

Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie

von

Emil Waelsch,

Assistent an der k. k. deutsch. techn. Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. December 1889.)

Nach Hermann Grassmann kann man die Liniencoordinaten p_{ik} einer Geraden symbolisch $= p_i p_k = -p_k p_i$ setzen. Wenn man diese Symbole in einige bekannte liniengeometrische invariante Bildungen einführt,[1] so sieht man, dass sich diese Invarianten aus Factoren zusammensetzen, die in Bezug auf die Symbole linear sind, also aus Factoren wie

$$p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3+p_4\xi_4,$$

wobei die ξ_i Ebenencoordinaten sind. Daher werden diese Elementarfactoren für sich invariant sein und z. B. die p contragredient den ξ.

Von diesen Erwägungen ausgehend, wird man auch lineare und höhere Complexe symbolisiren, das Verhalten der Symbole bei linearer Transformation untersuchen, dann invariante Elementarausdrücke bilden und aus diesen durch Aggregation alle Invarianten. Dies auszuführen und einige Anwendungen zu geben, ist die Absicht der vorliegenden Arbeit.

1. Die Symbole.

Sind x_i, y_i die Coordinaten zweier Punkte, ξ_i, η_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Coordinaten zweier Ebenen einer Geraden, so sind bekanntlich die Strahlencoordinaten dieser Geraden die sechs Grössen $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, welche mit den Axencoordinaten $\pi_{ik} = \xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i$ durch die Relationen $p_{23} = \rho\pi_{14}$, $p_{31} = \rho\pi_{24}$. verbunden sind. Es ist $p_{ik} = -p_{ki}$, $\pi_{ik} = -\pi_{ki}$.

[1] Z. B. in die Formeln, welche Herr Pasch ableitet in seiner Abhandlung: Zur Theorie der linearen Complexe. Crelle's Journal. Bd. 75. S. 106.

Man kann statt dieser Coordinaten Symbole dadurch einführen, dass man setzt

$$p_{ik} = p_i p_k = -p_k p_i, \quad p_i p_i = 0$$
$$\pi_{ik} = \pi_i \pi_k = -\pi_k \pi_i, \quad \pi_i \pi_i = 0$$

Die p_i mögen Strahlensymbole, die π_i Axensymbole heissen.[1] Ist $\Sigma c_{ik}\pi_{ik} = 0$ oder $\Sigma \gamma_{ik} p_{ik} = 0$, wobei $c_{23} = \rho\gamma_{14}$ u. s. w. die Gleichung eines linearen Complexes, so heissen die c_{ik} oder γ_{ik} die Coordinaten desselben. Man kann wieder setzen

$$c_{ik} = c_i c_k = -c_k c_i, \quad \gamma_{ik} = \gamma_i \gamma_k = -\gamma_k \gamma_i.$$

Da $\Sigma c_i c_k \pi_i \pi_k = \Sigma c_i \pi_i c_k \pi_k = \frac{1}{2}(c\pi)^2$, so übergeht die Complexgleichung in

$$\frac{1}{2}(c\pi)^2 = 0 \text{ oder } \frac{1}{2}(\gamma p)^2 = 0.$$

Kommen in einer Form die Linien- oder Complexcoordinaten in höherem Grade vor, so wird man, um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, so viele Symbolreihen $p = p^1 = p^2 \ldots$, $\pi = \pi^1 = \pi^2 \ldots$ einführen, als dieser Grad beträgt.

2. Lineare Transformation.

Der Raum der Punkte x werde der linearen Transformation

$$x'_i = (\alpha^i x) \tag{1}$$

unterworfen. Dann sind die Coordinaten der transformirten Geraden

$$p'_{ik} = \alpha^i x \,.\, \alpha^k y - \alpha^i y \,.\, \alpha^k x = \Sigma \alpha^i_\lambda \alpha^k_\mu p_\lambda p_\mu$$

also

$$p'_{ik} = p'_i p'_k = (\alpha^i p)(\alpha^k p). \tag{2}$$

---

[1] Auch die Determinanten, welche Coordinaten eines Elementargebildes in einem beliebigen linearen Raume sind (s. Clebsch, Über eine Fundamentalaufgabe der Invarianttheorie. Math. Annal. Bd. 5), kann man symbolisch einem Producte desselben Grades gleichsetzen. Man gelangt dann zur Grassmann'schen Bestimmungsweise der Raumgebilde.

