Ueber das Princip der Erhaltung der Energie und dessen naturwissenschaftliche Verwerthung.

Von

PROF. DR. O. SIMONY.

Fünf Vorträge, gehalten am 11., 18., 25. Februar, 11. und 18. März 1885.

Mit zehn Figuren im Texte.

I. Einleitende Betrachtungen.

Das Princip der Erhaltung der Kraft, dessen Auseinandersetzung und naturwissenschaftliche Verwerthung den Inhalt der heutigen und vier weiterer Vorlesungen bilden wird, gehört zu jenen gewaltigen Ideen, die, anfangs wenig beachtet, ja vielfach als irrthümlich zurückgewiesen, erst nach langen und harten Kämpfen einen hervorragenden Einfluss auf den Fortschritt der exacten Wissenschaften gewonnen haben.

Der deutsche Arzt Dr. Robert Mayer aus Heilbronn, welcher die Idee des Princips der Erhaltung der Kraft zuerst in grosser Allgemeinheit erfasst und in einem kurzen, 1842 in Liebig's Annalen der Chemie und Pharmacie publicirten Aufsatze: „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur" niedergelegt hatte, wurde durch die Vertretung seiner grossen Gedanken zum Märtyrer derselben. Ohne Anerkennung, ohne Freunde, mit welchen er über seine Ideen hätte verkehren können, verspottet von Feinden und Neidern, verfiel er für kurze Zeit sogar dem Wahnsinne und fand erst am Abende seines Lebens etwas von dem Ruhme, der ihm gebührte. [1])

Auch Helmholtz, der in seiner 1847 publicirten Abhandlung: „Ueber die Erhaltung der Kraft“ das zu besprechende Princip zuerst mathematisch strenge analysirt und dessen Giltigkeit für alle Attractions- und Repulsionskräfte, deren Intensitäten nur von den Entfernungen der wirksamen Massen und von diesen selbst abhängen, nachgewiesen hatte, fand ursprünglich keine Anerkennung für seine grosse Leistung. Es wurde ihm vielmehr die Aufnahme seiner Arbeit in Poggendorff's berühmte „Annalen der Physik und Chemie“ verweigert, und unter den Mitgliedern der Berliner Akademie nahm sich nur der Mathematiker C. G. J. Jacobi seiner an, ein Beweis, dass auch damals mit der Erkenntniss des grossen Princips noch kein Ruhm oder äussere Förderung, viel eher das Gegentheil verknüpft war. [2])

Gegenwärtig liegt die Sache allerdings völlig anders, und es wäre ungerechtfertigt, wollte man den seinerzeit fast einhelligen Widerstand der Sachverständigen [3]) allzuhart verurtheilen, denn anderseits ist der Conservatismus, den gerade die Sachverständigen gegenüber jeder, die Fundamente der von ihnen vertretenen Wissenschaften betreffenden neuen Idee bekunden, auch von grossem Nutzen. Würde jede derartige Idee sofort allgemein bereitwillig aufgenommen und verarbeitet werden, so wäre das Licht der Erkenntniss wohl kein ruhig strahlendes; es würde dann eher einer lodernden, im Windhauche hin- und herbewegten Fackel zu vergleichen sein, zwar weithin leuchtend, aber unfähig, irgend ein Object der Erkenntniss in voller Schärfe und Klarheit hervortreten zu lassen. Auch ist der harte Kampf ums Dasein, der jeder grossen Idee in ihren ersten Entwicklungsphasen zu Theil wird, das mächtigste Förderungsmittel für diese selbst, zumal äusserer Widerstand — wenigstens für kraftvolle Naturen — das wirksamste Motiv bildet, alle ihre Fähigkeiten zur weiteren Ausbildung und möglichst klaren, überzeugenden Darstellung des neuen Gedankens einzusetzen.

Dass speciell das Princip der Erhaltung der Kraft siegreich aus diesem Kampfe hervorgegangen ist und gegenwärtig wenigstens das ganze weite Gebiet der mechanisch-physikalischen Erkenntnisse beherrscht, ist eine geschichtliche Thatsache. Ja, es will scheinen, als ob der prachtvolle Palast, welcher neben der schlichten Bauhütte, in welcher das Princip seinen mathematischen Ursprung nahm, im Laufe der letzten Jahrzehnte erstanden ist, auch geeignet sei, alle übrigen exacten Wissenschaften in seine Räume aufzunehmen. Aber indem der Grundgedanke des Princips immer weitere wissenschaftliche Kreise erfasst hat, hielt seine mathematisch strenge Durchbildung mit seinem äusseren Wachsthume nicht gleichen Schritt, und ist es daher möglich, dass jener Palast nicht nur die Grösse, sondern auch den Geschmack unserer Zeit zum Ausdrucke bringt, folglich — wenigstens äusserlich — der Mode und damit der Veränderung unterworfen ist.

Aus diesem Grunde erscheint es angemessen, sich von Zeit zu Zeit aus dem glänzenden Gebäude wieder in die mathematische Bauhütte zurückzuziehen und nachzusinnen, in welcher Weise der Palast, wenn seine gegenwärtigen Fundamente sich in Zukunft vielleicht als etwas zu schwach erweisen sollten, solider und geräumiger aufgebaut werden kann, geeignet, auch die Schätze späterer Jahrhunderte in sich aufzunehmen.

Diese Ueberlegungen enthalten zugleich eine Directive für die Form, in welcher ich meine Betrachtungen vorzuführen habe. Es wäre im grossen Ganzen nicht schwer, über das Princip und dessen naturwissenschaftliche Verwerthung unter Verzichtleistung auf jegliche mathematische Formel in dem Sinne vorzutragen, dass wenigstens die Bedeutung des Princips und der Umfang seiner Anwendungen im Allgemeinen beurtheilt werden kann. Man würde jedoch hiebei Gefahr laufen, seinem Auditorium nur eine Art wissenschaftliche Wassersuppe vorzusetzen, auf welcher einige wenige, scharf präcisirbare Erkenntnisse gewissermassen als Fettaugen herumschwimmen. Ungleich schwieriger fällt es, bei der Auseinandersetzung des Princips näher ins Detail einzugehen und demzufolge auch klarzulegen, welche Auffassungsweise speciell der physikalischen Erscheinungen für dessen gegenwärtige Formulirung massgebend geworden ist.

Indem ich es, hochgeehrte Anwesende, versuchen will, Sie diesen zweiten Weg zu führen, sei schon jetzt hervorgehoben, dass wir auch im Gebiete der Physik gegenwärtig noch nicht weiter gekommen sind als bis zu einer präcisen und relativ einfachen Beschreibung [1]) der in Betracht gezogenen Naturerscheinungen. Diese Beschreibung besitzt in ihrer höchsten Vollendung gegenüber anderen Formen der Beschreibung, wie solche sich zum Beispiel in der Botanik und Zoologie darbieten, nur insoferne einen wesentlichen Vorzug, als alle in die Beschreibung eintretenden Begriffe als messbare Grössen definirt werden, und beruht es daher in letzter Linie auf einem Uebereinkommen, sobald man eine derartige Naturbeschreibung zugleich als Naturerkenntniss bezeichnet.

Das Princip der Erhaltung der Kraft erfordert behufs einer mathematisch präcisen Formulirung zunächst die Klarlegung der Begriffe: „Lebendige Kraft“ und: „Mechanische Arbeitsleistung“.

Die „lebendige Kraft“ setzt sich ihrerseits wieder aus zwei, wesentlich von einander verschiedenen Factoren zusammen: dem Quadrate einer Geschwindigkeit und der Hälfte einer sogenannten materiellen Masse. Desgleichen repräsentirt die „mechanische Arbeitsleistung“ ein Product aus zwei Factoren, von welchen der eine die „Wirkung einer Kraft“, gemessen nach einem bestimmten Masse, der andere eine in der Richtung jener Wirkung durchlaufene Weglänge vorstellt.

Um also die im Principe von der Erhaltung der Kraft mit einander verknüpften Begriffe als messbare Grössen zu definiren, muss dies zunächst mit den

Begriffen: „Weg eines bewegten Körpers“, „Geschwindigkeit eines bewegten Körpers“, „Kraftwirkung“ und „Masse“ geschehen, wobei die Erörterung des vorletzten Begriffes jene der sogenannten Beschleunigung nöthig macht.

Beachten Sie überdies, dass ich nicht von „Kraft“, sondern direct von „Kraftwirkung“ gesprochen habe. Die Kraft an und für sich, als ihrem Wesen nach unbekannte Ursache einer gegebenen Reihe von Bewegungserscheinungen, ist überhaupt nicht Gegenstand exacter physikalischer Forschung, denn eine solche bezieht sich lediglich auf die Frage, wie, das heisst nach welchen Gesetzen eine gegebene Naturerscheinung verläuft, und nicht auf die Frage, warum sie erfolgt.

Es gibt verschiedene einfache Bewegungsprocesse, an welchen die eben aufgezählten Begriffe mehr oder weniger elementar erläutert werden können, und will ich zu diesem Zwecke als einfachsten und geläufigsten Bewegungsprocess speciell den freien Fall eines Körpers von bedeutendem specifischen Gewichte innerhalb mässiger Fallhöhen discutiren.

Bei einer oberflächlichen Beschreibung dieser, in ihren Hauptmomenten Jedermann bekannten Naturerscheinung würde man sich etwa, wie folgt, ausdrücken: Der Körper beginnt, falls ihm seine Unterlage entzogen wird, augenblicklich eine vertical nach abwärts gerichtete, geradlinige Bewegung, entfernt sich hiebei immer weiter von seiner ursprünglichen

Position, je mehr die Zeit, seit welcher er fällt, zunimmt, und gelangt erst zur Ruhe, sobald er in der Verfolgung seiner Bahn auf eine neue, fixe Unterlage gestossen ist.

Unsere Beobachtung der besprochenen Erscheinung verknüpft also zunächst den Weg, den der fallende Körper zurücklegt, mit der Zeit, welche zur Durchlaufung dieses Weges erforderlich ist, und erheischt daher behufs ihrer wissenschaftlich präcisen Fassung die Beantwortung der Frage, nach welchem Gesetze die von dem Körper durchlaufenen Fallhöhen mit wachsender Fallzeit zunehmen.

Ich habe früher als Hauptvorzug einer exacten mechanisch-physikalischen Beschreibung gegenüber anderen Beschreibungen geltend gemacht, dass alle in die Beschreibung eintretenden Begriffe messbare Grössen seien. Im vorliegenden Falle müssen demnach diejenigen zwei Grössen, welche in erster Linie miteinander zu verknüpfen sind, das ist Weg und Zeit, als messbare Grössen definirt werden.

Sie wissen, dass die Zeit messbar wird nach Annahme einer bestimmten Zeiteinheit — wir wählen als solche die Secunde — desgleichen, dass jede Strecke messbar wird nach Feststellung einer bestimmten Längeneinheit — wir wählen als solche das Meter. — Nach Einführung beider Einheiten erhält die früher aufgeworfene Frage nunmehr die Fassung: Wie viel Meter legt der frei fallende Körper in einer bestimmten Anzahl von Secunden zurück?

Der Versuch [5]) lehrt nun, dass der frei fallende Körper am Ende

der 1. Secunde . . . 4·9 Meter
„ 2. „ . . . 4·9 $\times$ 2 $\times$ 2 Meter
„ 3. „ . . . 4·9 $\times$ 3 $\times$ 3 „
„ 4. „ . . . 4·9 $\times$ 4 $\times$ 4 „

zurückgelegt hat. Wir schliessen hieraus inductiv, dass der Körper beispielsweise nach zehn Secunden: 4·9 $\times$ 10 $\times$ 10 Meter, nach zwölf Secunden: 4·9 $\times$ 12 $\times$ 12 Meter durchlaufen haben wird, und werden demgemäss, um seinen nach einer beliebigen Anzahl von Secunden im freien Falle durchlaufenen Weg zu finden, stets die Secundenzahl mit sich selbst und das Resultat noch mit 4·9 multipliciren.

Es wird jetzt leicht sein, die in diesem Satze in Worten ausgedrückte Beziehung zwischen Fallraum und Fallzeit in Form einer Gleichung zwischen denselben Grössen mathematisch zu präcisiren.

Sie wissen, dass dem Worte „Zeit" im Lateinischen der Ausdruck: „*tempus*" correspondirt. — Der Anfangsbuchstabe des letzteren Wortes dient als Symbol für jede beliebige Anzahl von Secunden. Anstatt also zu sagen, man multiplicire die gegebene Anzahl von Secunden mit sich selbst, wird man sagen, man multiplicire t mit sich selbst, und wird statt 2 $\times$ 2, 3 $\times$ 3, 4 $\times$ 4 u. s. w., allgemein $t \times t$ schreiben.

Die weitere Forderung, die mit sich selbst multiplicirte Secundenzahl noch mit 4·9 zu multipliciren, wird dann gleichbedeutend mit der Forderung, das Product

$$t \times t \times 4{\cdot}9$$

oder, da die Anordnung seiner Factoren dessen Werth nicht beeinflusst,

$$4{\cdot}9 \times t \times t$$

zu bilden. Schreibt man in diesem Ausdrucke statt t der Reihe nach 1, 2, 3, 4, so verwandelt sich derselbe successive in die der ersten, zweiten, dritten, vierten Secunde erfahrungsgemäss zugeordneten Weglängen und repräsentirt in diesem Sinne einen allgemeinen Gattungsbegriff, unter welchen sämmtliche früher angegebenen speciellen Resultate subsummirt werden können.

Es muss jetzt noch ausgedrückt werden, welche Grösse durch das allgemeine Product bestimmt erscheint, also ein Symbol für jenen Weg eingeführt werden, welcher in t Secunden zurückgelegt wird. Als solches dient im Hinblicke auf den lateinischen Ausdruck für das Wort: Weg, nämlich „*spatium*", der Buchstabe s, mit dessen Benützung der Satz:

„Der von dem Körper in t Secunden durchlaufene Weg ist gleich dem Producte":

$$4{\cdot}9 \times t \times t$$

in die elementare Gleichung:

$$s = 4{\cdot}9 \times t \times t$$

umgesetzt wird.

In dieser Gleichung gelangt das Gesetz, nach welchem die von dem Körper durchlaufenen Fallhöhen mit wachsender Fallzeit zunehmen, mathematisch präcis zum Ausdrucke; sie vermittelt ferner auch eine elementare Erläuterung des Begriffes: „Geschwindigkeit“ für die in Betracht gezogene Bewegung.

Zu diesem Zwecke vermehren wir vorerst die auf s bezügliche Secundenzahl: t um eine beliebige zweite Secundenzahl: a, lassen also an die Stelle von t Secunden $t + a$ Secunden treten, und bestimmen den in dieser Zeit durchlaufenen Weg — er mag, weil er jedenfalls grösser als s ist, mit S bezeichnet werden — nach derselben empirischen Regel, welche gemäss früheren Betrachtungen s und t mit einander verknüpft.

