

Zum Normalenproblem der Kegelschnitte

von

Dr. P. H. Schoute,

Professor an der Universität in Groningen.

I. Die Ellipse.

1. Ist

$$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Ellipse und also

$$H \equiv a^2yx' - b^2xy' - c^2xy = 0$$

die Gleichung der apollonischen Hyperbel, welche auf E die Fusspunkte der vom Punkte (x', y') auf E gefällten Normalen angibt, so wird der Kegelschnitt

$$zE - H = 0$$

des von E und H bestimmten Büschels in zwei Geraden zerfallen unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 2b^2z & c^2 & b^2y' \\ c^2 & 2a^2z & -a^2x' \\ b^2y' & -a^2x' & -2a^2b^2z \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Streichung der Accente:

$$4a^2b^2z^3 + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)z + c^2xy = 0. \quad \dots 1)$$

Hiermit ist die von Herrn Pelz¹ angeregte und von den Herren Lauer² und Mertens³ weitergeführte Unter-

¹ Zum Normalenproblem der Ellipse. Diese Berichte, Bd. XCV, II. Abth., März-Heft 1887.

² Zum Normalenproblem der Ellipse. Diese Berichte, Bd. XCVIII, II. Abth., Februar-März-Heft 1889.

³ Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. Diese Berichte, Bd. XCVIII, II. Abth., Februar-März-Heft 1889.

suchung der Zerlegung der das Normalenproblem lösenden Gleichung der vierten Ordnung in zwei quadratischen Factoren an die Discussion einer Fläche dritter Ordnung geknüpft. Es wird uns die Thatsache, dass die 27 Geraden dieser Fläche sich unmittelbar angeben lassen, bei der Behandlung dieses Problemes von Nutzen sein.

2. Die Fläche 1) wird von der Ebene $z = 0$ in drei Geraden geschnitten, in den Axen und in der unendlich weiten Geraden der Ebene. Ausserdem hat die Fläche noch sechs je vierfach zu zählende Geraden, da sie vier Doppelpunkte aufzuweisen hat. Diese Punkte

$$\left(\frac{ic^2}{a}, \frac{ic^2}{b}, \frac{-c^2}{2ab} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{ic^2}{a}, \frac{-ic^2}{b}, \frac{c^2}{2ab} \right) \\ \left(\frac{-ic^2}{a}, \frac{-ic^2}{b}, \frac{-c^2}{2ab} \right) \end{array} \right\}, \left(\frac{-ic^2}{a}, \frac{ic^2}{b}, \frac{c^2}{2ab} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{ic^2}{a}, \frac{-ic^2}{b}, \frac{c^2}{2ab} \right) \\ \left(\frac{-ic^2}{a}, \frac{ic^2}{b}, \frac{-c^2}{2ab} \right) \end{array} \right\},$$

welche paarweise conjugirt imaginär sind, werden unmittelbar gefunden, wenn man die entweder die x -Axe oder die y -Axe schneidenden Geraden der Fläche sucht. Von diesen sechs Verbindungslinien der vier Punkte sind nur die Geraden

$$\left. \begin{array}{l} ax = by \\ 2abz = -c^2 \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ax = -by \\ 2abz = c^2 \end{array} \right\}$$

reell. Es wird desshalb die Fläche 1) nur von den Ebenen der fünf Büschel

$$\begin{array}{l} z = \alpha_1 x, \quad z = \alpha_2 y, \quad z = \alpha_3, \\ 2abc = -c^2 + \beta_1(ax - by), \quad 2abz = c^2 + \beta_2(ax + by) \end{array}$$

in reellen zerfallenden Curven dritter Ordnung geschnitten.

3. Dem letztgefundenen Ergebnisse kann der Schluss entnommen werden, dass es ausser den von den genannten Autoren aufgedeckten Geraden und Kreisen keine Geraden und Kreise gibt, deren Punkte eine einfache Construction der vier Normalen zulassen. Den Beweis dieses Satzes, der die angeführten Arbeiten ergänzen soll, erbringen wir wie folgt.

Erst zeigen wir, dass die fünf Ebenenbüschel nur zu den bekannten Orten führen.