Ist nun die Form $F(p_{ik})$ bei der Transformation 1) invariant, so ist $F(p'_{ik}) = F(p'_i p'_k) = F((\alpha^i p)(\alpha^k p)) = cF(p_{ik})$; wendet man daher auf $F(p'_{ik})$ die Substitution

$$p'_i = \alpha^i p$$

an, so gelangt man zur transformirten Form. Daher folgt:

Die Symbole p, c sind cogredient den Coordinaten x und daher contragredient den untereinander cogredienten π, γ, ξ.

Demnach werden symbolische Ausdrücke wie:

$$(p\pi),\ (p\gamma),\ (p\xi),\ (x\pi),\ (x\gamma),\ (p^1p^2p^3p^4),\ (p^1p^2cx),\ (\gamma\pi\xi\eta) \text{ u. s. w.}$$

bei linearer Transformation invariant sein. Durch Aggregation dieser Ausdrücke erhält man dann invariante Bildungen, unter welchen die wichtigsten diejenigen sein werden, bei welchen die Symbole in solchen Graden vorkommen, dass das Aggregat unsymbolische Bedeutung hat.

So sind z. B. $(c\gamma)^2$, $(cx).(cy)$ Invarianten des linearen Complexes. Die erste verschwindet, wenn der Complex singulär wird, die letztere gibt annulirt die durch den Complex bestimmte Reciprocität.

3. Bildformen zweiter Ordnung.

Die invariante Form $F(c_{ik}, \gamma_{ik}, p_{ik}, \pi_{ik})$, welche jede Symbolreihe der Complexform c quadratisch enthält, ist auch dann eine invariante Bildung, wenn man in dem System der gegebenen Formen statt des Complexes die quadratische Form $(c\xi)^2$ einführt, ebenso statt der Symbole γ, p, π die Symbole der quadratischen Formen $(\gamma x)^2$, $(p\xi)^2$, $(\pi x)^2$. So lässt sich jede liniengeometrische invariante Bildung eines Systems, in welchem lineare Complexe vorkommen, in einem System deuten, in welchem statt dieser Complexe und der Liniencoordinaten Formen zweiter Ordnung, die Bildformen, auftreten.

Jede Invariante des letzteren Systems ist aber ein Aggregat bloss der oben angegebenen symbolischen Elementarausdrücke. Man erhält daher durch Aggregation dieser Elementarausdrücke auch alle liniengeometrischen Invarianten des gegebenen Systems.

Beispiel: Jede Invariante des Complexes $(\gamma p)^2 = 0$, welche bloss von den γ abhängt, ist das Bild einer Invariante der Fläche $(\gamma x)^2 = 0$, also ist nur das Bild ihrer einzigen Invariante $(\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4)^2$ zu wählen; da nun (s. Art. 5)
$(\gamma' \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4)^2 = \frac{3}{2} \left((c\gamma)^2\right)^2$, so besitzt der lineare Complex nur die Invariante $(c\gamma)^2$.

4. Complexe n^{ten} Grades.

Im II. Bande der Math. Annalen hat Clebsch[1] gezeigt, dass jeder Complex n^{ten} Grades symbolisch dargestellt werden kann als Potenz eines linearen Complexes. Ist

$$C \equiv \Sigma c_{ik,\, lm,} \ldots \pi_{ik} . \pi_{lm} = 0$$

die Complexgleichung, so kann man ja symbolisch setzen

$$c_{ik,\, lm} \qquad = c_{ik} . c_{lm} .$$

worauf $C \equiv (\Sigma c_{ik} \pi_{ik})^n$ wird.