Wir haben dann, um S zu finden, im vorliegenden Falle die Secundenzahl $t + a$ mit sich selbst und das Resultat mit 4·9 zu multipliciren, eine Aufgabe, deren Lösung nur deshalb etwas zeitraubend ist, weil ich hiebei selbstverständlicher Weise keine algebraischen Vorkenntnisse voraussetzen darf, sondern zu einfachen geometrischen Constructionen meine Zuflucht nehmen muss.

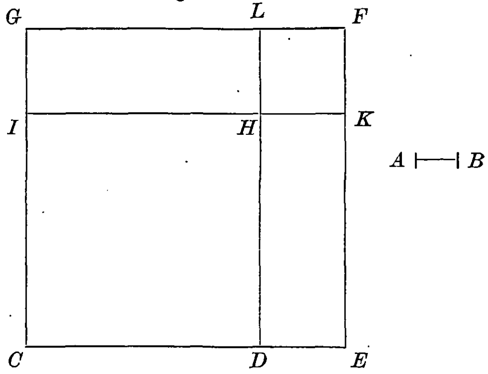
Wir denken uns nämlich unter Zugrundelegung einer willkürlich gewählten Strecke AB als Längeneinheit die Secundenzahlen t und a einstweilen als gerade Linien von bestimmter Länge: CD, DE dargestellt (Fig. 1) und zu einer einzigen Geraden:

$$CE = CD + DE = t + a$$

mit einander vereinigt.

Es ist nun allgemein bekannt, dass die Fläche jedes Rechteckes dem Producte aus den Masszahlen seiner Grundlinie und Höhe gleichkommt, folglich die

Fig. 1.



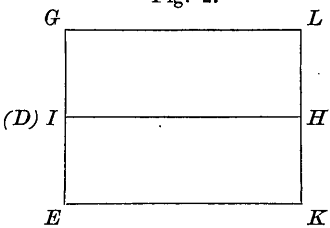
Fläche jedes Quadrates durch Multiplication der Masszahl seiner Seite mit sich selbst gefunden wird. Errichten wir daher speciell über CE als Seite ein Quadrat: $CEFG$, so bestimmt dessen Fläche zugleich das erste fragliche Product von $t + a$ in $t + a$.

Untersuchen wir jetzt, in welcher Weise sich das letztere aus t und a zusammensetzt, indem wir in der Fläche $CEFG$ über CD als Grundlinie ein zweites Quadrat: $CDHI$ construiren und dessen Seiten: IH und HD über H hinaus bis zum Durchschnitte mit den Seiten EF und FG verlängern.

Wir erkennen dann, dass das Quadrat $CEFG$ folgende Flächen enthält: 1. Das Quadrat $CDHI$ mit der Grundlinie: $CD = t$, also der Fläche: $t \times t$. 2. Zwei Rechtecke: $DEKH$ und $IHLG$, deren erstes die Grundlinie: $DE = a$ und die Höhe: $DH = t$, deren zweites die Grundlinie: $IH = t$ und die Höhe: $IG = a$ besitzt, wonach der Flächeninhalt jedes der beiden Rechtecke gleich $a \times t$ ist, und beide zusammen (siehe Fig. 2) ein Rechteck von der Grundlinie: $EK = t$ und der Höhe:

$$HK + HL = a + a = 2a,$$

Fig. 2.



also von dem Flächeninhalte: $2a \times t$ liefern. 3) Das Quadrat $HKFL$ mit der Grundlinie: $HK = a$, also der Fläche: $a \times a$. Die Summe aller vier Flächen muss die ursprünglich construirte Fläche: $CEFG$ ergeben, das heisst, es ist:

$$CEFG = t \times t + 2a \times t + a \times a.$$

Nachdem hiemit die Multiplication von $t + a$ mit sich selbst geometrisch ausgeführt worden ist, erübrigt noch die Multiplication des gewonnenen Resultates mit der Zahl: 4·9. Aber das Product von $t + a$ in $t + a$ mit 4·9 multipliciren, heisst offenbar so viel, als die ihm äquivalente Quadratfläche $CEFG$ mit der genannten Zahl multipliciren, mithin im Verhältnisse von 1 zu 4·9 vergrössern.

Indem nun die Fläche $CEFG$ derart vergrössert wird, vergrössert sich jeder ihrer Theile in demselben Verhältnisse, das heisst, es tritt der Factor: 4·9 bei der Multiplication des Productes von $t + a$ in $t + a$ mit 4·9 als Factor zu jedem seiner drei Theilproducte:

$$t \times t, \quad 2a \times t, \quad a \times a$$

hinzu. Auf diese Art liefert die mathematische Verwerthung der zur Bestimmung von S dienenden empirischen Regel die neue Gleichung:

$$S = 4{\cdot}9 \times t \times t + 4{\cdot}9 \times 2a \times t + 4{\cdot}9 \times a \times a,$$

in welcher das erste, rechter Hand stehende Product:

$$4{\cdot}9 \times t \times t$$

wieder den, von dem Körper bis zum Zeitmomente t zurückgelegten Weg: s darstellt, also die Summe der beiden übrigen Producte:

$$4{\cdot}9 \times 2a \times t + 4{\cdot}9 \times a \times a$$

jenen Weg bestimmt, welchen der Körper vom Zeitmomente: t bis zum Zeitmomente: $t + a$, respective in den a auf t folgenden Secunden durchlaufen hat.

Nun gestattet das Product: $4{\cdot}9 \times 2a \times t$ auch folgende Anordnung seiner Factoren:

$$4{\cdot}9 \times 2 \times t \times a = 9{\cdot}8 \times t \times a$$

und repräsentirt daher ein Rechteck von der Grundlinie: $9{\cdot}8 \times t$ und der Höhe: a, während dem Producte: $4{\cdot}9 \times a \times a$ ein solches von der Grundlinie: $4{\cdot}9 \times a$ und derselben Höhe zuzuordnen ist. Denken wir uns hierauf beide Rechtecke derart vereinigt, dass ihre Grundlinien nebeneinander in eine und dieselbe Gerade zu liegen kommen, so entsteht ein neues Rechteck mit der Höhe a und der Grundlinie:

$$9{\cdot}8 \times t + 4{\cdot}9 \times a,$$

woraus zu entnehmen ist, dass der vom Zeitmomente t bis zum Zeitmomente $t + a$ zurückgelegte Weg auch dem Producte von a in die Summe:

$$9{\cdot}8 \times t + 4{\cdot}9 \times a$$

gleichgesetzt werden kann. Die letztere bestimmt als $a$ter Theil jenes Weges zugleich die Strecke, welche der fallende Körper im Mittel in jeder Secunde des a Secunden umfassenden Zeitintervalles von t bis $t + a$ durchläuft, das heisst, dessen sogenannte mittlere Geschwindigkeit innerhalb des Zeitintervalles von t bis $t + a$.

Die Geschwindigkeit des Körpers im Zeitmomente t selbst — wir wollen sie symbolisch mit dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Ausdruckes für „Geschwindigkeit“: „*velocitas*“ bezeichnen — wird dann erhalten werden, indem man jenes Intervall auf den genannten Moment einschränkt, also a gleich Null setzt, womit ein zweites wichtiges Bestimmungsstück der zu beschreibenden Bewegung ebenfalls in Form einer Gleichung

$$v = 9{\cdot}8 \times t + 4{\cdot}9 \times 0 = 9{\cdot}8 \times t$$

als messbare Grösse definirt erscheint.

Wir sind nunmehr auch im Stande, eine weitere, von Jedermann gemachte Wahrnehmung beim freien Falle eines schweren Körpers, nämlich: der Körper bewegt sich immer rascher, je mehr die Zeit, seit welcher er fällt, zunimmt — mathematisch zu präcisiren.

Zu diesem Zwecke berechnen wir auf Grundlage der für v gewonnenen Formel die Geschwindigkeiten, welche der fallende Körper am Ende der ersten, zweiten, dritten, vierten Secunde angenommen hat, und erhalten so der Reihe nach die Werthe:

$$9{\cdot}8 \times 1,\ 9{\cdot}8 \times 2 = 19{\cdot}6,\ 9{\cdot}8 \times 3 = 29{\cdot}4,$$
$$9{\cdot}8 \times 4 = 39{\cdot}2,$$

welche übereinstimmend lehren, dass der von Secunde zu Secunde, respective in jeder Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeitszuwachs, die sogenannte Beschleunigung der in Betracht gezogenen Bewegung, den unveränderlichen Werth:

$$19{\cdot}6 - 9{\cdot}8 = 29{\cdot}4 - 19{\cdot}6 = 39{\cdot}2 - 29{\cdot}4 = 9{\cdot}8$$

besitzt. Indem wir diese Zahl als eine für alle Zeiten und Geschwindigkeiten sich gleichbleibende Grösse, einem allgemeinen Gebrauche folgend, mit g bezeichnen und consequent ihre Hälfte: $\frac{9{\cdot}8}{2} = 4{\cdot}9$ symbolisch durch $\frac{g}{2}$ ausdrücken, verwandeln sich die für s und v abgeleiteten Formeln in:

$$s = \frac{g}{2} \times t \times t, \quad v = g \times t$$

und mögen in dieser Gestalt die Grundlage unserer nächsten Betrachtungen bilden. [6])

Dieselben betreffen, entsprechend der allgemeinen Gliederung unseres heutigen Vortrages, die Erläuterung des Begriffes „Kraftwirkung" für die hier discutirte Naturerscheinung des freien Falles eines schweren Körpers, haben also vor Allem darzulegen, in welchem Sinne wir einem Körper das Attribut „schwer“ zuerkennen.

Sie wissen, hochgeehrte Anwesende, aus Ihrer persönlichen Erfahrung, dass unser Muskelgefühl, falls wir einen sogenannten schweren Körper beispielweise mit den Händen frei in der Schwebe halten, uns die Empfindung eines auf den Körper vertical nach abwärts geäusserten Zuges vermittelt.

Indem wir nun — im gewöhnlichen Sinne des Wortes — Kraft aufwenden müssen, um den Körper zu halten, interpretiren wir den Zug selbst als Wirkung einer Kraft, ausgehend von jenem Körper, welchem jedes frei fallende Object zustrebt, also von der Erde. Würden wir aber etwa unsere Anstrengung bei dem Aufheben eines schweren Körpers als Mass für jene Wirkung verwenden, so würden wir dieselbe überhaupt nicht objectiv feststellen können, denn die Erfahrung lehrt, dass die Anstrengung beim Aufheben eines und desselben Körpers für verschiedene Individuen sehr verschieden ausfällt, ja auch ein und dasselbe Individuum sich um so mehr anstrengen muss, je öfter hintereinander es den betreffenden Körper hebt.

Unser Muskelgefühl vermittelt uns also insoferne die Vorstellung von Kraftwirkungen in qualitativer Hinsicht, es schafft gewissermassen den Typus für das, was wir uns unter „Kräftewirkung“ zunächst denken,[7]) ohne definitive quantitative Bestimmungen zu ermöglichen. Wir werden demnach angeleitet, die in

Betracht gezogenen Kraftwirkungen nach einem, diesen selbst entnommenen Masse zu messen, was durch Einführung einer bestimmten Gewichtseinheit geschieht, als welche wir im Folgenden das Kilogramm wählen wollen.

„Ein Körper ist schwer“ heisst dann so viel als: er besitzt ein bestimmtes, in Kilogrammen ausdrückbares Gewicht — wir wollen als allgemeines Symbol desselben den Buchstaben: G wählen — und erfährt demgemäss vertical nach abwärts denselben Zug, welchen G Kilogramme zusammengenommen in dieser Richtung erleiden. Die Gewichtszahl: G bestimmt dann auch den Druck, welchen der betreffende Körper auf eine fixe Unterlage ausübt, und bleibt, wie die Erfahrung lehrt, für einen und denselben Körper an einem und demselben Erdorte constant.

Im Anschlusse hieran bringen wir die zuvor geschilderte Bewegung eines seiner Unterlage beraubten schweren Körpers gleichfalls mit seinem Gewichte in Verbindung, wobei wir, da von den drei Bestimmungsstücken seiner Bewegung: dem Wege: s, der Geschwindigkeit: v und der Beschleunigung: g ausschliesslich das dritte eine constante, das heisst unveränderliche Grösse vorstellt, nur g und G einander zuordnen können, respective speciell die constante Beschleunigung der Fallbewegung als unmittelbare Wirkung der auf den Körper geäusserten constanten Zugkraft: G betrachten.

Aber die Constanz der letzteren ist, wie ich dies schon früher durch Einführung der näheren Bestimmung: „an einem und demselben Erdorte“ angedeutet habe, keine unbeschränkte; es zeigt sich vielmehr, dass das absolute Gewicht eines Körpers grösser wird, wenn man denselben von jenem Orte, auf welchen sich die Gewichtsbestimmung: G bezieht, in Orte von höherer geographischer Breite überträgt, dagegen sich verkleinert, wenn man sich mit dem Körper in Orte von niedriger geographischer Breite begibt. In demselben Sinne ändert sich nun auch die Beschleunigung des freien Falles für den betreffenden Körper; sie beträgt zum Beispiel für die geographische Breite von 50^0 : 9·809 Meter, für eine solche von 45^0 : 9·806 Meter und am Aequator: 9·780 Meter.

Diese Thatsachen legen die empirisch bestätigte Folgerung nahe, dass, sobald die Grössen G und g in demselben Sinne sich ändern, ihr gegenseitiges Verhältniss, also der Quotient: $\frac{G}{g}$ sich gleich bleibt, und führen zu einer Zerlegung der Kraftwirkung G in zwei Factoren, von welchen sich der eine auf den der Wirkung unterworfenen Körper, der andere auf diese selbst bezieht.

Der erste, unveränderliche Factor heisst „Massenzahl“ des Körpers oder auch kurzweg: Masse; er wird durch Division seines in Kilogrammen ausgedrückten absoluten Gewichtes durch die an dem betreffenden Erdorte vorhandene, in Metern bestimmbare Fallbeschleunigung erhalten und allgemein mit dem Symbole: M bezeichnet.

Der zweite, bedingungsweise veränderliche Factor wird durch die der Kraftwirkung: G zugeordnete Beschleunigung: g gebildet und liefert daher, mit M multiplicirt, wieder die Gewichtszahl des Körpers, das heisst, es ist:

$$G = M \times g.$$

An diese kurze Besprechung der im Folgenden benützten, dem Gebiete der Mechanik entnommenen Hilfsbegriffe knüpfen sich jetzt noch einige elementare Bemerkungen bezüglich einer anschaulichen Interpretation derselben.