Die Substitution von $\alpha_1 x$ für z in 1) gibt eine Kreisgleichung für $\alpha_1 = \pm \frac{ic}{2ab}$; aber die dieser Gleichung entsprechenden Kreise sind imaginär.

Die Substitution $z = \alpha_2 y$ gibt für $\alpha_2 = \pm \frac{c}{2ab}$ die Kreise $(x \pm \frac{bc}{a})^2 + y^2 - c^2 = 0$, welche von Lauer mann und Mertens gefunden sind.

Die Substitution $z = \alpha_3$ gibt drei Gerade für $z = 0$, die Axen und die unendlich weite Gerade und kann sonst weder reelle Gerade noch reelle Kreise liefern.

Die Substitution $2abz = \pm c^2 + \beta(ax \mp by)$ führen nur dann zu einer Geraden, wenn β unendlich genommen wird, und niemals zu einem Kreise. Sie liefern also die beiden von Pelz gefundenen Durchmesser $ax \mp by = 0$.

Zweitens muss nun noch gezeigt werden, dass andere Substitutionen ebenso wenig neue Gerade und Kreise liefern können.

Wie Herr Lauer mann bemerkt, ist die Normalenconstruction für den Punkt (x, y) nur dann mit Zirkel und Lineal allein durchführbar, wenn die cubische Gleichung 1) in z eine Wurzel hat, die sich entweder in rationaler Form oder in Quadratwurzeln darstellen lässt. Diese Bedingung kann sogleich dahin vereinfacht werden, dass der Gegensatz zwischen rationaler Form und Quadratwurzeln verschwinde. Ist eine der drei Wurzeln der Gleichung 1) mittelst Quadratwurzeln aus rationalen Formen von x und y darstellbar, so muss sich die Gleichung 1) in die beiden Gleichungen

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

$$Dz + E = 0$$

spalten lassen; aber dann kann die in rationalen Formen ausdrückbare Wurzel der letzteren Gleichung in Betracht genommen werden. Also muss endlich noch bewiesen werden, dass die Substitution

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \quad \dots 2)$$

wo φ und ψ rationale Formen irgend welchen Grades in x und y sind, niemals die Gleichung einer neuen Gerade oder einen neuen Kreis enthaltenden Curve hervorbringen kann.

Durch Elimination von z zwischen 1) und 2) erhält man die Gleichung des durch die Schnittcurve von 1) und 2) zu legenden Cylinders. Nun ist es unmöglich, dass sich von diesem Cylinder eine in einer neuen Geraden auf der Ebene XOY senkrecht stehende Ebene ablöse. Denn eine solche Ebene schneidet die Fläche 1) in einer nichtzerfallenden Curve dritter Ordnung, und da in der Fläche 2) einem Werthsysteme von x und y nur ein einziger Werth von z entspricht, kann diese Curve nicht ganz dem Durchschnitte angehören. Und es ist auch unmöglich, dass sich vom Cylinder ein in einem von den Kreisen von Lauer- mann verschiedenen Kreise auf der Ebene XOY senkrecht stehender Kreiscylinder abtrenne. Denn die Raumcurve sechster Ordnung, welche den Durchschnitt dieses Kreiscylinders mit der Fläche 1) bilden würde, kann keinen sich in einem neuen Kreise projicirenden Kegelschnitt enthalten, was doch nothwendig wäre, wenn sich in jeden Punkt der kreisförmigen Spur nur ein einziger Punkt der Schnittcurve projiciren sollte.

4. Wenn α -Normalen¹ an Stelle der gewöhnlichen Normalen treten und $g = \tan \alpha$ ist, muss die apollonische Hyperbel durch die Hyperbel

$$H' \equiv a^2 y \left(x' + \frac{y}{g} \right) - b^2 x \left(y' - \frac{x'}{y} \right) - c^2 xy - \frac{a^2 b^2}{g^2} = 0 \quad \dots 3)$$

ersetzt werden. Substituiren wir x'' und y'' für $x' + \frac{y}{g}$ und $y' - \frac{x'}{y}$, so tritt

¹ Die Betrachtung der α -Normalen bei der Ellipse rührt von unserem Landgenossen J. W. Tesch her (Wiskundige opgaven, Theil III, 1885, S. 264). Es ist sein Verdienst, den bekannten schönen Satz von Joachimsthal dahin ausgedehnt zu haben, dass jeder Kreis die Ellipse in vier Punkten schneidet, die nach Ersetzung von irgend einem durch den diametral gegenüberliegenden Punkt für ein mit dem Kreise bestimmtes α vier Fusspunkte von zusammengehörigen α -Normalen sind. Es sind die weiter oben hervortretenden Durchmesser der Ellipse, welche hier an die Stelle der von Pelz gefundenen treten, schon von ihm in richtiger Weise erkannt.