Für unsere Zwecke ist es nicht nöthig, auf die dort weiterhin eingeführte Normalform einzugehen; wir bilden eine neue symbolische Form, indem wir symbolische Linien- und Complexcoordinaten einführen. Es wird

$$2^n . C \equiv \left((c\pi)^2\right)^n .$$

Demnach sind

$$(c\pi)^{2n} = 0 \text{ und } (\gamma p)^{2n} = 0$$

die symbolischen Complexgleichungen. Auch hier treten im Sinne des vorigen Artikels an Stelle des gegebenen Complexes die Bildformen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, respective $2n^{\text{ter}}$ Classe $(c\xi)^{2n}$ und $(\gamma x)^{2n}$, so dass also der dort angegebene Satz auch gilt, wenn das System Complexe höheren Grades enthält.

5. Identitäten.

a) In der Identität

$$(bcd\xi)(ax) - (acd\xi)(bx) + (abd\xi)(cx) - (abc\xi)(dx) + (abcd)(\xi x) = 0 \quad 1)$$

---

[1] Über die Plücker'schen Complexe, S. 1. Siehe auch Salmon Fiedler, Raumgeometrie. II. S. 503.

führe man dadurch Complexsymbole ein, dass man setzt:

$$a = \gamma^1,\ b = \gamma^1,\ c = \gamma^2,\ d = \gamma^2;$$

dann erhält man, da $\gamma m . \gamma n = -\gamma n . \gamma m$, die Identität:

$$2(\gamma^2\gamma^2\gamma^1\xi)(\gamma^1 x) + 2(\gamma^1\gamma^1\gamma^2\xi)(\gamma^2 x) = (\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^2)(\xi x).$$

Nun ist

$$(\gamma\gamma\gamma'\xi) = 2\gamma_2\gamma_3(\gamma'_1\xi_4 - \gamma'_4\xi_1) - \quad . = \Sigma c_i c_k(\gamma'_i\xi_k - \gamma'_k\xi_i) = c\gamma' . c\xi - c\xi . c\gamma',$$

also

$$(\gamma\gamma\gamma'\xi) = 2c\gamma' . c\xi, \tag{2}$$

daher übergeht die letzte Identität in

$$\xi c^1 . c^1\gamma^2 . \gamma^2 x + \xi c^2 . c^2\gamma^1 . \gamma^1 x = -\frac{1}{2}(c^1\gamma^2)^2(\xi x). \tag{I}$$

Sind die Complexe 1) und 2) identisch, so erhält man

$$\xi c . c\gamma . \gamma x = -\frac{1}{4}(c\gamma)^2 . \xi x. \tag{II}$$

b) Setzt man in der Identität 1)

$$b = c^1,\ c = c^2.\ d = c^3,\ \xi = x,\ a = y$$

$x =$ den Unterdeterminanten der Matrix $|c^1c^2c^3|$, so erhält man unter Benützung von 2)

$$-(xc^1c^2c^3)(yc^1c^2c^3) = (yc^2c^3x)c^2\gamma^1 . \gamma^1 c^3 + (yc^3c^1x)c^3\gamma^2 . \gamma^2 c^1 + \\ + (yc^1c^2x)c^1\gamma^3 . \gamma^3 c^2,$$

oder bei Gleichwerthigkeit der Symbole auf der rechten Seite:

$$-(xc^1c^2c^3)(yc^1c^2c^3) = 3(yc^1c^2x)c^1\gamma . \gamma c^2 = 3(c^1c^2xy) . c^1\gamma . \gamma c^2$$

und hieraus, indem man rechts die Formel II) und dann 2) benützt:

$$(c^1c^2c^3x)(c^1c^2c^3y) = \frac{3}{2}(c\gamma)^2 . \gamma x . \gamma y. \tag{III}$$