Dass der von dem frei fallenden Körper zurückgelegte Weg s jedesmal durch eine gerade Linie von bestimmtem Ausgangspunkte, bestimmter Richtung und Länge graphisch versinnlicht werden kann, braucht nicht erst näher motivirt zu werden. Da sich ferner die momentane Geschwindigkeit: v direct aus der mittleren Geschwindigkeit des bewegten Körpers für ein gegebenes Zeitintervall ableitet, die letztere aber stets ein von der Grösse der gewählten Zeiteinheit abhängiges Wegstück repräsentirt, ermöglicht v eine analoge geometrische Darstellung wie s. Dasselbe gilt von der Beschleunigung: g als einem, auf die Secunde bezogenen Geschwindigkeitszuwachs, indem der Zuwachs einer gegebenen Grösse nur durch Hinzufügung einer gleichartigen Grösse, hier also einer Strecke, erfolgen kann. Da schliesslich die Kraftwirkung: G durch Multiplication von g mit einer reinen Zahl, nämlich der Massenzahl: M, erhalten wird, kann man auch G von Fall zu Fall durch eine gerade Linie von bestimmtem Ausgangspunkte, bestimmter Richtung und Länge versinnlichen, womit die drei nothwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke der untersuchten Kraftwirkung: Angriffspunkt, Richtung und Intensität derselben insgesammt veranschaulicht werden.

Diese Interpretation einer gegebenen Kraftwirkung ist wohl auch eine allgemein geläufige zu nennen, während die hier entwickelte Auffassungsweise des Begriffes: Masse als einer reinen Erfahrungszahl [8]) Ihnen anfänglich etwas fremdartig erscheinen wird, zumal man den letzterwähnten Begriff — namentlich in populären Schriften — vielfach als Quantität der den betreffenden Körper constituirenden Materie definirt.

Nachdem nun gegenwärtig noch mehr als sechzig, einer weiteren chemischen Zerlegung unfähige Grundstoffe [9]) unterschieden werden müssen, wäre es bei einer derartigen Auffassungsweise des Begriffes: Masse nicht möglich, beispielsweise die Massen von vier Würfeln aus Gold, Silber, Kupfer und Blei als gleichartige Grössen auf Grundlage einer und derselben Grösseneinheit zu bestimmen, weil wir die angeführten Elemente vorläufig erfahrungsgemäss als qualitativ verschieden zu betrachten haben. Es wäre also M von diesem Standpunkte aus eine Grösse von bestimmter Qualität, und ihr Product in die Beschleunigung g

könnte dann als ein Product von zwei auf qualitativ verschiedene Einheiten bezogenen Grössen nicht mehr als eine Linie dargestellt werden. Aus diesem Grunde erscheint es geboten, die Vorstellung der Materie, deren Wesen wir ohnehin nicht kennen, von dem Begriffe der Masse eines Körpers, insoweit dieser Begriff als messbare Grösse verwerthet wird, vollständig gesondert zu erhalten, was in der hier gegebenen Definition von M in der That geschehen ist.

Nachdem hiemit sämmtliche zur Definition der Begriffe: „Lebendige Kraft“ und: „Mechanische Arbeitsleistung“ erforderlichen Vorbegriffe in der von uns geforderten Form als messbare Grössen präcisirt und möglichst elementar erläutert worden sind, verbinden wir die beiden Gleichungen:

$$G = M \times g, \quad s = \frac{g}{2} \times t \times t$$

mit einander auf Grundlage des selbstverständlichen Satzes, dass Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gleiche Resultate liefert, im vorliegendem Falle also:

$$G \times s = M \times g \times \frac{g}{2} \times t \times t$$

sein wird. Es ist weiter allgemein bekannt, dass man ein aus zwei oder mehreren Factoren bestehendes Product durch eine gegebene Zahl dividirt, indem man irgend einen seiner Factoren — gleichgiltig welchen — durch diese Zahl dividirt. In Hinblick hierauf kann der Divisor von g in dem für $G \times s$ gefundenen Ausdrucke ohne eine Werthänderung des letzteren dem

34*

ersten Factor: M als Divisor beigegeben werden. Gemäss der Vertauschbarkeit der Factoren jedes Productes und der bekannten Beziehung zwischen v, g und t wird ferner das Product:

$$g \times g \times t \times t = g \times t \times g \times t = v \times v,$$

so dass die ursprünglich für $G \times s$ erhaltene Gleichung nunmehr in die folgende:

$$G \times s = \frac{M}{2} \times g \times g \times t \times t = \frac{M}{2} \times v \times v$$

übergeht, welche in mathematischer Form beide noch zu definirenden Begriffe enthält.

Ihre linke Seite zeigt als ersten Factor das Gewicht des Körpers, als zweiten den Weg, welchen derselbe in t Secunden durchlaufen hat. Da nun die Richtung, in welcher der Zug der Schwerkraft auf den Körper wirkt, hier mit seiner Bewegungsrichtung zusammenfällt, bedeutet $G \times s$ auch das Product aus der Grösse der wirksamen Schwerkraft in den in der Richtung ihrer Wirkung von dem Körper in t Secunden durchlaufenen Weg, das heisst, die mechanische Arbeitsleistung der wirksamen Schwerkraft vom Beginne der Bewegung des Körpers bis zum Zeitmomente: t. Der jeweilige numerische Werth dieser Arbeitsleistung hängt daher von der gewählten Gewichtseinheit und der benützten Längeneinheit ab und wird gleich 1×1, das heisst 1, wenn G und s der Einheit gleichgesetzt werden, womit die Bedeutung der mechanischen Arbeitsleistung: Eins, des sogenannten Kilogrammometers, als jener Arbeit gegeben ist, welche die Schwerkraft leistet, wenn ein Kilogramm, das ist die Gewichtseinheit eine Längeneinheit, das ist einen Meter tief fällt. [10])

Die weitere Ausbildung des Begriffes: „Mechanische Arbeit“ erfolgt jetzt unter Hinzuziehung des zuerst von Newton[11]) ausgesprochenen Princips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Dieses Princip besagt, dass, sobald ein Körper von einem zweiten einen Zug oder Druck erfährt, seinerseits ein gleich grosser, entgegengesetzt gerichteter Gegenzug, respective Gegendruck wachgerufen wird, und bildet in dieser Fassung einen unmittelbar sich aufdringenden Inductionsschluss aus gewissen, Jedermann geläufigen Beobachtungen. Wir üben nämlich keinen Zug oder Druck aus, ohne hiebei einen Widerstand zu erfahren, der in genau demselben Masse sich vergrössert, beziehungsweise verkleinert, in welchem der Zug oder Druck unsererseits erhöht oder vermindert wird, welche Wahrnehmungen empirisch die Erkenntniss des obigen allgemeinen Satzes vermitteln.

Heben wir daher etwa ein Gewicht von G Kilogramm in verticaler Richtung beispielweise s Meter hoch, so ist der Widerstand, welchen wir hiebei in jedem Punkte der Strecke s zu überwinden haben, eben so gross wie das gehobene Gewicht, wonach die unsererseits aufgewendete Arbeit durch dasselbe Product: $G \times s$ bestimmt erscheint, welches die durch die Schwerkraft geleistete Arbeit beim Herabsinken dieses Gewichtes durch eine Höhe von s Metern präcisirt. Da ferner jedes aus zwei Factoren bestehende Product seinen Werth beibehält, wenn man einen der beiden Factoren durch irgend eine Zahl — sie mag mit Z bezeichnet werden — dividirt, und gleichzeitig den andern Factor mit derselben Zahl multiplicirt, ist allgemein:

$$G \times s = \frac{G}{Z} \times s \times Z \text{ und: } G \times s = G \times Z \times \frac{s}{Z},$$

folglich:

$$\frac{G}{Z} \times s \times Z = G \times Z \times \frac{s}{Z},$$

das heisst, hebt man $\frac{G}{Z}$ Kilogramm $s \times Z$ Meter hoch und $G \times Z$ Kilogramm $\frac{s}{Z}$ Meter hoch, so sind die hiezu erforderlichen mechanischen Arbeitsleistungen einander gleich, z. B. also die mechanische Arbeitsleistung bei der Hebung von 6 Kilogramm um 12 Meter gleich der mechanischen Arbeit bei der Hebung von $^6/_3 = 2$ Kilogramm um $12 \times 3 = 36$ Meter und der mechanischen Arbeit bei der Hebung von $6 \times 3 = 18$ Kilogramm um $^{12}/_3 = 4$ Meter.

Fassen wir nunmehr noch die rechte Seite der ursprünglich für $G \times s$ gewonnenen Gleichung ins Auge, so zeigt dieselbe als ersten Factor die halbe Masse des bewegten Körpers, während die Multiplication der beiden übrigen Factoren das Product von v in v, das heisst nach einer allgemein üblichen Ausdrucksweise das

Quadrat der Geschwindigkeit des bewegten Körpers für den Zeitmoment: t liefert. Unsere Gleichung besagt daher im Hinblick auf die bereits gegebene Definition des Begriffes: „Lebendige Kraft“, dass die mechanische Arbeitsleistung der wirksamen Schwerkraft vom Beginne der Bewegung des Körpers bis zum Zeitmomente: t ihr Aequivalent in jener lebendigen Kraft findet, welche der Körper nach t Secunden erlangt hat.

Dies ist der Satz von der lebendigen Kraft in seiner einfachsten Form; er bildet zunächst die Grundlage für eine elementare Ableitung des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft und vermittelt insofern auch die Erkenntniss des Princips von der Erhaltung der Kraft, so dass unsere einleitenden Betrachtungen hiemit ihren Abschluss gefunden haben.

Dieselben gestatten bereits ein Urtheil über die qualitative Beschaffenheit des zu besprechenden Princips; dasselbe wird uns keineswegs, wie etwa das Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, durch zahlreiche, zum Theile dem gewöhnlichen Leben angehörige Erfahrungen unmittelbar nahelegt, sondern entspringt erst gewissen gesetzlichen Beziehungen, welche mit Hilfe mathematischer Schlüsse aus anderen, in Form von Gleichungen präcisirbaren physikalischen Gesetzen resultiren. Es stützt sich daher einerseits auf die physikalische Erfahrung, anderseits auf eine Reihe mathematischer

Ueberlegungen, welche nur innerhalb enger Grenzen einer elementaren und insoferne noch populären Darstellung zugänglich sind. Eine solche bleibt, da in ihr nur leichtverständliche mathematische Sätze in Verwendung kommen, wohl einfach in ihren Details, wird aber, indem sie die Aufmerksamkeit in ungleich höherem Grade als den Verstand in Anspruch nimmt, leicht ermüdend, so dass ich Ihnen, hochgeehrte Anwesende, jetzt noch meinen Dank für die Geduld auszusprechen habe, mit welcher Sie meinen heutigen Auseinandersetzungen gefolgt sind.

II. Gravitation.

Die weitere Verwerthung des unsere einleitenden Betrachtungen abschliessenden Satzes von der lebendigen Kraft erheischt noch einige Bemerkungen bezüglich des seine Ableitung vorbereitenden Gedankenganges.

Ausgehend von einer Reihe empirischer Daten, welche sich auf die in gewissen Beobachtungszeiten: eins, zwei, drei, vier Secunden von einem schweren Körper durchlaufenen Fallhöhen bezogen haben, konnten wir zunächst auf Grundlage eines Inductionsschlusses alle jene Wege, welche in irgend einer Zeit von dem frei fallenden Körper zurückgelegt wurden, aus einer einzigen Gleichung bestimmen. Indem wir nämlich als allgemeines Symbol der in Secunden ausgedrückten Fallzeit den Buchstaben t benützten und als allgemeines Symbol der zugehörigen, in Metern gemessenen Fallhöhe den Buchstaben s einführten, erhielten wir eine einfache Formel, welche besagte, es sei der in t Secunden durchlaufene Weg s gleich einer gewissen Erfahrungszahl: 4·9, multiplicirt mit dem Producte von t in t, das heisst mit dem Quadrate von t.

Diese Formel repräsentirte gemäss der Art ihrer Ableitung eine sogenannte empirische Regel, insoweit in derselben gewisse, direct durch physikalische Beobachtungen gegebene Grössen nach einem gemeinsamen Gesetze mit einander verknüpft wurden.

Desgleichen war die im weiteren Verlaufe unserer Auseinandersetzungen constatirte Unveränderlichkeit der Massenzahl: M eines schweren Körpers als des Quotienten aus seinem, an einem bestimmten Erdorte festgestellten absoluten Gewichte: G in dessen ebendaselbst vorhandene Fallbeschleunigung: g der unmittelbare Ausdruck einer Reihe gleichartiger physikalischer Erfahrungen, während die weiteren, an die Gleichungen:

$$s = 4{\cdot}9 \times t \times t, \quad M = \frac{G}{g}$$

geknüpften Schlüsse auf einfachen mathematischen Erwägungen beruhten, welche im Bereiche des normalen menschlichen Denkens bedingungslos giltig bleiben und daher die mit ihrer Hilfe gewonnenen Resultate ebenso zuverlässig erscheinen lassen wie deren empirische Ausgangspunkte.

Auf diese Art können wir den Satz von der lebendigen Kraft mit derselben Sicherheit als Grundlage für neue Untersuchungen wählen wie die ursprüngliche, direct der Erfahrung entnommene Beziehung zwischen Fallraum und Fallzeit.

Wir beginnen hiebei mit der Discussion eines Bewegungsprocesses, für welchen sich der genannte Satz noch in seiner ursprünglichen, einfachsten Form verwerthen lässt.

Dieser Bewegungsprocess mag dadurch eingeleitet werden, dass eine vollkommen elastische Kugel von dem Gewichte: G von einer horizontalen, gleichfalls vollkommen elastischen Unterlage aus um h Meter gehoben wird, indem man beispielweise ein Seil an der Kugel befestigt, dasselbe über eine in entsprechender Höhe angebrachte fixe Rolle führt und an dessen anderem Ende eine zur Hebung der Kugel hinreichende Zugkraft wirken lässt. Hierauf mag der Zusammenhang zwischen Kugel und Seil aufgehoben werden, so dass die Kugel nunmehr ihre ursprüngliche Hubhöhe h frei fallend durchläuft und mit einer gewissen, vertical nach abwärts gerichteten Endgeschwindigkeit — wir bezeichnen dieselbe der Kürze wegen mit c — die anfängliche Unterlage erreicht.

Das Quadrat von c steht nun mit h in einer sehr einfachen Beziehung, die sich durch folgende Interpretation der eben geschilderten Bewegung ergibt: Um die Kugel von dem Gewichte G h Meter hoch zu heben, musste eine bestimmte mechanische Arbeit aufgewendet werden, welche gemäss früheren Ueberlegungen durch das Product des gehobenen Gewichtes in dessen Hubhöhe bestimmt erscheint. Dieses Arbeitsquantum: $G \times h$ bildet gewissermassen einen der Kugel übermittelten Arbeitsvorrath, welcher durch Aufhebung ihrer Verbindung mit dem Seile disponibel und — entsprechend der Gleichung:

$$G \times s = \frac{M}{2} \times v \times v$$

— in dem Masse in lebendige Kraft umgesetzt wird, als sich die Kugel im freien Falle ihrer Unterlage nähert. Ist endlich s gleich h geworden, so hat sich der ganze Arbeitsvorrath: $G \times h$ in lebendige Kraft umgesetzt, das heisst, es gilt, da die der Fallhöhe h entsprechende Geschwindigkeit zugleich die Endgeschwindigkeit: c der Kugel vorstellt, die Beziehung:

$$G \times h = \frac{M}{2} \times c \times c,$$

deren Auflösung nach c den jeweiligen numerischen Werth dieser Endgeschwindigkeit liefert.

