\,\omega_{1}\,r^{3} + \frac{1}{15}\,\omega''r^{5}\right)\!f_{12}(r)\,\partial r\,\partial H_{0} \\ &B_{1}A_{0}\colon & \pi\,\rho_{1}\rho_{2}\,\omega_{1}\left(\frac{2}{3}\,\omega_{2}\,r^{3} - \frac{1}{15}\,\omega''r^{5}\right)\!f_{12}(r)\,\partial r\,\partial H_{0} \\ &B_{1}B_{0}\colon & \pi\,\rho_{2}^{2}\,\omega_{2}\left(\frac{2}{3}\,\rho_{2}\,r^{3} - \frac{1}{15}\,\omega''r_{5}\right)\!f_{22}(r)\,\partial r\,\partial H_{0} \end{split}$$

Wenn wir den Druck auf die Flächeneinheit beziehen wollen, dann müssen wir den letzten Factor  $\partial H_0$  überall durch 1 ersetzen. Alle Elementarkräfte zusammengenommen liefern einen Druck, den wir durch Integration nach r finden. Wir erhalten

$$\begin{split} &A_{1}A_{0}\colon & \pi\,\rho_{1}^{2}\,\omega_{1}\left(\frac{2}{3}\,\,\omega_{1}J_{1}^{3}+\frac{1}{15}\,\omega''J_{1}^{5}\right)\\ &A_{1}B_{0}\colon & \pi\,\rho_{1}\rho_{2}\,\omega_{2}\left(\frac{2}{3}\,\,\omega_{1}J_{3}^{3}+\frac{1}{15}\,\omega''J_{3}^{5}\right)\\ &B_{1}A_{0}\colon & \pi\,\rho_{1}\rho_{2}\,\omega_{1}\left(\frac{2}{3}\,\,\omega_{2}J_{3}^{3}-\frac{1}{15}\,\omega''J_{3}^{5}\right)\\ &B_{1}B_{0}\colon & \pi\,\rho_{2}^{2}\,\omega_{2}\left(\frac{2}{3}\,\,\omega_{2}J_{2}^{3}-\frac{1}{15}\,\omega''J_{2}^{5}\right) \end{split}$$

Die Spannung.

Wir wollen nun sowohl die verticalen, als auch die horizontalen Drucke zusammenstellen und hiebei folgende Abkürzungen anwenden:

$$ho_1^2 J_1^3 \equiv a \qquad \qquad 
ho_1^2 J_1^5 \equiv a \qquad \qquad 
ho_1 \rho_2 J_3^4 \equiv c \\ 
ho_2^2 J_2^3 \equiv b \qquad \qquad 
ho_2^2 J_2^5 \equiv \beta \\ 
ho_1 \rho_2 J_3^3 \equiv c \qquad \qquad 
ho_1 \rho_2 J_3^5 \equiv \gamma$$

Der verticale Gesammtdruck ist

$$\begin{split} Z &= + \; \frac{2}{3} \, \pi \, \omega_1^2 a + \frac{2}{15} \, \pi \left( \omega_1 \, \omega'' - \frac{1}{2} \, \omega'^2 \right) \alpha \\ &+ \frac{2}{3} \, \pi \, \omega_1 \omega_2 \, c + \frac{1}{4} \, \pi \, \omega' c + \frac{1}{15} \, \pi \left( \omega'' [\omega_2 - \omega_1] + \omega' \right) \gamma \\ &+ \frac{2}{3} \, \pi \, \omega_1 \omega_2 \, c - \frac{1}{4} \, \pi \, \omega' c + \frac{1}{15} \, \pi \left( \omega'' [\omega_2 - \omega_1] + \omega'^2 \right) \gamma \\ &+ \frac{2}{3} \, \pi \, \omega_2^2 \, b - \frac{2}{15} \, \pi \left( \omega_2 \, \omega'' + \frac{1}{2} \, \omega'^2 \right) \beta \end{split}$$

Der horizontale Gesammtdruck ist

$$\begin{split} X = Y = R = & + \frac{2}{3} \pi \omega_1^2 a + \frac{1}{15} \pi \omega_1 \omega'' \alpha \\ & + \frac{2}{3} \pi \omega_1 \omega_2 c + \frac{1}{15} \pi \omega_2 \omega'' \gamma \\ & + \frac{2}{3} \pi \omega_1 \omega_2 c - \frac{1}{15} \pi \omega_1 \omega'' \gamma \\ & + \frac{2}{3} \pi \omega_2^2 b - \frac{1}{15} \pi \omega_2 \omega'' \beta \end{split}$$

In der Lamelle  $n_0$  erleidet also das Flüssigkeitselement vom Volumen  $\partial x \partial y \partial H$  an der oberen und unteren Seite den Druck Z, während es an den vier verticalen Seiten den horizontalen Druck X = Y = R per Flächeneinheit erleidet. Der Druck R ist im Allgemeinen grösser, und er wird durch Z nicht vollständig paralysirt. Es erübrigt ein horizontaler Drucküberschuss R-Z, welcher als contractive Spannung von  $n_0$  erscheint. Die Werthe von Z und R können wir zusammenziehen und finden dann

$$\begin{split} Z &= + \frac{2}{3} \pi (\omega_1^2 a + \omega_2^2 b + 2\omega_1 \omega_2 c) \\ &- \frac{1}{15} \pi (\alpha + \beta - 2\gamma) \omega'^2 \\ &+ \frac{2}{15} \pi (\omega_1 [\alpha - \gamma] - \omega_2 [\beta - \gamma]) \omega'' \end{split}$$

$$\begin{split} X = Y = R = & + \frac{2}{3} \pi (\omega_1^2 a + \omega_2^2 b + 2\omega_1 \omega_2 c) \\ & + \frac{1}{15} \pi (\omega_1 [\alpha - \gamma] - \omega_2 [\beta - \gamma]) \omega'' \end{split}$$