Setzt man hierin $x = y = c^4$, so folgt für einen linearen Complex

$$(c^1c^2c^3c^4)^2 = \frac{3}{2}(c\gamma)^4 = (\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4)^2 \tag{3}$$

und für Liniencoordinaten:

$$(p^1p^2p^3p^4)^2 = (\pi^1\pi^2\pi^3\pi^4)^2 = 24|p_{ik}| = \frac{3}{2}(p\pi)^4 =$$
$$= 24(p_{23}p_{14}+p_{31}p_{23}+p_{12}p_{34})^2$$

c) Aus

$$(c^1c^2c^3c^4)(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4)(c^1c^2c^3c^4) = (c^1c^2c^3c^4)^2(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4)$$

folgt nach der Formel 3) bei Gleichwerthigkeit der Symbole c:

$$16\, c^1\xi^1 . c^2\xi^2 . c^3\xi^3 . c^4\xi^4(c^1c^2c^3c^4) = (c\gamma)^4(\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4). \qquad 4)$$

Hiezu

$$4\, c^1\xi^1 . c^2\xi^2 . c^3\xi^3(c^1c^2c^3x^1) = (c\gamma)^2 . \gamma^1x^1 . (\xi^1\xi^2\xi^3\gamma^1), \qquad 5)$$

$$c^1\xi^1 . c^2\xi^2(c^1c^2x'x^2) = \gamma^1x^1 . \gamma^2x^2(\gamma^1\gamma^2\xi^1\xi^2); \qquad 6)$$

die beiden letzten Formeln folgen aus 5) durch ein- und zweimalige Anwendung von Substitutionen wie $\xi_i = \gamma_i . \gamma x$ und deren Umkehrung $-\frac{1}{4}(c\gamma)^2 = c_i(c\xi)$, wie letztere sich aus II) ergibt, wenn man dort $\xi = \eta$, $\xi_i = \gamma_i . \gamma x$ setzt.

Durch Anwendung der Formel 2) erhält man

$$2(\gamma\xi^1\xi^2\xi^3)\gamma x = -|ccx| . |\xi^1\xi^2\xi^3| = -\Sigma \pm (c\xi^1 . c\xi^2 . x\xi^3)$$

also

$$(\xi^1\xi^2\xi^3\gamma) . \gamma x = c\xi^2 . c\xi^3 . x\xi^1 + c\xi^3 . c\xi^1 . x\xi^2 + c\xi^1 . c\xi^2 . x\xi^3. \qquad 7)$$

Ferner

$$(\xi^1\xi^2\gamma^1\gamma^2)\gamma^1x . \gamma^1x = \frac{1}{4}(\xi^2x^2 . \xi^1x^1 - \xi^1x^2 . \xi^2x^1) + \xi^1c . c\xi^2 . x^1\gamma . \gamma x^2, \quad 8)$$

wie aus 7) für $\xi^3_i = \gamma^2_i . \gamma x$ unter Anwendung von II) folgt.

6. Der lineare Complex.

Derselbe hat die Gleichung $(c\pi)^2 = 0$ oder $(\gamma p)^2 = 0$ die Invariante $(c\gamma)^2$. Die Gleichungen $c\xi . c\eta = 0$, $\gamma x . \gamma y = 0$ geben eine Polarbeziehung, welche das mit dem Complex verbundene Nullsystem darstellt.

Nach Formel III) des vorigen Artikels ist

$$\frac{3}{2}(c\gamma)^2\gamma x.\gamma y = (c^1c^2c^3x)(c^1c^2c^3y)$$

$$\frac{3}{2}(c\gamma)^2 c\xi.c\eta = (\gamma^1\gamma^2\gamma^3\xi)(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\eta).$$

Für die Bildform $(\gamma x)^2$ hat man daher

$$\frac{3}{2}(c\gamma)^2(\gamma x)^2 = (c^1c^2c^3x)^2.$$

Die Gleichung der Fläche $(c^1c^2c^3x)^2 = 0$ in Ebenencoordinaten ist $(c\xi)^2 = 0$, also identisch mit der der anderen Bildfläche. Ihre Invariante ist $(c^1c^2c^3c^4)^2 = \frac{3}{2}((c\gamma)^2)^2$, was in Art. 3 ergab, dass $(c\gamma)^2$ die einzige Invariante des Complexes ist.