Der letztere wird gemäss der bekannten Thatsache, dass eine senkrecht gegen eine horizontale, vollkommen elastische Fläche bewegte Kugel von gleicher Beschaffenheit mit derselben Geschwindigkeit vertical nach aufwärts zurückprallt, welche sie beim Auffallen besass, durch den Zusammenstoss der Kugel mit ihrer Unterlage nicht verändert, wonach auch ihre lebendige Kraft vor dem Stosse jener nach dem Stosse gleich ist.

Die weitere Bewegung der Kugel besteht in einem geradlinigen Emporsteigen über ihre Unterlage, wobei die zu Beginn dieser Bewegung vorhandene lebendige Kraft in dem Masse in mechanische Arbeit umgesetzt wird, als die Kugel sich höher erhebt. Ist sie schliesslich bis zur Höhe h emporgestiegen, so hat sich der ganze disponible Vorrath an lebendiger Kraft in mechanische Arbeit verwandelt, das heisst, der Vorrath an lebendiger Kraft ist dann gleich Null, der Arbeitsvorrath dagegen gleich $G \times h$.

Da nun die lebendige Kraft eines Körpers in Folge der Unveränderlichkeit seiner Masse: M nur dadurch verschwinden kann, dass das Quadrat seiner Geschwindigkeit, also diese selbst gleich Null wird, gelangt die Kugel in der Höhe h momentan zur Ruhe, um sich hierauf wieder im freien Falle gegen ihre Unterlage zurückzubewegen.

Es vollzieht sich demnach der hier geschilderte Bewegungsprocess einerseits durch einen Umsatz von mechanischer Arbeit in lebendige Kraft, anderseits durch einen solchen von lebendiger Kraft in mechanische Arbeit, wobei der jeweilige Arbeitsvorrath der Kugel für gleiche Abstände der letzteren von ihrer anfänglichen Unterlage stets denselben Werth annimmt, weil für gleiche Abstände natürlich auch deren Producte in das an einem und demselben Erdorte unveränderliche Gewicht der Kugel einander gleich werden.

In Folge der Aequivalenz von mechanischer Arbeit und lebendiger Kraft gewinnt dann die Kugel, so oft sie im Verlaufe ihrer Bewegung eine frühere Position wieder erreicht, auch dieselbe lebendige Kraft, welche Folgerung den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft ausdrückt.

Untersuchen wir schliesslich noch, welchen Betrag der disponible Arbeitsvorrath der Kugel besitzt, sobald dieselbe irgend eine Fallhöhe: s, die natürlich immer zwischen 0 und h liegt, durchlaufen hat. — Da unter dieser Voraussetzung die Arbeit: $G \times s$ in lebendige Kraft umgesetzt worden ist, reducirt sich der disponible Arbeitsvorrath auf:

$$G \times h - G \times s = G \times h - \frac{M}{2} \times v \times v$$

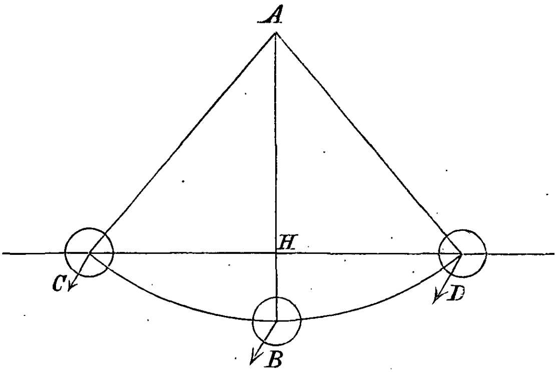
und liefert daher, um die gleichzeitig vorhandene lebendige Kraft der Kugel vermehrt, immer das Product: $G \times h$, das heisst eine Grösse, welche für die in Betracht gezogene Bewegung unveränderlich oder — in der Ausdrucksweise der Mathematiker — constant bleibt.

In dieser Eigenschaft der untersuchten Bewegung, gemäss welcher die Summe aus der jeweiligen lebendigen Kraft des bewegten Körpers und seinem gleichzeitigen Arbeitsvorrathe einen constanten Werth beibehält, ist nun auch das Princip von der Erhaltung der Kraft in seiner einfachsten Fassung zum Ausdrucke gelangt.

Um zunächst eine völlig elementare Anwendung desselben zu bieten, wollen wir mit seiner Hilfe jene Form der Pendelbewegung studiren, bei welcher eine Kugel von dem Gewichte G, die an einem in A bleibend befestigten Seile (Fig. 3) hängt, aus ihrer ursprünglichen Ruhelage B im Kreisbogen bis C bewegt und hierauf ohne weiteren Antrieb der Wirkung der Schwere überlassen wird.

Da die Gerade AB unter den gemachten Voraussetzungen zugleich die Richtung der wirksamen Schwerkraft bestimmt, wurde bei dem Transport der

Fig. 3.



Kugel von B nach C in der Richtung dieser Kraft ein bestimmter Weg durchlaufen, welchen wir leicht veranschaulichen können, indem wir durch C eine horizontale, folglich zu AB senkrechte Gerade ziehen. Der Abstand ihres Schnittpunktes H mit AB vom Mittelpunkte: B der ruhenden Kugel repräsentirt dann die in Frage stehende Höhe: BH, bis zu welcher die Kugel durch ihre Bewegung im Kreisbogen BC über B emporgehoben wurde, wonach die Kugel in C einen disponiblen Arbeitsvorrath von der Grösse: $G \times \overline{BH}$ besitzt.

Indem sie nun, der Wirkung der Schwere überlassen, nach B zurückkehrt, wird ihre verticale Erhebung über B und damit auch das Product der letzteren in G, das heisst ihr noch disponibler Arbeitsvorrath immer kleiner. Es muss daher nach dem zuvor aufgestellten Principe ein dem eingetretenen Arbeitsverluste äquivalenter Gewinn an lebendiger Kraft vorhanden sein, so dass die Kugel, wenn sie den tiefsten Punkt ihrer Bahn passirt, ihre Erhebung über B also gleich Null geworden ist, ihren ganzen Arbeitsvorrath in lebendige Kraft umgesetzt haben wird. Die zugehörige Geschwindigkeit: c der Kugel genügt mithin der Beziehung:

$$\frac{M}{2} \times c \times c = G \times \overline{BH},$$

und bildet zugleich die grösste Geschwindigkeit, welche sie überhaupt erreichen kann, weil ja die Summe aus der jeweiligen lebendigen Kraft und dem noch disponiblen Arbeitsvorrathe immer gleich $G \times \overline{BH}$ bleibt.

Die weitere Bewegung der Kugel über B hinaus ist, indem sie sich hiebei immer höher über B erheben muss, mit Arbeitsleistung verbunden; sie kann also nur so lange steigen, als in Arbeit umsetzbare lebendige Kraft vorhanden ist. Nun war aber ihr gesammter Vorrath an lebendiger Kraft beim Beginne ihrer Bewegung nach aufwärts gleich $\frac{M}{2} \times c \times c$; sie bewegt sich demnach nur so weit nach aufwärts, bis sie die äquivalente Arbeit: $G \times \overline{BH}$ geleistet hat, das heisst bis zu einem Punkte: D, welcher mit C in derselben horizontalen Linie gelegen, mithin von B eben so weit wie C entfernt ist.

In diesem Punkte D muss die Kugel, weil ihre lebendige Kraft aufgezehrt und damit auch ihre Geschwindigkeit gleich Null geworden ist, momentan zur Ruhe gelangen, und befindet sich mithin in D unter denselben äusseren Einflüssen wie in C, so dass ihre fernere Bewegung nur in einer Wiederholung der eben geschilderten Bewegungsvorgänge besteht.

Sie ersehen hieraus, hochgeehrte Anwesende, dass auf Grundlage des Princips von der Erhaltung der Kraft nicht nur der allgemeine Habitus gewisser Bewegungen im Vorhinein beurtheilt werden kann, sondern auch über die jeweilige Geschwindigkeit des bewegten Körpers mathematisch präcise Angaben möglich sind.

Bezüglich der Ausdehnung des Princips auf andere Bewegungsprocesse kommt vor Allem die Ueberlegung zur Geltung, dass die Kraftwirkungen, welche wir bei seiner Ableitung vorausgesetzt haben, während der ganzen Dauer der untersuchten Bewegungen sich gleich blieben, denn das absolute Gewicht eines Körpers ändert sich wohl mit dem Erdorte, in welchem er sich befindet, nicht aber mit der Zeit, die seine Bewegung an einem und demselben Erdorte in Anspruch nimmt. Wollen wir demnach das Princip von irdischen auf kosmische Bewegungen übertragen, so muss früher noch die Frage beantwortet werden, ob die Kräfte, welche die gegenseitigen Ortsveränderungen der Himmelskörper bedingen, nicht etwa von Factoren abhängen, die eine derartige Verallgemeinerung des Princips selbst auf Grundlage eines Analogieschlusses sachlich ungerechtfertigt erscheinen lassen.

Auch hier müssen wir, wie bei den früher behandelten Erscheinungen, von gewissen empirischen Gesetzen ausgehen, das heisst von Gesetzen, welche im vorliegenden Falle durch Zusammenfassung einer Reihe astronomischer Beobachtungen inductiv ermittelt worden sind. Als solche dienen die bekannten Kepler'schen Gesetze, welche speciell die Bewegung der Planeten um die Sonne durch folgende Merkmale charakterisiren:

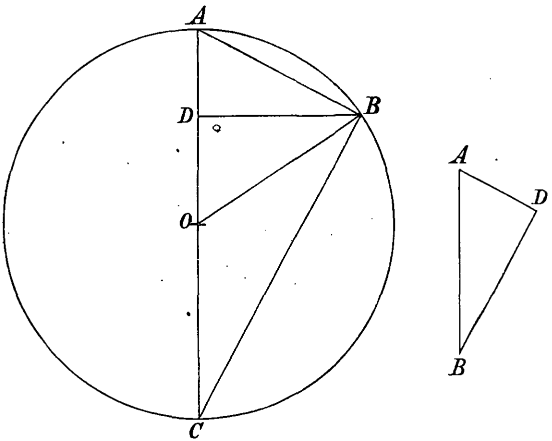
1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, welche in dem einen Brennpunkte der Ellipsen steht.

2. Die von dem Radius vector jedes Planeten beschriebenen Flächenräume verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Um nun die aus diesen Gesetzen resultirenden Kraftwirkungen zwischen der Sonne und irgend einem ihrer Planeten in möglichst einfacher Weise festzustellen, beziehen wir unsere Betrachtungen auf eine elliptische Bahn von verschwindender Excentricität,[12]) das heisst auf einen Kreis, dessen Mittelpunkt dann mit jenem der Sonne zusammenfällt. Dies vorausgesetzt, ist der Radius: r des Kreises mit dem jeweili-

Fig. 4.



gen Radius vector des Planeten identisch und misst zugleich dessen mittlere Entfernung von der Sonne, welche bekanntlich im Vergleiche zum Sonnen- und Planetendurchmesser so gross bleibt, dass man beide Körper unter Beibehaltung des in Fig. 4 gewählten Massstabes durch Punkte versinnlichen kann. [13])

Im Anschlusse hieran sei A die ursprünglich ins Auge gefasste Position des Planeten, AB der vom Beginne der Beobachtung bis zum Zeitmomente t von dem Planeten durchlaufene Weg, also AOB die von seinem Radius vector in t Secunden beschriebene Fläche.

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze wächst diese Fläche proportional der Zeit, das heisst sie ist nach $2 \times t$ Secunden zweimal so gross, nach $3 \times t$ Secunden dreimal so gross wie nach t Secunden etc. Da nun die Fläche jedes Kreissectors in demselben Verhältnisse zunimmt wie dessen Bogen, wird gleichzeitig der von dem Planeten durchlaufene Weg nach $2 \times t$ Secunden zweimal so lang, nach $3 \times t$ Secunden dreimal so lang als nach t Secunden etc., wonach der Planet in jeder Secunde gleich viel Meter zurücklegt, das heisst seine vorläufig noch unbekannte Geschwindigkeit — sie mag mit c bezeichnet werden — in allen Bahnpunkten dieselbe ist. Gesetzt aber den Fall, dass der Planet in jeder Secunde c Meter durchläuft, so macht er — unter u seine in Secunden ausgedrückte Umlaufszeit verstanden — in u Secunden den Weg: $c \times u$ Meter, der seinerseits den Umfang der ganzen Planetenbahn vorstellt, mithin nach einem bekannten Satze der elementaren Geometrie durch Multiplication der Ludolphischen Zahl: $\pi = 3{\cdot}14$ mit dem Bahndurchmesser: $AC = 2\,r$ gefunden wird. Die so erhaltene Gleichung: $c \times u = \pi \times 2\,r$ liefert jetzt für die fragliche Geschwindigkeit den Werth:

$$c = \frac{\pi \times 2r}{u}.$$

Verbinden wir ferner den Bahnpunkt B mit den Punkten A und C durch gerade Linien und fällen von B eine Senkrechte BD auf AC, so wird, sobald man das Dreieck ABD in die ausserhalb des Kreises veranschaulichte Position bringt, unmittelbar ersichtlich, dass dessen Seiten AD und AB zu einander in demselben Verhältnisse stehen wie die Seiten AB und AC des grösseren Dreiecks ABC. Auf diese Art gilt die Proportion:

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AB} : 2r,$$

welche die Strecke AD nach bekannten Regeln einstweilen in der Form:

$$AD = \frac{\overline{AB} \times \overline{AB}}{2r} = \overline{AB} \times \frac{\overline{AB}}{2r}$$

bestimmt. Dieselbe repräsentirt den Weg, welchen der Planet, indem er sich von A nach B bewegte, in der Richtung von A gegen O gemacht hat, und ist, wenn die Zeit t auf wenige Secunden beschränkt, also der Bogen AB im Vergleiche zur ganzen Bahn sehr kurz wird, auch gleich dem Producte des Bogens AB in den Quotienten aus dem Bogen AB und dem Bahndurchmesser: $2r$. Es erscheint dies darin begründet, dass, sobald der Punkt B dem Punkt A sehr nahe liegt, Sehne und Bogen nicht mehr von einander zu unterscheiden sind. Hieraus resultirt, da der Bogen AB als ein von dem Planeten in t Secunden durchlaufener Weg durch die Gleichung:

$$\overline{AB} = c \times t = \frac{\pi \times 2r}{u} \times t$$

gegeben wird, folglich der Quotient aus dem Bogen AB und dem Bahndurchmesser dem Ausdrucke:

$$\frac{\overline{AB}}{2r} = \frac{c \times t}{2r} = \frac{c}{2r} \times t = \frac{\pi}{u} \times t$$

entspricht, für AD die neue Darstellung:

$$AD = \frac{\pi \times 2r}{u} \times t \times \frac{\pi}{u} \times t = \frac{\pi \times \pi \times 2r}{u \times u} \times t \times t,$$

welche sich unmittelbar mit folgenden Schlüssen verknüpfen lässt:

In derselben Weise, wie wir den freien Fall eines Körpers als Wirkung der irdischen Schwerkraft, das heisst einer von der Erde auf denselben geäusserten Anziehungskraft betrachtet haben, interpretiren wir die Annäherung des Planeten an die Sonne in der Richtung AO als Wirkung einer von der Sonne auf den Planeten ausgeübten Anziehung.