Für die contractive Spannung s per Einheit des Querschnittes erhalten wir dann den Werth

$$\begin{split} s &= + \textit{R} - \textit{Z} \\ &= + \frac{1}{15} \pi (\alpha + \beta - 2 \gamma) \omega'^2 \\ &- \frac{1}{15} \pi (\omega_1 [\alpha - \gamma] - \omega_2 [\beta - \gamma]) \omega'' \end{split}$$

Die Spannung in den Lamellen gleicher Mischung in der Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten A und B setzt sich also hauptsächlich aus zwei Theilen zusammen: aus einer Spannung, welche vom Gefälle der Mischungscurve, also von  $\omega'$  abhängt, und aus einer Spannung, welche von  $\omega''$ , also von der Krümmung der Mischungscurve abhängt.

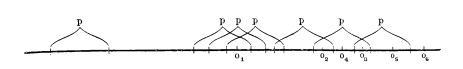
Das Gefälle  $\omega'$  der Mischungscurve verursacht unbedingt contractive Spannung, wenn die Adhäsionsconstante  $\gamma$  kleiner ist, als das arithmethische Mittel der Cohäsionsconstanten  $\alpha$  und  $\beta$  der beiden Flüssigkeiten A und B. Diese Spannung ist von der absoluten Dichte der Flüssigkeiten  $\omega_1 \rho_1$  und  $\omega_2 \rho_2$  unabhängig, aber dem Quadrate des Gefälles  $\omega'$  proportional.

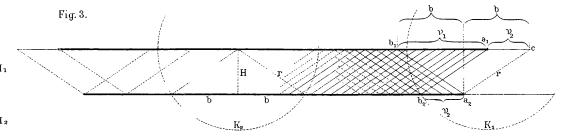
Die Spannung, welche von  $\omega''$  abhängt, ist eine interessante Function, deren Discussion aber zu weit führen würde.

Als Druck in irgend einem Punkte der Mischungsschicht haben wir wieder den Verticaldruck anzusehen. Der Binnendruck ist also

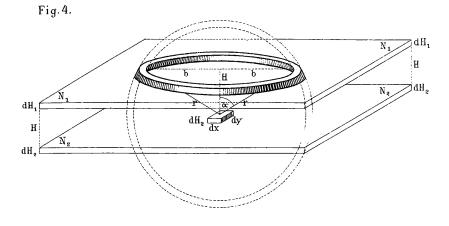
$$\begin{split} Z &= + \frac{2}{3} \pi (\omega_1^2 a + \omega_2^2 b + 2\omega_1 \omega_2 c) \\ &- \frac{2}{15} \pi (\alpha + \beta - 2\gamma) \omega'^2 \\ &+ \frac{2}{15} \pi (\omega_1 [\alpha - \gamma] - \omega_2 [\beta - \gamma]) \omega'' \end{split}$$

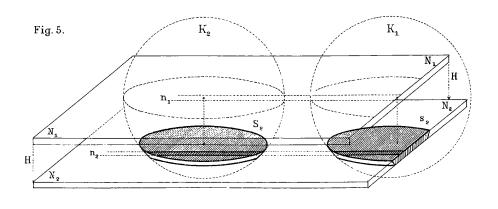
Fig. 1.





ds, ds





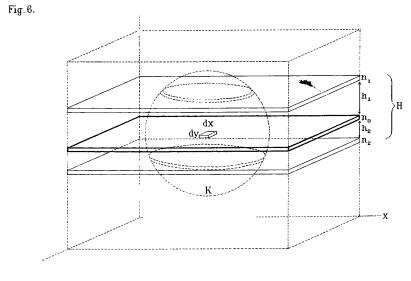
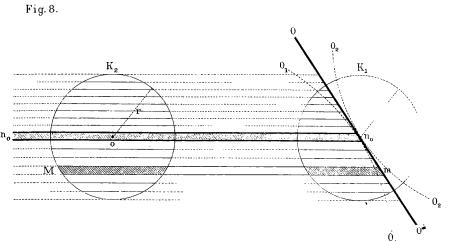


Fig. 7.



©Akademie d. Wissenschaften Wien: download unter www.biologiezentrum.at

Der Binnendruck ist also wieder vom Verlaufe des Dichtigkeitscurve abhängig.

Der Binnendruck in einem gewissen Punkte wird dem Quadrate des Gefälles  $\omega'$  der Mischungscurve proportional unbedingt verkleinert, wenn die Adhäsionsconstante  $\gamma$  kleiner ist, als das Mittel der Cohäsionsconstanten  $\alpha$  und  $\beta$ ; im umgekehrten Falle wird der Binnendruck unbedingt vermehrt.

Wenn die Mischung der beiden Flüssigkeiten homogen ist, also  $\omega' = o$  und  $\omega'' = o$  ist, dann ist der Binnendruck

$$\frac{2}{3}\pi(\omega_{1}^{2}a+\omega_{2}^{2}b+2\omega_{1}\omega_{2}c).$$

# **ZOBODAT - www.zobodat.at**

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: <u>Sitzungsberichte der Akademie der</u> <u>Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse</u>

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: 98\_2a

Autor(en)/Author(s): Fuchs K.

Artikel/Article: <u>Directe Ableitung einiger Capillaritätsfunctionen 1362-</u>1391