Bezeichnet man für den Augenblick mit $\hat{x}$ die Nullebene des Punktes x, mit $\hat{\xi}$ den Nullpunkt der Ebene ξ, so hat man für die Coordinaten

$$\hat{\xi}_i = c\xi.c_i.\quad \hat{x}_i = \gamma x.\gamma_i.$$

Dann folgen aus den Gleichungen 4), 5), 6), Art. 5 und ihren dualistischen die Relationen [1] zwischen den Coordinaten von 4 Punkten und ihren Nullebenen:

$$\begin{aligned}16(\hat{\xi}\hat{\eta}\hat{\zeta}\hat{\vartheta}) &= (c\gamma)^4(\xi\eta\zeta\vartheta)\\ 4(\hat{\xi}\hat{\eta}\hat{\zeta}x) &= (c\gamma)^2(\xi\eta\zeta\hat{x})\\ (\hat{\xi}\hat{\eta}xy) &= (\xi\eta\hat{x}\hat{y})\end{aligned}$$

u. s. w.

7. Drei lineare Complexe

haben die covarianten Flächen

$$x\gamma^1.\gamma^1c^2.c^2\gamma^3.\gamma^3x = 0,$$
$$\xi c^1.c^1\gamma^2.\gamma^2c^3.c^3\xi = 0.$$

[1] Vergl. Pasch, l. c. §. 4.

Es ist dies die Fläche zweiten Grades, welche von den gemeinsamen Complexstrahlen der Complexe gebildet wird. Denn es sind

$$\xi_i = x\gamma^1 . \gamma_i^1, \; \xi_i' = x\gamma^3 . \gamma_i^3$$

die Coordinaten der Nullebene des Punktes x bezüglich der Complexe 1) und 3), wenn sich diese Ebenen in einem Strahl des Complexes 2) schneiden sollen, muss nach Art. 6 $\xi c^2 . c^2 \xi' = 0$ sein.

Um die Aufgabe zu lösen, die Complexe zu bestimmen, welche die Regelschaaren einer Fläche $F_2 \equiv (\alpha x)^2 = 0$ enthalten, bemerken wir, dass in dem Büschel zweier bezüglich F_2 zu einander polarer Coplexe c, c' sich zwei Complexe der verlangten Eigenschaft vorfinden.

Die Gleichung $(\alpha\beta\xi\eta)(\alpha\beta\xi'\eta') = 0$ vermittelt die zu F_2 gehörige Polarbeziehung zwischen den Geraden, es ist daher

$$c' = \alpha c . c\beta . cp . p\alpha = 0;$$

hieraus die Symbole

$$\gamma_i' = \alpha c . \alpha_i$$

des Complexes c' und mit Hilfe der Formel 2) des Art. 5

$$c' \equiv \frac{1}{2} (\alpha\beta\gamma\gamma) \alpha p . p\beta.$$

Setzt man hierin $\gamma = \gamma'$, so erhält man den Polarcomplex c'' von c':

$$c'' \equiv \frac{1}{2} (\alpha\beta\delta\varepsilon) \alpha p . \alpha\beta . \delta c . c\varepsilon = \frac{1}{2} \; \frac{1}{24} (\alpha\beta\delta\varepsilon)^2 (ppcc) = \Delta . C.$$

Der Complex des Büschels $\lambda C + C' = 0$ hat daher als Polare den Complex $\lambda C' + \Delta C = 0$; sollen beide Complexe identisch sein, so folgt $\lambda^2 = \Delta$. Daher:

Die Regelschaaren der Fläche $(\alpha x)^2 = 0$ sind enthalten in den linearen Complexen:

$$\pm \sqrt{\Delta} (\gamma p)^2 + \alpha c . c\beta . \beta p . p\alpha = 0,$$

worin $(\gamma p)^2 = 0$ beliebiger Complex und $\Delta = |\alpha_{ik}|$.[1]

---

[1] Vergl. Gordan, Über eine das Hyperboloid betr. Aufg. Schlömilch's Zeitschr. Bd. 13. S. 59 und Pasch, l. c. §. 8 u. 11.