Gleichwie die irdische Schwerkraft dem ihrer Wirkung unterworfenen Körper eine gewisse Beschleunigung: g ertheilt, muss dann auch der Planetenmasse in Folge der Anziehungswirkung der Sonne in der Richtung von A gegen O eine bestimmte Beschleunigung zukommen, welche wir vorläufig mit p bezeichnen wollen.

Wir haben nun früher gefunden, dass der in der Richtung der irdischen Schwerkraft in t Secunden durchlaufene Weg durch Multiplication der halben Beschleunigung mit dem Quadrate dieser Zeit erhalten wird. — Indem wir zur Bestimmung des Weges: AD, welchen der Planet in der Richtung der Sonnenanziehung in der Zeit t von A gegen O hin gemacht hat, dieselbe Regel anwenden, gelangen wir direct zu der Gleichung:

$$AD = \frac{p}{2} \times t \times t.$$

Sind aber zwei Grössen einer und derselben dritten Grösse gleich, so sind sie auch untereinander gleich, es ist also:

$$\frac{p}{2} \times t \times t = \frac{\pi \times \pi \times 2r}{u \times u} \times t \times t,$$

folglich:

$$\frac{p}{2} = \frac{\pi \times \pi \times 2r}{u \times u}, \; p = \frac{2\pi \times \pi \times 2r}{u \times u},$$

womit die fragliche Beschleunigung durch lauter bekannte Grössen ausgedrückt erscheint.

Bei Ableitung dieses Resultates sind übrigens noch nicht sämmtliche Merkmale der Planetenbewegung zur Geltung gekommen, indem wir bisher nur von dem ersten und zweiten Kepler'schen Gesetze Gebrauch gemacht haben. Der für die Beschleunigung p bestehende Ausdruck gewinnt daher erst dann eine definitive Gestalt, wenn in demselben auch dem dritten Kepler'schen Gesetze Rechnung getragen worden ist.

Das Letztere besagt, weil sich die inneren Glieder einer jeden Proportion mit einander vertauschen lassen, dass das Verhältniss des Quadrates der Umlaufszeit zur dritten Potenz der mittleren Entfernung von der Sonne für jeden Planeten dasselbe bleibt. Bezeichnen wir mithin den empirischen Werth dieses Verhältnisses mit a, so besitzt für den in Betracht gezogenen Planeten das Verhältniss von $u \times u$ zur dritten Potenz von r ebenfalls den Werth: a, welche Thatsache, da die dritte Potenz einer gegebenen Gröses das Product derselben in ihr Quadrat vorstellt, sich auch in der Form:

$$\frac{u \times u}{r \times r \times r} = a \text{ oder: } u \times u = a \times r \times r \times r$$

ausdrücken lässt. Hieraus geht hervor, dass man im Nenner des für p abgeleiteten Resultates statt $u \times u$ immer $a \times r \times r \times r$ schreiben kann, wobei der Quotient: $\frac{2\,r}{r}$ sich auf 2 reducirt, also:

$$p = \frac{2\,\pi \times \pi \times 2}{a \times r \times r} = \frac{4\,\pi \times \pi}{a \times r \times r}$$

übrig bleibt. Es wird dann noch die Division von $4\,\pi \times \pi = 4 \times 3{\cdot}14 \times 3{\cdot}14$ durch die Erfahrungszahl: a eine neue Zahl: b liefern, deren Einführung an Stelle von $\frac{4\,\pi \times \pi}{a}$ die definitive Gestalt von p herstellt:

$$p = \frac{b}{r \times r}.$$

Nun ist bekanntlich, wenn g die Fallbeschleunigung eines schweren Körpers bezeichnet, dessen absolutes Gewicht, das heisst die Stärke der von der Erde auf ihn ausgeübten Anziehung, gleich dem Producte aus g in die Masse: M des Körpers. — Dasselbe Gesetz verknüpft im vorliegenden Falle die Anziehungskraft der Sonne mit der ihr correspondirenden Beschleunigung: p des Planeten und mit dessen Masse, die etwa mit m bezeichnet werden mag, das heisst es gilt für die hier wirksame Anziehungskraft: K die Gleichung:

$$K = p \times m = \frac{b \times m}{r \times r},$$

gemäss welcher die Attraction der Sonne auf den Planeten um so stärker ist, eine je grössere Masse derselbe besitzt, hingegen anderseits für einen und denselben Planeten proportional dem Quadrate seiner Entfernung von der Sonne abnimmt.

Im Uebrigen bleibt die Stärke der Sonnenanziehung ebenso unabhängig von der Zeit, seit welcher sich der in Betracht gezogene Planet bewegt, wie die Grösse der irdischen Schwerkraft von der jeweiligen Fallzeit eines ihrer Wirkung unterworfenen Körpers unabhängig erscheint.

Auf diese Art bilden die irdische Schwerkraft und die Anziehungskraft der Sonne auf irgend einen ihrer Planeten Kräfte von demselben allgemeinen Typus, so dass wir nunmehr das Princip der Erhaltung der Kraft auch für das Studium der Planetenbewegung verwerthen können. Hiebei erfordert nur noch die Frage eine kurze Discussion, in welchem Sinne der Begriff: Mechanische Arbeitsleistung für die Bewegung eines Planeten zu interpretiren ist.

Um hierüber den gewünschten Aufschluss zu gewinnen, stützen wir uns auf jene Formulirung, welche der erwähnte Begriff in den beiden früher erörterten Bewegungsprocessen erhalten hat. Bewegte sich die in Betracht gezogene Kugel in Folge eines Zusammenstosses mit ihrer elastischen Unterlage geradlinig vertical nach aufwärts, so sprachen wir von einer Vermehrung des Arbeitsvorrathes der Kugel, während jeder geradlinigen Annäherung der Kugel an ihre ursprüngliche Unterlage eine Verminderung ihres Arbeitsvorrathes zugeordnet wurde. Desgleichen ergab sich bei dem Studium einer einfachen krummlinigen Bewegung der Kugel, welche wir als Pendelbewegung bezeichneten, eine eben solche Abhängigkeit ihres jeweiligen Arbeitsvorrathes von ihrer verticalen Erhebung über ihren tiefsten Bahnpunkt. Wir sprachen demnach bei beiden Bewegungsprocessen nur insoferne von einem Arbeitsgewinn, respective Arbeitsverluste, als sich — mochte nun die Bewegung der Kugel in einer geraden Linie oder in einer Curve stattfinden — deren Entfernung vom Erdmittelpunkte vergrösserte, beziehungsweise verkleinerte. Diese Ueberlegungen enthalten bereits die Directive für die fragliche Interpretation des Begriffes: Mechanische Arbeitsleistung bei der Bewegung irgend eines Planeten um die Sonne: Sein Arbeitsvorrath wird zunehmen oder abnehmen, je nachdem sich die jeweilige Distanz des Planeten vom Mittelpunkte der Sonne, das heisst sein jeweiliger Radius vector vergrössert oder verkleinert.

Der Radius vector erhält nun, so oft der Mittelpunkt des Planeten bei seiner Bewegung mit einem der beiden Endpunkte der grossen Axe seiner elliptischen Bahn zusammenfällt, seinen kleinsten oder grössten Werth, je nachdem Sonne und Planet hiebei auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Bahncentrums liegen. Im ersteren Falle ist dann gemäss unseren vorigen Betrachtungen auch der Arbeitsvorrath am geringsten, im letzteren am bedeutendsten. Aber nach dem Principe von der Erhaltung der Kraft bleibt die Summe aus der jeweiligen lebendigen Kraft des bewegten Körpers und seinem gleichzeitigen Arbeitsvorrathe eine constante Grösse. Es wird also, wenn der Planet in seinem Perihel anlangt, seine lebendige Kraft am stärksten, dagegen, wenn er sein Aphel erreicht, am schwächsten sein.

Da schliesslich die lebendige Kraft des Planeten als das Product seiner halben Masse in das Quadrat seiner jeweiligen Geschwindigkeit bei der Unveränderlichkeit der ersteren nur mit dem Quadrate der letzteren zunehmen oder abnehmen kann, zeigt der Planet im Perihel seine grösste Geschwindigkeit und bewegt sich um so langsamer, je näher er seinem Aphel kommt. Ausserdem wird ersichtlich, dass der Planet in gleichen Entfernungen von der Sonne stets dieselbe lebendige Kraft gewinnt, weil gemäss dem verwendeten Principe die Summen aus lebendiger Kraft und mechanischem Arbeitsvorrathe für zwei beliebige Bahnpunkte dieselbe Grösse besitzen, mithin, sobald die Arbeitsvorräthe einander gleich werden, auch die ersten Glieder beider Summen mit einander übereinstimmen müssen.

Auf solche Art gilt für jede Planetenbewegung zugleich der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, welcher in gewissem Sinne die endlose Fortdauer der hier besprochenen kosmischen Bewegungsprocesse verbürgt.

Nachdem nun derselbe Satz gemäss früheren Betrachtungen in analoger Weise für gewisse, den Wirkungen der Schwerkraft entspringende irdische Bewegungsprocesse besteht, liegt der Versuch nahe, die Wirkung der terrestrischen Anziehung auf irgend einen, nahe der Erdoberfläche befindlichen Körper und jene der Sonnenanziehung auf einen ihrer Planeten von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus zu betrachten. Wir gehen hiebei nach einem bereits von Galilei und Newton verwertheten Grundsatze vor, welchen Professor Mach treffend als das Princip der Continuität bezeichnet und, wie folgt, formulirt hat: [14]) „Was einmal und irgendwo eine Eigenschaft der Natur ist, das findet sich, wenn auch nicht gleich auffallend, immer und überall wieder.“

Als Ausgangspunkt unserer diesbezüglichen Erwägungen diene die allgemein geläufige Erfahrungsthatsache, dass die mechanische Zerkleinerung jedes schweren Körpers in einzelne Bruchstücke lauter Theile liefert, die ebenso wie das zerlegte Ganze schwer sind, das heisst ihrer Unterlage beraubt zur Erde fallen. Sammelt man die erhaltenen Bruchstücke wieder, so wird ihr Gesammtgewicht eben so gross wie jenes des ursprünglichen Körpers, wonach die Wirkung der Erde auf den Körper als eine Summe gleichartiger, auf dessen Elemente ausgeübter Anziehungen zu betrachten ist.

Dasselbe gilt dann auch bezüglich der seitens des Körpers auf die Erde geäusserten Anziehung, welche nach dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nothwendig bestehen muss, das heisst die Wechselwirkung beider Körper erscheint als Resultirende aller jener Kräfte, mit welchen sich die einzelnen materiellen Elemente, aus welchen beide Körper bestehen, gegenseitig anziehen.

Hiebei gestattet der Begriff: Materielles Element unter Berücksichtigung bekannter, der Chemie angehörigen Sätze noch eine bestimmtere Fassung. Die genannte Wissenschaft lehrt nämlich, dass alle chemisch zusammengesetzten Körper aus mechanisch untrennbaren Bestandtheilen, den sogenannten Molekülen, und diese wieder aus chemisch unzerlegbaren Elementen, den sogenannten Atomen, bestehen. Die letzteren sind — wir werden in der nächsten Vorlesung bei einigen chemischen Elementen obere Grenzen für die Durchmesser ihrer Moleküle angeben — von endlicher, wenngleich ausserordentlich geringer Grösse, so dass kein Körper ins Unbegrenzte theilbar, sondern der Begriff: Materielles Element — wenigstens nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft — mit jenem des Atoms zu identificiren ist.

Im Anschlusse hieran erscheint die Anziehung der Erde auf einen schweren Körper als Resultirende aller Anziehungen, welche die Atome, aus welchen die Erde besteht, auf die Atome, welche den Körper constituiren, ausüben, und sind gemäss den über die Grösse der Atome gemachten Bemerkungen für alle hier in Betracht kommenden Anziehungen die gegenseitigen Entfernungen der wirksamen materiellen Elemente sehr bedeutend im Vergleiche zu deren Dimensionen.

Sie wissen ferner, hochgeehrte Anwesende, dass die Himmelskörper zufolge den Resultaten der Spectralanalyse dieselben chemischen Elemente enthalten, welche sich auf unserer Erde vorfinden, wonach die Anziehung zweier irdischer Körper für relativ sehr grosse Distanzen denselben Gesetzen unterworfen sein wird wie die Anziehung zweier Himmelskörper für im Vergleiche zu deren Durchmessern sehr bedeutende Entfernungen.

Aus diesem Grunde darf die Wirkung der irdischen Schwerkraft auf einen nahe der Erdoberfläche befindlichen Körper nunmehr als Resultirende einer Reihe von Anziehungen betrachtet werden, welche gleichfalls proportional dem Quadrate der Entfernung je zweier wirksamer materieller Elemente abnehmen, das heisst das aus den Kepler'schen Gesetzen abgeleitete Wirkungsgesetz bestimmt in dem hier präcisirten Sinne überhaupt die Wechselwirkung zweier irdischer oder kosmischer Massen. Es ist Newton's unsterbliches Verdienst, jenes Wirkungsgesetz zuerst in seiner ganzen Allgemeinheit erkannt zu haben, weshalb dasselbe auch nach Einführung des mit „Anziehung" gleichbedeutenden Ausdruckes: Gravitation als Newton'sches Gravitationsgesetz bezeichnet wird.

Hieran knüpft sich jetzt die weitere Frage, in welcher Form das Princip von der Erhaltung der Kraft für alle in Folge derartiger Gravitationen stattfindenden Bewegungen irgend welcher Körper aufgestellt werden kann.

Da sich gemäss früheren Betrachtungen die Anziehung je zweier Körper aus den Anziehungen der sie constituirenden Atome zusammensetzen lässt, haben wir das Princip vor Allem für zwei im Raume vollkommen frei bewegliche Atome zu präcisiren, deren gegenseitige Anziehung mit dem Quadrate ihrer Entfernung abnimmt. Es ist dann ebenso wie bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne jede Vergrösserung des gegenseitigen Abstandes der Atomcentren — wir denken uns beide Atome als Kugeln von ausserordentlich kleinen Radien — mit einer Arbeitsleistung verbunden, so dass es anfänglich den Anschein hat, als könnte durch fortgesetztes Vergrössern ihrer Distanz ein unendlich grosser Arbeitsvorrath aufgespeichert werden. Aber eine unendliche Grösse lässt sich nicht mehr als eine messbare definiren; es wäre mithin, wenn sich dies wirklich so verhielte, nicht mehr möglich, gemäss dem obigen Principe die Summe aus den jeweiligen lebendigen Kräften der Atome und ihrem Arbeitsvorrathe einer bestimmten Grösse gleichzusetzen.