Einen sich dem Gedankengange Joachimsthal's ganz anschliessenden Beweis dieser erweiterten Sätze findet man in Mathesis, Theil VII, 1887, S. 38.

$$4a^2b^2z^3 + \frac{2a^2b^2}{g}z^2 + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^2)z + c^2\left(xy - \frac{c^2}{2g}\right) = 0 \dots 4)$$

an Stelle der Bedingungsgleichung 1). Nun hat der Flächenbüschel 4) die ganz besondere Eigenschaft, aus lauter Flächen mit vier Doppelpunkten zu bestehen. Für die von α individualisirte Fläche sind diese vier Punkte

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{ic}{a} \sqrt{c^2 - \frac{ab}{g}}, \frac{ic}{b} \sqrt{c^2 - \frac{ab}{g}}, \frac{-c^2}{2ab} \right) \\ & \left(\frac{-ic}{a} \sqrt{c^2 - \frac{ab}{g}}, \frac{-ic}{b} \sqrt{c^2 - \frac{ab}{g}}, \frac{-c^2}{2ab} \right) \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{ic}{a} \sqrt{c^2 + \frac{ab}{g}}, \frac{-ic}{b} \sqrt{c^2 + \frac{ab}{g}}, \frac{c^2}{2ab} \right) \\ & \left(\frac{-ic}{a} \sqrt{c^2 + \frac{ab}{g}}, \frac{ic}{b} \sqrt{c^2 + \frac{ab}{g}}, \frac{c^2}{2ab} \right) \end{aligned} \right\}$$

Von ihnen sind ein Paar reell, wenn $c^4g^2 < a^2b^2$ ist, und zwar entweder das obere oder das untere, je nachdem g negativ oder positiv ist. Für $c^4g^2 = a^2b^2$ reduciren sie sich zu zwei reellen biplanaren Punkten mit imaginären osculirenden Ebenen. Die drei einfachen Geraden der Fläche sind die unendlich weite Gerade der Ebene XOY und die Geraden

$$z = -\frac{1}{2\alpha}, \quad a^2x^2 + b^2y^2 = 2gc^2xy. \quad \dots 5)$$

Es sind also bei den α -Normalen ebenfalls zwei Gerade und zwei Kreise zu erwarten, deren Punkte eine Lösung des Normalenproblems mit Zirkel und Lineal zulassen. Wir werden aber bald einsehen, dass nur die zwei Geraden wirklich vorhanden sind.

Die zu erwartenden Geraden werden wieder von den reellen Verbindungslinien der Doppelpunkte geliefert, welche nicht verschieden sind von den bei dem Falle der wirklichen Normalen gefundenen. Allein hier sind x und y rückwärts durch $x' + \frac{y'}{g}$ und $y' - \frac{x'}{g}$ zu ersetzen. Deshalb finden wir hier die Geraden

$$g(ax-by) + (ay+bx) = 0, \quad g(ax+by) + (ay-bx) = 0,$$

welche leicht als diejenigen Durchmesser der Ellipse erkannt werden, welche mit den gleichen conjugirten Durchmessern den Winkel α bilden.¹

Die zu erwartenden Kreise werden, falls sie wirklich vorkommen, von den Ebenenbüscheln mit den Axen 5) geliefert werden. Diese Axen sind nur dann reell, wenn die vier Doppelpunkte der Fläche sämtlich imaginär sind. In diesem Falle setzen wir

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2c^2gxy = a^2(x - \mu_1 y)(x - \mu_2 y) = a^2P_1P_2.$$

Dann ist die Projection der Schnittcurve der Ebene

$$z = -\frac{1}{2g} + kP_1$$

mit der Fläche 4) nach Beseitigung des Factors P_1

$$\frac{a^2b^2k}{g^2} - \frac{4a^2b^2k^2}{g}P_1 + 4a^2b^2k^3P_1^2 - \frac{a^2P_2}{2g} + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)k = 0$$

und deshalb niemals ein Kreis, wenn g von Unendlich verschieden ist.