8. Übertragungsprincip für lineare Complexe.

Genügt die Ebene ξ der Gleichung

$$\xi c^1 . c^1 \gamma^2 . \gamma^2 c^3 . c^3 \xi = 0,$$

so liegen nach Obigem ihre Nullpunkte bezüglich der drei Complexe 1, 2, 3 in einer Geraden. In der That übergeht der linke Ausdruck in die Determinante der Coordinaten der Nullpunkte der Ebene $x_4 = 0$, wenn $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ gesetzt wird.

Man weiss nun nach Clebsch (Crelle's Journ. Bd. 59), dass sich jede Invariante J von k-Punkten einer Ebene durch die Determinanten (ikl) der Coordinaten von je drei dieser Punkte rational und ganz ausdrücken lässt. Setzt man dann für die Determinante (ikl) den Ausdruck

$$(ikl) = \xi c^i . c^i \gamma^k . \gamma^k c^l . c^l \xi,$$

so erhält man eine covariante Fläche des Systems der linearen Complexe; jede Tangentialebene derselben besitzt bezüglich der Complex k Nullpunkte, für welche $J = 0$ ist.

Ebenso gelten die dualen Betrachtungen.

Beispiel: Sollen sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, so muss [1]

$$(123)(345)(561)(246) = (456)(612)(234)(513);$$

man erhält demnach eine Fläche achter Classe, deren Tangentialebenen bezüglich der 6 Complexe 6 auf einem Kegelschnitt liegende Nullpunkte haben.

Soll dies für jede Ebene der Fall sein, so müssen die Complexe paarweise in Involution liegen. Denn enthält die Ebene einen gemeinsamen Strahl der Complexe 1, 2, 3, so muss der Kegelschnitt zerfallen, und daher muss in der Ebene ein gemeinsamer Strahl der Complexe 4, 5, 6 liegen; übereinstimmend, wird, wenn die Ebene der Fläche (123) genügt, auch einer der in der letzten Gleichung rechts stehenden Factoren verschwinden, und zwar der Factor (456), weil sonst die Complexe von einander abhängig wären. Die Complexbündel (1, 2, 3) und (4, 5, 6) liefern daher die beiden Schaaren einer und derselben F_2:

[1] S. Hunyady, Über die verschiedenen Formen der Bedingung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Crelles, Journ. Bd. 83. S. 76.

die Complexe des ersten Bündels sind mit denen des zweiten in Involution.

Es ist in der That bekannt, dass die Nullpunkte einer Ebene bezüglich eines Klein'schen Systems von 6 Fundamentalcomplexen auf einem Kegelschnitt liegen.

Es erwächst hier die Aufgabe, aus dem identischen Verschwinden der Covariante achter Classe, das Verschwinden der 15 Invarianten $(\gamma^i c^k)^2$ nachzuweisen.

9. Allgemeines Übertragungsprincip.

Jede Invariante J im ternären Gebiete ist ein Aggregat von Determinanten dritten Grades, und man kann dieselbe auffassen als Invariante J' eines Systems linearer Formen indem man die Gleichwerthigkeit der Symbole aufhebt. Ersetzt man dann die Determinanten durch Ausdrücke von der Form $\xi c^1 . c^1\gamma^2 . \gamma^2 c^3 . c^3 \xi$, so erhält man nach dem letzten Artikel diejenige Covariante eines Systems linearer Complexe, deren Tangentialebenen eine Gruppe von Nullpunkten mit der Invariante $J' = 0$ haben. Lässt man die linearen Complexe, welche von gleichwerthigen ternären Symbolen herrühren, wieder zusammenfallen, so gelangt man zu Covarianten auch von Systemen mit Complexen höherer Ordnung. Ebenso gelangt man dual zu covarianten Flächen, welche Ort des Punktes sind, dessen Complexkegel gegebene invariante Eigenschaften haben.