Die Entscheidung hierüber fällt nicht schwer, wenn man die Anziehung der Atome für eine gewisse Distanz, z. B. für einen Meter, mit jenen Attractionen vergleicht, welche dieselben in Entfernungen von zehn, hundert, tausend Metern auf einander ausüben. Da nämlich die letzteren Attractionen gemäss dem Newton'schen Wirkungsgesetze hundert-, zehntausend- und millionmal schwächer ausfallen als die Attractionen in der Distanz von einem Meter, werden die Anziehungen für bedeutende Entfernungen überhaupt so ausserordentlich klein, dass eine weitere Vergrösserung derselben den inzwischen aufgespeicherten Arbeitsvorrath nicht mehr merklich steigern kann. Hienach erscheint der Arbeitsvorrath beider Atome, insoweit er durch einfache Verschiebung derselben unter der Wirkung ihrer wechselseitigen Anziehung erzeugbar ist, als eine Grösse, welche sich ohne merklichen Fehler mit einer mechanischen Arbeit identificiren lässt, welche durch Auseinanderschieben zweier, einander ursprünglich berührender Kugeln unter Ueberwindung eines endlichen Widerstandes in eine grosse, aber endliche Entfernung geleistet wird.[15])

In diesem Sinne kann dann auch die Summe aus den jeweiligen lebendigen Kräften der zwei in Betracht gezogenen Atome und ihrem gleichzeitig noch disponiblen Arbeitsvorrathe einer endlichen und daher messbaren, constanten Grösse gleichgesetzt werden.

Da schliesslich jeder Summe, welche aus einer endlichen, im Uebrigen beliebig grossen Anzahl von Summanden besteht, ebenfalls ein endlicher Werth zukommt, gelten analoge Betrachtungen auch für alle Atomcomplexe, welche sich aus irgend einer endlichen Anzahl von Atomen zusammensetzen. An die Stelle der Summe der lebendigen Kräfte und des Arbeitsvorrathes von zwei Atomen werden dann die Summe der lebendigen Kräfte und der Arbeitsvorrath sämmtlicher in den wirksamen Atomcomplexen, das heisst in den betreffenden materiellen Körpern vorhandener materieller Elemente treten, und wird das Princip von der Erhaltung der Kraft in seiner Anwendung auf solche Atomcomplexe nunmehr in der Form auszusprechen sein, dass die Summe der jeweiligen lebendigen Kräfte sämmtlicher materieller Elemente der wirksamen Atomcomplexe, vermehrt um den gesammten gleichzeitigen Arbeitsvorrath der letzteren, einen für alle Zeiten gleichbleibenden, endlichen Werth besitzt.

Die physikalische Bedeutung der einzelnen, diesen Werth zusammensetzenden Summanden ist bereits früher klargelegt worden, so dass mit der Form, welche dem Principe hier verliehen wurde, auch dessen physikalische Bedeutung gegeben erscheint.

Eine unmittelbare und gemeinverständliche Consequenz desselben besteht darin, dass an keiner Stelle eines Systems materieller Körper, z. B. unseres Sonnensystems, ins Unbegrenzte Arbeit gewonnen werden könnte, mithin auch ein sogenanntes Perpetuum mobile, das heisst eine Maschine, welche, einmal in Gang gesetzt, nie mehr zum Stillstande käme, nicht herstellbar wäre. — So gering nämlich auch die Reibungswiderstände bei ihrer Bewegung ausfallen möchten, sie würden zu ihrer Ueberwindung innerhalb eines endlichen Zeitraumes doch ein bestimmtes endliches Arbeitsquantum in Anspruch nehmen, welches, weil das Product einer endlichen in eine unendliche Grösse unter allen Umständen unendlich gross wird, in einer unendlich langen Zeit auf eine unendliche Grösse anwachsen müsste, also sich nur aus einem unendlich grossen Arbeitsvorrathe bestreiten liesse.

Die letzte noch zu erledigende Frage geht dahin, ob das Princip der Erhaltung der Kraft, nachdem es ausschliesslich für eine endliche Anzahl materieller Elemente eine bestimmte Fassung erlaubt, auf die Gesammtheit aller sichtbaren Weltkörper ausdehnbar ist oder nicht.

Bei der Discussion dieser Frage fällt nun die Thatsache ins Gewicht, dass wir erst auf Reize von endlicher Stärke mit Sinnesempfindungen reagiren, also unendlich weit von uns entfernte Körper, falls solche überhaupt existiren, ausserhalb des Bereiches unserer sinnlichen Erfahrungen und damit auch jenseits des Gebietes exacter physikalischer Forschung liegen. Ein endlicher Raum [16]) kann aber, da die Elemente der Materie von endlicher Grösse sind, nur eine endliche Anzahl solcher Elemente in sich aufnehmen, wonach die obige Frage eine bejahende Antwort gestattet.

Um schliesslich auch die Qualität der durch das Princip der Erhaltung der Kraft vermittelten Erkenntnisse andeutungsweise zu charakterisiren, will ich an meine heutigen Auseinandersetzungen, welche dessen Formulirung für gewisse, nach einem gemeinsamen Gesetze wirkende Anziehungskräfte zum Gegenstande gehabt und ausserdem, so weit dies innerhalb der Grenzen eines elementar wissenschaftlichen Vortrages möglich war, die Verwerthbarkeit des Princips bei dem Studium verschiedener irdischer und kosmischer Bewegungsprocesse gezeigt haben, noch ein Gleichniss knüpfen.

Denken Sie sich, hochgeehrte Anwesende, zwei Künstler, die, jeder in seiner Eigenart, dieselbe Landschaft abbilden. Der eine mag den Glanz ihrer Farben in einem Gemälde zum Ausdrucke bringen, der andere eine Kohlenzeichnung entwerfen, die, obzwar sie das Auge auf den ersten Blick weniger fesselt, bei längerer Betrachtung den Adel der Formen und die reiche Gliederung der wiedergegebenen Landschaft klarer hervortreten lassen wird, als dies bei dem Werke des Malers der Fall gewesen ist.

Aber beide Kunstwerke werden sich nur innerhalb bestimmter Grenzen als naturgetreue Darstellungen jener Landschaft bezeichnen lassen; sie würden ihrer Wirkung auf den Beschauer sofort verlustig werden, wenn dieser etwa, sein Auge mit einem Mikroskope bewaffnend, angesichts der wirklichen Landschaft Detailstudien anstellen würde, inwieweit die Aehnlichkeit der Scenerie mit ihrem Bilde thatsächlich besteht. — Was würde er beispielsweise sehen, wenn er das Mikroskop auf irgend eine Stelle der Kohlenzeichnung richten würde? — Er würde statt einer glatten Papierfläche ein höckeriges, schmutzigweiss gefärbtes Feld gewahren, auf welchem die Kohlentheilchen, die dem unbewaffneten Auge formenschöne Linien vermitteln, zu mächtigen Blöcken vergrössert, regellos verstreut umherliegen. Darum würde das Bild in solchen Details weder den Eindruck der Schönheit, noch jenen von Gesetzmässigkeit erzeugen, und zwischen dem, was man durch das Mikroskop erblickt, und dem, was man draussen wahrnimmt, auch nicht die geringste Aehnlichkeit erhalten bleiben.

Analog gestaltet sich nun das Verhältniss des Naturforschers zur sinnlichen Erfahrungswelt. Ihre Mannigfaltigkeit und reiche Schönheit mag immerhin das Gemüth ergreifen und die Einbildungskraft zu reizvollen Schöpfungen anregen: der Verstand wird nicht eher ruhen, bis auch die Gesetzmässigkeit der wahrgenommenen Erscheinungen ergründet ist, und daher, ein Künstler eigener Art, vorerst ein Bild der Welt aus selbstgeschaffenen Elementen, den Atomen, aufbauen.

Gleichwie ein Zeichner Kohlentheilchen nebeneinander reiht, um die Formen der abzubildenden Landschaft in bestimmten Linien wiederzugeben, verknüpft der Verstand die Atome durch bestimmte Kräfte, und wie die Gesammtheit jener Linien die Landschaft naturgetreu darzustellen hat, soll die Gesammtheit dieser Kräfte die für die beobachteten Naturerscheinungen geltenden Naturgesetze als Wirkungen liefern.

Auf solchem Wege fortschreitend, gewinnt der Verstand die Erkenntniss der allgemeinen Gravitation und des Principes der Erhaltung der Kraft, ohne jedoch hiebei sachlich mehr zu leisten als der Künstler mit seiner Kohlenzeichnung. Denn verfolgen wir, um unser mechanisch-physikalisches Weltgebäude auch im Detail zu vollenden, die Wirkungen der Kräfte in das Gebiet des räumlich Kleinen, so wird jenes Anziehungsgesetz, dessen Giltigkeit für die Bewegungen der Himmelskörper ausser Frage steht, völlig unzureichend, und bleibt es der Zukunft vorbehalten, zu entscheiden, ob nicht selbst die Bausteine, aus welchen wir vorläufig dies Weltgebäude zusammensetzen, das heisst die Atome, noch zu gross sind, um eine bis ins Kleinste getreue Nachbildung der Wirklichkeit [17]) zu ermöglichen.

III. Wärme.

Die zweite grosse Classe von Erscheinungen, auf welche wir das Princip von der Erhaltung der Kraft ausdehnen wollen, wird durch die sogenannten Wärmeerscheinungen gebildet, und haben wir selbstverständlicher Weise vor Allem klarzulegen, in welchem Sinne dieselben aufzufassen sind, soll eine diesbezügliche Verwerthung des Princips überhaupt möglich werden.

Sie erinnern sich, hochgeehrte Anwesende, welcher Bewegungsprocess in unseren letzten Betrachtungen die Grundlage zur Ableitung des wichtigsten bisher aufgestellten Wirkungsgesetzes, des Newton-schen Gravitationsgesetzes, gebildet hat. Es war die Bewegung eines Planeten um seinen Centralkörper, aus deren in den Kepler'schen Erfahrungssätzen ausgesprochenen Eigenschaften wir mittelst einer Reihe einfacher Schlüsse folgern konnten, dass jeder Planet von seinem Centralkörper mit einer Kraft angezogen wird, welche proportional dem Quadrate der jeweiligen Entfernung des ersteren von dem letzteren abnimmt.

Vergegenwärtigen Sie sich nun unter Voraussetzung der bereits erörterten atomistischen Hypothese, welche Bahnen die Moleküle eines Planeten durchlaufen, während dessen Mittelpunkt seine Ellipse um die Sonne beschreibt. — Sehen Sie hiebei von der Rotation des Planeten um seine Axe ab, so erkennen Sie sofort, dass sich dessen Moleküle ebenfalls in lauter Ellipsen bewegen müssen, deren grosse Axen nur um relativ sehr kleine Beträge von der grossen Axe der Mittelpunktsbahn des Planeten differiren. Während jedes vollen Umlaufes um die Sonne wird bei jedem Moleküle ein bestimmtes Quantum lebendiger Kraft in mechanische Arbeit umgesetzt, und anderseits eine gewisse Quantität mechanischer Arbeit in lebendige Kraft verwandelt, wobei die Beziehungen zwischen beiden Grössen stets so geartet sind, dass für die Bewegung des ganzen Systems von Molekülen, d. h. des Planeten, das Princip von der Erhaltung der Kraft fortbesteht.

Es ist weiter bekannt, dass sowohl feste als flüssige, als gasförmige Körper — allerdings in sehr verschiedenen Graden — durch Druck auf ein kleineres Volumen comprimirt werden können, woraus hervorgeht, dass sich die Moleküle in keinem der drei genannten Aggregatzustände berühren, sondern sich in bestimmten Entfernungen von einander befinden müssen. Es ist also auch eine Bewegung der Moleküle von festen Körpern denkbar, bei welcher die Moleküle um ihre ursprünglichen Lagen geschlossene Bahnen von endlichen, aber so kleinen Durchmessern beschreiben, dass sie mit einander noch nicht in Collision kommen, mithin der betreffende Körper seinen Aggregatzustand beibehält.

Ausgehend von diesen einfachen Ueberlegungen denken wir uns jetzt die grossen Bahnen der Planetenmoleküle insgesammt auf einen solchen geringfügigen Umfang reducirt, gleichzeitig aber die Forderung gestellt, dass während jedes Umlaufes dasselbe Quantum lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit umgesetzt werden soll wie während der jährlichen Bewegung des betreffenden Moleküls um die Sonne.

Es müsste dann der in Betracht gezogene Planet anstatt seiner früheren fortschreitenden Bewegung in einer weiten, geschlossenen Bahn lediglich Bewegungen sämmtlicher Moleküle in sehr kleinen Bahnen aufweisen, d. h. es wäre dessen fortschreitende Bewegung unter Wahrung des Principes von der Erhaltung der Kraft in sehr kleine, in sich selbst zurücklaufende Bewegungen seiner Moleküle verwandelt worden. Sobald aber Bahnen von sehr grosser Ausdehnung zu solchen von sehr geringen Dimensionen verkleinert werden, erheischt die Erfüllung der früher ausgesprochenen Forderung eines sich gleichbleibenden Umsatzes von lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit, dass die neuen Bahnen mit sehr bedeutenden Geschwindigkeiten, mithin in sehr kurzen Zeiten vollständig durchlaufen werden, d. h. die so erhaltenen molekularen Schwingungen müssten im Allgemeinen eine ausserordentliche Intensität und eine sehr kleine Schwingungsdauer besitzen.

Aber abgesehen davon, dass ein solcher Körper, sobald dessen fortschreitende Bewegung vollständig in Schwingungen seiner Moleküle umgesetzt worden wäre, äusserlich zum Stillstande käme, müsste an ihm selbst noch eine eigenthümliche Veränderung ersichtlich werden.

Um über dieselbe einen allgemeinen Aufschluss zu gewinnen, berücksichtigen wir zunächst, dass, wie bereits hervorgehoben wurde, nicht allein je zwei Himmelskörper, sondern auch je zwei materielle Elemente einander nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze anziehen, vorausgesetzt, dass der gegenseitige Abstand der letzteren relativ sehr gross bleibt gegenüber ihren räumlichen Dimensionen. Im Gegenfalle lassen sich bezüglich des Gesetzes, nach welchem die Anziehung sich ändert, wenn die betreffenden Elemente einander immer mehr genähert werden, gegenwärtig wohl noch keine bestimmten Angaben machen, d. h. man kann nicht feststellen, von welcher Potenz der gegenseitigen Entfernung die Attraction für sehr kleine Abstände der Elemente abhängt, wohl aber steht so viel fest, dass die Anziehung bei fortgesetzter Annäherung schliesslich bedeutend stärker zunimmt, als dies kraft des Newton'schen Gesetzes der Fall sein würde.