II. Die Hyperbel.

5. Ist

$$H' \equiv -b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Hyperbel und also

$$H'' \equiv a^2yx' + b^2xy' - c^2xy = 0$$

die Gleichung der apollonischen Hyperbel für den Punkt (x', y') , so ist

$$4a^2b^2z^3 + (-a^2x^2 + b^2y^2 + c^4)z - c^2xy = 0 \quad \dots 6)$$

¹ Wir überlassen es dem geneigten Leser, die von Pelz und Anderen für den Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gegebene Construction auf den Fall irgend eines α auszudehnen.

die Gleichung der mit dem Normalenprobleme verknüpften Fläche dritter Ordnung. Es hat diese Fläche die vier Doppelpunkte

$$\left(\frac{ic^2}{a}, \frac{c^2}{b}, \frac{ic^2}{2ab} \right) \left(\frac{ic^2}{a}, \frac{-c^2}{b}, \frac{-ic^2}{2ab} \right) \left(\frac{-ic^2}{a}, \frac{c^2}{b}, \frac{-ic^2}{2ab} \right) \left(\frac{-ic^2}{a}, \frac{-c^2}{b}, \frac{ic^2}{2ab} \right)$$

mit den reellen Verbindungslinien

$$\left. \begin{aligned} by &= c^2 \\ 2bz &= x \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} by &= -c^2 \\ 2bz &= -x \end{aligned} \right\};$$

sie wird deshalb nur von den Ebenen der fünf Büschel

$$\begin{aligned} z &= \alpha_1 x, \quad z = \alpha_2 y, \quad z = \alpha_3 \\ 2bz &= x + \beta_1 (by - c^2), \quad 2bz = -x + \beta_2 (by + c^2) \end{aligned}$$

in reellen zerfallenden Curven dritter Ordnung geschnitten. Deshalb finden wir hier die Geraden

$$by = \pm c^2$$

und keine Kreise; denn für die Ebenen $z = \pm \frac{c}{2ab} x$ ist das Centrum des Kreises wohl reell, aber das Quadrat des Radius negativ.

III. Die Parabel.

6. Ist

$$P \equiv y^2 - 2px = 0$$

die Parabelgleichung und $\left(\frac{z^2}{2p}, z \right)$ ein Punkt dieser Curve, so ist

$$z^3 - 2pz(x-p) - 2p^2y = 0 \quad \dots 7)$$

die Gleichung, welche aussagt, dass die Normale in diesem Punkte durch den gegebenen Punkt (x, y) gehe. Es ist 1) die Gleichung einer Regelfläche dritter Ordnung, von welcher die Doppelgerade und die einfache Gerade, die keine Erzeugenden sind, mit der unendlich weiten Geraden der Ebene $z = 0$ zusammenfallen. Es wird diese Fläche von den Ebenen $z = \alpha$ in

den Erzeugenden geschnitten, d. h. die Normalenconstruction ist mit Zirkel und Lineal durchführbar für alle Punkte einer gegebenen Normale. Und neben diesem selbstverständlichen Satze ergibt sich nichts Neues, da die Kegelschnitte der Fläche sämtlich Parabeln sind.

Liegt die gegebene Parabel gezeichnet vor, so wird es wohl am einfachsten sein, ihre Schnittpunkte mit dem Joachimsthal'schen Kreise des Punktes (x', y') zu bestimmen. Die Gleichung dieses Kreises ist:

$$\left(x - \frac{x' + p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{4}\right)^2 = \left(\frac{x' + p}{2}\right)^2 + \frac{y'^2}{16}$$

Das Centrum kann also leicht construirt und dann der Kreis durch den Scheitel der Parabel gezogen werden.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: [98_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Schoute P. H.

Artikel/Article: [Zum Normalenproblem der Kegelschnitte 1519-1526](#)