Enthält die invariante i Determinanten dritten Grades, so folgt:

Die $\left.\begin{matrix}\text{Ebenen}\\ \text{Punkte}\end{matrix}\right\}$, deren Complex- $\left.\begin{matrix}\text{Curven}\\ \text{Kegel}\end{matrix}\right\}$ bezüglich einer Anzahl von Complexen beliebigen Grades eine Eigenschaft haben, welche durch das Verschwinden einer Invariante vom Gewichte i ausgedrückt ist, ist eine Fläche $2i$ter $\left.\begin{matrix}\text{Classe}\\ \text{Ordnung}\end{matrix}\right\}$; ist n^k der Grad des Complexes C^k und g^k der Grad der Invariante in den Coëfficienten der entsprechenden ternären Form, so ist

$$i = \frac{1}{3} \Sigma n^k g^k.$$

Speciell: Die $\left.\begin{matrix}\text{Ebenen}\\ \text{Punkte}\end{matrix}\right\}$, deren Complex- $\left.\begin{matrix}\text{Curve}\\ \text{Kegel}\end{matrix}\right\}$ bezüglich eines Complexes n^{ten} Grades eine Eigenschaft hat, welche durch das Verschwinden einer Invariante g^{ten} Grades ausgedrückt ist, liegen auf einer Fläche der $\left.\begin{matrix}\text{Ordnung}\\ \text{Classe}\end{matrix}\right\}$ $2i = \frac{2ng}{3}$; ein Resultat, welches bei Clebsch (Math. Ann. Bd. 5) erst durch Ausscheidung eines Factors $(x\xi)^{\frac{gn}{3}}$ gewonnen werden konnte.

Beispiele: Die Discriminante einer ebenen Curve ist vom Grade $3(n-1)^2$, daher ist Ordnung und Classe der Singularitätenfläche eines Complexes n^{ten} Grades $= 2n(n-1)^2$.

Für den Complex zweiten Grades $(c\pi)^4 = 0$ ist ihre Gleichung

in Ebenencoordinaten $(\xi c^1 . c^1 \gamma . \gamma c^2 . c^2 \xi)^2 = 0$,
in Punktcoordinaten $(x\gamma^1 . \gamma^1 c . c\gamma^2 . \gamma^2 x)^2 = 0$.

Für die Tactinvariante zweier ebenen Curven n^{ter} und m^{ter} Ordnung ist $i = n.m(n+m-2)$. Daher ist Ordnung und Classe der Brennfläche der Schnittcongruenz zweier Complexe n^{ten} und m^{ten} Grades $= 2nm(n+m-2)$. Ihre Gleichungen sind darstellbar, wenn die Tactinvariante bekannt ist.

Ist $m = 1$, so hat man die Bedingung der Berührung einer Geraden mit einer Curve n^{ter} Ordnung zu nehmen, also die Liniencoordinatengleichung der Curve. Diese erhält man, indem man in der Discriminante der binären Form n^{ter} Ordnung für $(\alpha\beta)$ den Ausdruck $(\alpha\beta\xi)$ setzt. Setzt man also in diese Discriminante ein: $x\gamma . \gamma c . c\mathfrak{g} . \mathfrak{g}x$, so erhält man die Gleichung der Brennfläche des Schnittes des linearen Complexes $\mathfrak{g}$ und eines Complexes n^{ten} Grades.

Ist hier $n = 2$, so hat man als Gleichung der Kummer'-Brennfläche $(x\gamma . \gamma c . c\mathfrak{g} . \mathfrak{g}x)^2 = 0$.

Für $n = 3$ folgt als Gleichung der Brennfläche:

$$(x\gamma . \gamma c . c\mathfrak{g} . \mathfrak{g}x)^2 . (x\gamma^1 . \gamma^1 c^1 . c^1\mathfrak{g} . \mathfrak{g}x)^2 . (x\gamma^1 . \gamma^1 c . c\mathfrak{g} . \mathfrak{g}x)(x\gamma . \gamma c . c\mathfrak{g} . \gamma x) = 0.$$

Ist $\mathfrak{g}$ ein singulärer Complex, so erhält man die Gleichung der Complexfläche für den gegebenen Complex n^{ten} Grades.