Wenn demnach die Elemente irgend eines festen Körpers gezwungen werden, um ihre anfänglichen Lagen geschlossene Bahnen von sehr kleinen, aber endlichen Durchmessern zu beschreiben, so wird die gegenseitige Anziehung je zweier Moleküle während ihrer Bewegung für alle Abstände, die kleiner sind als deren ursprüngliche Entfernung, immer grösser, hingegen für alle bedeutenderen Abstände stets geringer sein als für ihre ursprüngliche Distanz. In Folge dessen müssen sich die Moleküle in jenen Theilen ihrer Bahnen, bei deren Durchlaufung sie einander näher rücken, rascher als in den übrigen Theilen derselben bewegen und werden auf diese Art, wenn ihre anfänglichen Positionen etwa die Mittelpunkte ihrer nachträglichen elliptischen Bahnen bilden, in grösseren gegenseitigen Abständen länger verweilen als in kürzeren, d. h. es werden ihre Mittellagen während der Dauer ihrer Oscillationen weiter auseinanderrücken: Der Körper muss sich, indem seine Moleküle die geschilderten Bewegungen annehmen, gleichzeitig ausdehnen.

Unsere bisherigen Auseinandersetzungen betrafen lediglich eine ohne Verletzung des Princips von der Erhaltung der Kraft denkbare Verwandlung von fortschreitender Bewegung eines Körpers in solche Bewegungen seiner Moleküle, welche zugleich eine Vergrösserung seines Volumens bedingen, und es versteht sich von selbst, dass mit der Denkbarkeit eines derartigen Processes noch keineswegs dessen wirkliches Vorkommen erwiesen ist. Aber jedenfalls liefern die vorgeführten Betrachtungen eine Directive für die Deutung solcher physikalischer Vorgänge, bei welchen zunächst nur ein plötzliches Aufhören der fortschreitenden Bewegung des betreffenden Körpers beobachtet wird.

Will man hiebei auch die weiteren Erscheinungen einstweilen qualitativ sicher feststellen, so erscheint es zweckmässig, möglichst intensive fortschreitende Bewegungen, d. h. Bewegungen von möglichst grosser lebendiger Kraft plötzlich zu sistiren, also etwa eine

Bleikugel gegen eine harte, unbewegliche Wand abzufeuern. — So erhält z. B. das gegenwärtig beim Werndlgewehre zur Verwendung kommende Projectil bei einem Gewichte von 0·024 Kilogramm eine Anfangsgeschwindigkeit von 432 Metern, [18]) so dass zwar die Masse des bewegten Körpers:

$$M = \frac{0{\cdot}024}{9{\cdot}8} = 0{\cdot}00245$$

eine geringe, dagegen seine lebendige Kraft:

$$\frac{0{\cdot}00245}{2} \times 432 \times 432 = 228{\cdot}6$$

eine relativ sehr bedeutende ist. — Die Erfahrung lehrt nun, dass das Projectil, indem es auf die Wand aufprallt und in Folge dessen seine Geschwindigkeit plötzlich verliert, nicht nur bedeutende Veränderungen in seiner Form erleidet, sondern auch stark erwärmt wird.

Dass erstlich jede solche Deformation mit Arbeitsleistung verbunden ist, leidet keinen Zweifel, denn sobald die ursprüngliche Gestalt des Körpers in eine andere verwandelt wird, muss wenigstens ein Theil seiner Moleküle in neue Positionen versetzt, mithin eine Reihe von Widerständen in den Richtungen ihrer wirksamen Anziehungskräfte überwunden werden, was gemäss früheren Betrachtungen stets eine mechanische Arbeitsleistung erfordert.

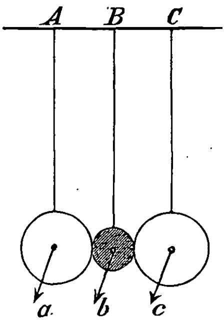
Was ferner zweitens die beobachtete Erhitzung des Projectils anbelangt, so haben wir es hier, da die festen Körper bei Erwärmung erfahrungsgemäss sich ausdehnen, mit einem Processe zu thun, welcher, durch plötzliche Sistirung einer fortschreitenden Bewegung veranlasst, gleichzeitig eine Volumvergrösserung des Körpers zur Folge hat. Es liegt daher nahe, dessen Erwärmung in demselben Sinne wie den früher discutirten idealen Process als eine Bewegung der Moleküle des Körpers aufzufassen, welche durch Umsatz jenes Restes von lebendiger Kraft hervorgerufen wurde, welcher nach Leistung der Deformationsarbeit noch übrig blieb. Auf solche Art wird dann auch das Princip von der Erhaltung der Kraft für das Studium von Wärmeerscheinungen verwerthbar sein.

Um ferner auf Grundlage der hier gegebenen Erwägungen mathematisch präcise Gesetze erhalten zu können, wird es nothwendig sein, gleich wie wir die Begriffe: „Lebendige Kraft“ und: „Mechanische Arbeitsleistung“ zu diesem Zwecke als messbare Grössen definiren mussten, die in einem Körper vorhandene Wärmemenge ebenfalls als eine messbare Grösse zu charakterisiren und sie demgemäss auf eine bestimmte gleichartige Einheit, das heisst auf eine bestimmte Wärmemenge zu beziehen. Man ist nun übereingekommen, speciell jene Wärmemenge als Wärmeeinheit (Calorie) zu wählen, welche nothwendig ist, um die Temperatur eines Kilogramms chemisch reinen Wassers von 0^0 auf 1^0 Celsius zu erhöhen, und schreibt einem Körper die specifische Wärme: c zu, wenn zur Erhöhung der Temperatur jeder Gewichtseinheit dieses Körpers von 0^0 auf 1^0 Celsius c solche Wärmeeinheiten erforderlich sind.

Die Erfahrung lehrt weiter, dass die zur Erhöhung der Temperatur jeder Gewichtseinheit eines festen Körpers von der specifischen Wärme c von 0^0 auf 2^0, 3^0, 4^0 Celsius nothwendigen Wärmemengen 2, 3, 4mal so gross sind wie c, wonach allgemein die zur Temperaturerhöhung von 0^0 auf t^0 Celsius hinreichende Wärmemenge pro Kilogramm des betreffenden Körpers durch das Product: $c \times t$ gemessen wird, folglich, falls man etwa P Kilogramm von 0^0 auf t^0 Celsius zu erwärmen hat, hiezu im Ganzen $P \times c \times t$ Calorien benöthigt werden.

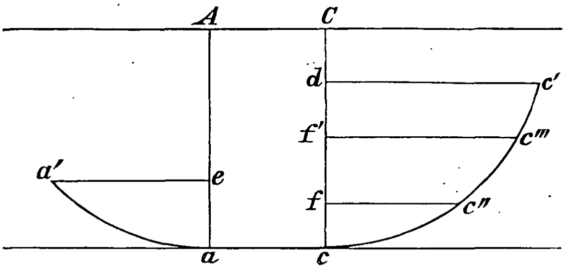
Dies vorausgeschickt, mag nunmehr an Stelle des früher besprochenen rohen Versuches, der nur die Qualität der in Betracht kommenden Zustandsänderungen ersichtlich zu machen hatte, ein feineren Massbestimmungen zugängliches physikalisches Experiment treten.

Fig. 5.



Um dasselbe schematisch zu beschreiben, denken wir uns (siehe Fig. 5) in A, B, C drei fixe, in einer horizontalen Geraden liegende Punkte, in a, b, c die Mittelpunkte dreier an Seilen hängenden Kugeln, welche ihrerseits in A, B, C befestigt sind und einander im Ruhezustande derart berühren, dass die Berührungspunkte im Vereine mit a, b, c gleichfalls ursprünglich einer einzigen **h o r i z o n t a l e n** Geraden angehören. Die mittlere Kugel sei aus Blei und wiege P Kilogramm, die beiden äusseren Kugeln seien zwei untereinander gleiche Steinkugeln von bedeutend grösserem Gewichte: Q, und mag der Versuch in einem Raume stattfinden, dessen Temperatur 0^0 beträgt und sich auch bei Beginn des Experimentes sämmtlichen drei Kugeln mitgetheilt hat.

Fig. 6.



Es werde nun der Mittelpunkt: c der rechtseitigen Steinkugel (siehe Fig. 6) in einem aus C mit dem Radius $\overline{Cc}$ beschriebenen Kreisbogen bis c' bewegt, mithin um $\overline{cd} = h$ Meter über sein ursprüngliches Niveau gehoben und hierauf ohne weiteren Antrieb der Wirkung der Schwere überlassen. Die Kugel wird dann in dem Augenblicke, wo sie ihre Ruhelage wieder erreicht, gemäss früheren Betrachtungen den ganzen ihr mitgetheilten Vorrath an mechanischer Arbeit: $Q \times h$ in lebendige Kraft umgesetzt haben und, indem sie mit der Bleikugel zusammenstösst, dieselbe sowohl **d e f o r m i r e n** als **e r w ä r m e n**, aber im Rückpralle noch etwa bis c''

zurückschwingen und ausserdem durch ihre Collision mit der Bleikugel vermöge der bekannten Fortpflanzung von Stössen durch bewegliche Körper bewirken, dass der Mittelpunkt der linkseitigen Steinkugel in einem aus A mit dem Radius $\overline{Aa}$ beschriebenen Kreisbogen bis a' emporsteigt.

Auf diese Art wird der ursprüngliche Arbeitsvorrath nach dem ersten Zusammenstosse insoweit wieder restaurirt, als einerseits der Mittelpunkt der rechtseitigen Steinkugel, indem er in c'' eintrifft, abermals in eine bestimmte Höhe $\overline{cf} = h'$ über sein ursprüngliches Niveau gehoben worden ist, anderseits der Mittelpunkt der linkseitigen Steinkugel, sobald er in a' anlangt, in der Richtung der wirksamen Schwerkraft den Weg: $\overline{ae} = h''$ zurückgelegt hat. Da übrigens beide Steinkugeln dasselbe Gewicht besitzen, so lässt sich die während der Bewegung der linkseitigen Kugel von a bis a' verrichtete mechanische Arbeit auch durch jene mechanische Arbeit ersetzen, welche man leisten müsste, um den Mittelpunkt der rechtseitigen Kugel um eine, mit $\overline{ae}$ gleiche Höhe: $\overline{ff'} = h''$ über ihr bereits erreichtes Niveau $\overline{fc''}$ zu heben. Derselbe würde sich augenscheinlich im Kreisbogen cc' gleichzeitig bis c''' bewegen, hätte also nur noch das Bogenstück $\overline{c'''c'}$ zu durchlaufen, um seine ursprüngliche Hubhöhe wieder zu erreichen.

Hieraus geht hervor, dass der anfängliche Arbeitsvorrath infolge des ersten Zusammenstosses der Steinkugel mit der Bleikugel nur um jenes Quantum mechanischer Arbeit abgenommen hat, welches zur Hebung des Gewichtes Q um die Höhe $\overline{f'd} = h'''$ erforderlich gewesen wäre.

Die mechanische Arbeit: $Q \times h'''$ muss nun gemäss dem Principe von der Erhaltung der Kraft ihr Aequivalent in jenen Veränderungen finden, welche in der Bleikugel durch den ersten Stoss erzeugt wurden und, wie wir bereits hervorgehoben haben, in einer Formveränderung und Erwärmung der Kugel bestehen.

Die Deformation ist übrigens im vorliegenden Falle keine bedeutende und zieht erfahrungsgemäss keine merkliche Verdichtung der Bleikugel nach sich, d. h. die gegenseitigen Entfernungen ihrer Moleküle bleiben im Wesentlichen dieselben, so dass die zur Formveränderung verbrauchte mechanische Arbeit gegenüber jener mechanischen Arbeit, deren Aequivalent in der Erwärmung der Kugel gesucht werden muss, verschwindend klein ausfällt.

Verstehen wir demnach nunmehr unter c die specifische Wärme des Bleies und unter t die in Celsiusgraden auszudrückende Temperatur, bis zu welcher die Bleikugel erfahrungsgemäss durch den ersten Stoss erwärmt wurde, so kann die hiezu erforderliche Wärmemenge: $P \times c \times t$ ohne merklichen Fehler der gesammten Arbeit: $Q \times h'''$ als eine äquivalente Grösse zugeordnet werden. Gleichwie jedoch beispielsweise eine und dieselbe Länge, je nachdem sie in Klaftern oder in Metern ausgedrückt wird, verschiedene Masszahlen erhält, welche sich erst durch Einführung eines bestimmten Verwandlungsfactors in einander umsetzen lassen, wird auch das Product: $Q \times h'''$ dem Producte: $P \times c \times t$ erst dann numerisch gleich, wenn man das letztere mit einem entsprechenden Verwandlungsfactor — er mag im Anschlusse an die übliche Symbolik mit E bezeichnet werden — multiplicirt. Die so erhaltene einfache Gleichung:

$$Q \times h''' = E \times P \times c \times t$$

liefert dann für E, das ist für das sogenannte mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit, direct den Quotienten:

$$E = \frac{Q \times h'''}{P \times c \times t},$$

welcher, sobald für Q, h''', P, c, t die betreffenden, der Erfahrung entnommenen Zahlenwerthe eingesetzt werden, natürlich ebenfalls mit einer bestimmten, leicht zu berechnenden Zahl zusammenfällt.

So fand Hirn [19]) beispielsweise auf Grundlage eines Versuches, bei welchem er als stossenden Körper einen Eisenblock von 350 Kilogramm Gewicht, als gestossene Körper ein Bleistück von 2·948 Kilogramm und einen Steinblock von 941 Kilogramm Gewicht verwendete, für die in Wärme umgesetzte mechanische Arbeit: $Q \times h'''$ den Werth: 280·42 Kilogrammometer, für die erzeugte Wärmemenge: $P \times c \times t$ den Werth 0·65994 Calorien, so dass E für den erwähnten Versuch mit:

$$E = \frac{280{\cdot}42}{0{\cdot}65994} = 424{\cdot}9$$

zu identificiren ist. Aus sechs analogen Experimenten ergab sich für E der Mittelwerth: 425, d. h. es müssten, um ein Kilogramm Wasser von 0^0 auf 1^0 Celsius zu erwärmen, im Mittel 425 Kilogrammometer in Wärme umgesetzt werden. Liesse sich daher umgekehrt die so erzeugte Wärmemenge wieder vollständig in mechanische Arbeit zurückverwandeln, so würde die letztere genügen, um 425 Kilogramm 1 Meter hoch zu heben, beziehungsweise 1 Kilogramm 425 Meter hoch zu heben.

Nachdem wir uns hiemit über jene Form der Bewegung, welche bei festen Körpern für uns als Wärme in Erscheinung tritt, wenigstens im Allgemeinen orientirt und mit Hilfe des Princips von der Erhaltung der Kraft eine überraschend einfache Beziehung zwischen Wärme und mechanischer Arbeitsleistung gewonnen haben, erwächst uns weiter die Aufgabe, uns auch über jene Bewegungsprocesse eine Vorstellung zu bilden, welche den Uebergang eines festen Körpers in den flüssigen und schliesslich in den gasförmigen Aggregatzustand nach sich ziehen.

Die Erfahrung lehrt nun in zahlreichen speciellen Fällen, dass die genannten Aggregatzustände durch fortgesetzte Erwärmung des untersuchten Körpers herbeigeführt werden können, und leitet uns daher an, den Wechsel seines Aggregatzustandes aus einer Steigerung der seinen Molekülen ertheilten Wärmebewegung zu erklären.