Für die Invariante, deren Verschwinden aussagt, dass sich drei Curven der Ordnung n, m, p in einem Punkte schneiden, ist

$i = n.m.r$; daher ist Ordnung und Classe der von den gemeinsamen Strahlen dreier Complexe der Ordnung n, m, p gebildeten Regelfläche $= 2n.m.r$.

Ist $r = 1$, so hat man in die Resultante zweier binären Formen n^{ter} und m^{ter} Ordnung für $(\alpha\beta)$ zu setzen: $x\gamma.\gamma c.c\mathfrak{g}.\mathfrak{g}x$, um zur Gleichung der Regelfläche zu gelangen. Für $n = 2$, $m = r = 1$ hat man so für die beiden linearen Complexe $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$:

$$(x\gamma.\gamma\mathfrak{g}.\mathfrak{g}\mathfrak{g}'.\mathfrak{g}'x)^2 = 0.$$

Für $n = m = 2$, $r = 1$ folgt:

$$(x\gamma.\gamma c.c\mathfrak{g}.\mathfrak{g}x)^2(x\gamma'.\gamma'c'.c'\mathfrak{g}.\mathfrak{g}x)^2 - ((x\gamma.\gamma c'.c'\mathfrak{g}.\mathfrak{g}x)^2)^2 = 0$$

u. s. w.

Es drängt sich hier eine Frage auf: Welche ternäre Invarianten haben die Eigenschaft, dass die nach Obigem in ihnen ausgeführten Substitutionen

$$x\gamma^1.\gamma^1c^2.c^2\gamma^3.\gamma^3x$$

und

$$\xi c^1.c^1\gamma^2.\gamma^2c^3.c^3\xi$$

dieselbe Fläche liefern?

Bekanntlich ist dies der Fall für die Discriminante der ternären Form, da die Singularitätenfläche eines Complexes gleichzeitig Ort der singulären Punkte und Ebenen ist; für die Tactinvariante zweier Curven, da der Ort der Brennpunkte und der Brennebenen der Strahlen einer Congruenz identisch ist; für die Bedingung, dass sich drei Curven in einem Punkte schneiden, entsprechend der drei Complexen gemeinsamen Regelfläche.

Aber auch in Covarianten und andern invarianten Bildungen des ternären Gebietes kann man die letzten Substitutionen ausführen (vergl. Gundelfinger, Math. Ann., Bd. 6), man erhält dann z. B. aus einer Covariante eine räumliche Zwischenform, welche jeder Ebene eine Fläche zuweist, die aus ihr die Covariante der Complexcurve ausschneidet. Gewisse invariante Eigenschaften der Complexcurven können durch das identische Verschwinden einer Covariante dargestellt sein; in diesem Falle wird man, wenn die Eigenschaft drei Bedingungen äquivalent ist, durch Übertragung zu einem Flächensystem gelangen, dessen Flächen die Ebenen der verlangten Eigenschaft berühren.

Beispiel: Soll ein Kegelschnitt $(a\xi)^2 = 0$ in einen doppeltgezählten Punkt ausarten, so muss $(abx)^2$ identisch verschwinden. Man erhält durch die Substitution $(\xi\gamma . \gamma c . cx)^2 = 0$ diejenige Beziehung, welche jeder Ebene eine Fläche zuweist, die aus ihr den Complexkegelschnitt ausschneidet. Setzt man $x_i = p_i . p\xi$, so erhält man die Liniencoordinatengleichung dieses Kegelschnittes. Soll für ein ξ diese Gleichung für jede Gerade p_{ik} verschwinden, so erhält man: Die Ebenen, deren Complexkegelschnitt ein doppeltgezählter Punkt ist (die Doppeltangentialebenen der Kummer'schen Fläche), werden von allen Complexflächen berührt. Ebenso kann man bei einem Complex n^{ten} Grades jeder Ebene eine Fläche covariant so zuweisen, dass sich beide in der Complexcurve schneiden.