Indem wir hiebei von der früher entwickelten Auffassungsweise der letzteren ausgehen, gestattet der Begriff: Steigerung der Bewegung zunächst die Interpretation, dass die Bahngeschwindigkeiten der Moleküle, mithin auch deren lebendige Kräfte gesteigert werden. Sind also die Molekülbahnen beispielsweise elliptisch, so verlängern sich die grossen Axen dieser Ellipsen, die Moleküle rücken einander in der Verfolgung ihrer Bahnen vorübergehend immer näher und näher, und da, wie bereits bemerkt wurde, ihre gegenseitigen Anziehungen bei sehr bedeutender Annäherung schliesslich noch stärker als nach dem Newton'schen Attractionsgesetze zunehmen, kann hiebei eine Reihe von Molekülen durch ihre Nachbarmoleküle vollständig aus ihren Bahnen herausgerissen werden. Die Moleküle stossen dann, der mächtigen Wirkung ihrer gegenseitigen Anziehung folgend, heftig zusammen, und es entsteht nunmehr natürlich die Frage nach ihrem Verhalten bei jedem solchen Zusammenstosse.

Diese Frage lässt sich gegenwärtig nur hypothetisch beantworten, und zwar geht die einfachste, zugleich mit dem Principe von der Erhaltung der Kraft vereinbare Annahme dahin, dass hiebei die für den Zusammenstoss zweier vollkommen elastischer Körper geltenden Gesetze zum Ausdrucke gelangen,[20]) also die Summe der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stosse dieselbe bleibt.

Auf Grundlage der eben angeführten Hypothese sind dann die Folgen jedes solchen Zusammenstosses leicht zu übersehen; die Moleküle werden unmittelbar nach ihrer Collision im Allgemeinen nach verschiedenen Richtungen von einander abprallen, also ihre ursprünglichen Bahnen vollständig verlassen und, wenn derartige Collisionen in Folge fortgesetzter Erwärmung endlich innerhalb des ganzen, von der Gestalt des Körpers begrenzten Raumes stattfinden, sich insgesammt in ungeschlossenen krummen Linien durcheinander bewegen, welche sich bei jedem neuerlichen Zusammenstosse eckig ausbiegen. Indem aber die Moleküle auf solche Weise ihre anfänglichen Bewegungscentren einbüssen, werden sie unter der Einwirkung äusserer Kräfte relativ sehr leicht verschiebbar, und verliert der Körper in diesem Sinne seine selbstständige Gestalt: er ist in den tropfbar-flüssigen Aggregatzustand übergegangen.

Da sich schliesslich gemäss früheren Betrachtungen je zwei einander anziehende materielle Elemente unter Leistung einer endlichen Arbeit unbegrenzt weit von einander entfernen lassen, also auch, wenn sie mit endlichen lebendigen Kräften zusammenstossen und sich hiebei wie vollkommen elastische Kugeln verhalten, unbegrenzt weit von einander appralleu können, ist durch fortgesetzte Erwärmung noch eine solche Steigerung der molecularen Bewegungen erreichbar, dass die Moleküle des betreffenden Körpers sich trotz ihrer gegenseitigen Anziehungen immer weiter von einander zu entfernen suchen, d. h. der Körper zeigt dann neben einer sehr leichten Verschiebbarkeit seiner Elemente das Bestreben, sein Volumen ins Unbegrenzte zu vergrössern: er hat den gasförmigen Aggregatzustand angenommen.

Dieser Zustand besitzt in seiner vollständigen Entwicklung ausserdem noch weitere bemerkenswerthe Eigenschaften, indem die Geschwindigkeiten der bewegten Moleküle hierbei im Mittel so bedeutende sind, dass die Anziehungskräfte der letzteren sie nicht mehr wesentlich beeinflussen, und insoferne für jede bestimmte Temperatur und jeden bestimmten Druck von einer bestimmten mittleren Geschwindigkeit der Moleküle des in Betracht gezogenen Gases gesprochen werden darf, welche Geschwindigkeit sich unter der Annahme einer geradlinigen Bewegung der Moleküle auch ohne Schwierigkeit berechnen lässt. — Sie beträgt beispielsweise für Wasserstoff *(H)* bei der Temperatur des Gefrierpunktes unter dem Drucke von 1 Atmosphäre 1698 Meter, für Stickstoff *(N)* unter den gleichen Bedingungen 453 Meter und für Kohlensäure (CO_2) 361 Meter.

Dagegen ist die mittlere Weglänge, welche jedes Gasmolekül zurücklegt, ehe es mit einem seiner Nachbarmoleküle zusammenstösst, stets sehr kurz, und zwar, in Centimetern ausgedrückt, speciell für:

H	N	CO_2
0·0000194,	0·0000098,	0·0000066,

woraus sich entnehmen lässt, dass die Anzahl der Zusammenstösse jedes Moleküls mit anderen Molekülen schon während einer einzigen Secunde ungemein gross ausfallen muss. — So ergeben sich z. B. für die drei genannten Gase pro Secunde der Reihe nach die Stosszahlen:

8753 Millionen, 4622 Millionen, 5469 Millionen, welche selbstverständlicher Weise ebenfalls nur als Mittelzahlen aufzufassen sind und lediglich für die früher präcisirte Temperatur und den Druck von 1 Atmosphäre gelten.[21])

Die hier skizzirte Auffassungsweise des gasförmigen Aggregatzustandes ermöglicht ferner auch eine Berechnung der Durchmesser verschiedener Gasmoleküle, wobei die bisher gefundenen Werthe allerdings noch nicht als definitive betrachtet werden dürfen. — Die diesbezüglichen, von O. E. Meyer[22]) unter Hinzuziehung der Theorie von Van der Waals festgestellten Zahlen sind speciell für Wasserstoff, Stickstoff und Kohlensäure folgende:

H: 0·14, N: 0·26, CO_2: 0·18;

sie drücken die fraglichen Moleküldurchmesser in Milliontelmillimetern aus, bestimmen aber wahrscheinlich nur die oberen Grenzwerthe derselben.

Im Anschlusse hieran können wir jetzt den Druck, welchen jedes Gas in seinem Bestreben, sein Volumen möglichst zu vergrössern auf die Wände des dasselbe umschliessenden Gefässes ausübt, noch detaillirter interpretiren, indem wir denselben direct mit jenen lebendigen Kräften in Beziehung bringen, welche sämmtliche Gasmoleküle vermöge ihrer, dem gewählten äusseren Drucke und der dem Gase mitgetheilten Temperatur entsprechenden mittleren Geschwindigkeiten besitzen.[23])

Auch hier wird es des leichteren Verständnisses wegen vortheilhaft sein, unsere Betrachtungen mit der

Discussion eines idealen Bewegungsprocesses zu beginnen, in welchem nur die Hauptmomente der in Frage stehenden Interpretation zur Geltung kommen.

Wir denken uns zu diesem Zwecke eine kreisförmige, mit einem schweren Gewichte P belastete Elfenbeinplatte, welche ursprünglich auf einer fixen Platte von gleicher Grösse und gleichem Materiale ruhte, in verticaler Richtung um eine geringe Höhe: h emporgehoben und nunmehr zwischen beide Platten eine grosse Anzahl von unter einander gleichen Elfenbeinkugeln gebracht, welche mit einer sehr bedeutenden Geschwindigkeit, z. B. von 100 Meter pro Secunde, vertical nach abwärts gegen die untere Platte bewegt werden. Sie erreichen dann, von der letzteren vertical nach aufwärts zurückprallend, da ihre lebendigen Kräfte zufolge der vollkommenen Elasticität ihres Materiales durch ihre Zusammenstösse keine Aenderung erleiden und die Schwere ihre Geschwindigkeiten auf der kurzen Strecke h nicht merklich beeinflusst, mit einer ihrer anfänglichen Geschwindigkeit gleichzusetzenden Geschwindigkeit in einem und demselben Momente die obere Platte, welche gleichzeitig der Wirkung der Schwere überlassen werden mag. Die gesammte Stosswirkung aller Elfenbeinkugeln sei nun eine derartige, dass die Platte nicht nur nicht herabsinkt, sondern sogar sammt dem auf ihr lastenden Gewichte — allerdings nur ausserordentlich wenig — emporgeschnellt werden mag.

Auf diese Art verfliesst eine bestimmte, wenngleich sehr kurze Zeit, bis die obere Platte in jene

Position zurückgekehrt ist, welche sie im Momente des ersten Zusammenstosses mit den Kugeln eingenommen hat. Gleichzeitig mögen nun die letzteren, indem sie einstweilen den Weg h hin und zurück durchlaufen haben, mit der Platte zum zweiten Male zusammenstossen und ihr hiebei denselben Antrieb ertheilen, welcher ihr erstes Emporsteigen veranlasst hat.

Es müssten sich dann die eben geschilderten Vorgänge wiederholen, und würde man die abwechselnden Hebungen und Senkungen der oberen Platte in Folge der ausserordentlichen Kleinheit dieser Schwankungen ebensowenig bemerken, als man im Stande wäre, die zwischen beiden Platten hin- und herfliegenden Kugeln wahrzunehmen, indem deren gemeinsame Geschwindigkeit vorausgesetztermassen ja fast ebenso gross ist, wie jene einer Pistolenkugel, die während ihrer Bewegung dem Auge gleichfalls unsichtbar bleibt.

Der äussere Erfolg des in Betracht gezogenen Bewegungsprocesses würde daher darin bestehen, dass die belastete Platte in scheinbar stabilem Gleichgewichte h Meter hoch über der unteren Platte schweben würde, das heisst die constante Druckwirkung ihrer Belastung würde durch die Wirkungen jener zahlreichen und gleichzeitig erfolgenden Stösse in analoger Weise wie durch den Gegendruck einer fixen Unterlage aufgehoben.

Indem nun die belastete Platte zu Beginn des Bewegungsprocesses h Meter hoch gehoben wurde, erscheint ein anfänglicher Arbeitsvorrath gegeben, der, sobald man die Belastung gegenüber dem Eigengewichte der Platte sehr gross gewählt hat, ohne merklichen Fehler mit dem Producte: $P \times h$ identificirt werden kann. Da ferner jede Elfenbeinkugel zu Beginn ihrer Bewegung eine und dieselbe Anfangsgeschwindigkeit — sie mag u heissen — erhielt, so besitzt der anfängliche Vorrath an lebendiger Kraft, wenn man die Masse jeder einzelnen Kugel mit m und die Anzahl aller Kugeln mit n bezeichnet, die Grösse: $n \times \frac{m}{2} \times u \times u$. Beide Vorräthe bleiben aber auch während der ganzen Dauer des Bewegungsprocesses dieselben, weil weder die Hubhöhe: h der belasteten Platte eine Verkleinerung erfährt, noch die lebendige Kraft einer einzigen Kugel — es sind ja sämmtliche Kugeln vollkommen elastisch — bei irgend einem Zusammenstosse verändert wird.

Auf diese Art liefert die Division von $P \times h$ durch $n \times \frac{m}{2} \times u \times u$, weil gemäss früheren Ergebnissen jede lebendige Kraft in eine bestimmte Anzahl von Kilogrammometern verwandelt werden kann, im vorliegenden Falle eine reine, das heisst unbenannte, constante Zahl — wir wollen sie etwa a nennen — womit die Gleichung:

$$P \times h : n \times \frac{m}{2} \times u \times u = a$$

oder:

$$P \times h = a \times n \times \frac{m}{2} \times u \times u$$

gewonnen ist.

Nach diesen Vorbereitungen lassen wir an die Stelle der Elfenbeinkugeln die Moleküle eines Gases treten, welches einen geraden, vertical stehenden Cylinder von der Höhe h und dem kreisförmigen Querschnitte F erfüllt und auf jede Flächeneinheit der den Cylinder begrenzenden Flächen von innen nach aussen einen derartigen Druck: p ausüben mag, dass speciell der auf die obere Querfläche: F vertical nach aufwärts wirksame Gasdruck: $F \times p$ dem vertical nach abwärts wirksamen äusseren Drucke: P — welcher beispielsweise für den Barometerstand von 760 Millimeter pro Quadratmeter 10333 Kilogramm beträgt — gleich bleibt.

Denken wir uns dann die obere Querfläche in demselben Sinne beweglich wie früher die belastete Elfenbeinplatte, so kann der dem äusseren Drucke: P gleiche Gegendruck: $F \times p$ augenscheinlich analog als Gesammtwirkung jener Stösse interpretirt werden, welche die geradlinig mit einer gemeinsamen mittleren Geschwindigkeit: u sich bewegenden Gasmoleküle auf F ausüben. Es ist also auch, wenn wir unter n nunmehr die Anzahl der in dem Cylinder eingeschlossenen Gasmoleküle, unter m die Masse jedes einzelnen Moleküls verstehen und a wieder als eine constante Zahl auffassen:

$$F \times p \times h = a \times n \times \frac{m}{2} \times u \times u,$$

oder, da $F \times h$ als das Product aus dem Querschnitte des Cylinders in dessen Höhe: h das Volumen: v des eingeschlossenen Gases repräsentirt:

$$p \times v = a \times n \times \frac{m}{2} \times u \times u.$$

Die vorstehende Gleichung, welche den merkwürdigen Zusammenhang zwischen der lebendigen Kraft der bewegten Gasmoleküle und dem Drucke des betreffenden Gases einfach und vollständig charakterisirt, [24]) gestattet übrigens noch zwei weitere wichtige Folgerungen, wenn wir sie mit jenem empirischen Gesetze combiniren, welches die in Celsiusgraden gemessene Temperatur: t des Gases mit dessen Druck und Volumen in Beziehung bringt.

Die Erfahrung lehrt nämlich, dass — unter b eine von p und v unabhängige, aus Beobachtungen ableitbare Zahl verstanden — die Summe: $273 + t$ durch: $b \times p \times v$ bestimmt erscheint, respective die Gleichung: [25])

$$273 + t = b \times p \times v$$

besteht. Dieselbe verwandelt sich, sobald wir für $p \times v$ den früher gefundenen Werth einsetzen, in:

$$273 + t = b \times a \times n \times \frac{m}{2} \times u \times u$$

und drückt daher aus, dass die Summe: $273 + t$ der gesammten lebendigen Kraft der Gasmoleküle: $n \times \frac{m}{2} \times u \times u$ direct proportional ist.

Hieraus folgt weiter, dass, wenn es gelänge, das betreffende Gas auf: — 273^0 Celsius abzukühlen, zugleich mit der Summe: $273 + t$ auch $n \times \frac{m}{2} \times u \times u$ verschwinden müsste. Da nun n als die Anzahl der Gasmoleküle und m als die Masse jedes einzelnen Moleküls unveränderliche Grössen sind, kann das letzterwähnte Product nur dadurch verschwinden, dass u, das heisst die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Moleküle bewegen, gleich Null wird. In diesem Sinne bestimmt die Temperatur: — 273^0 Celsius den absoluten Nullpunkt, bei welchem die Moleküle des betreffenden Körpers vollständig ruhen würden, respective jede Wärmebewegung aufgehört hätte.

Vermehrt man demgemäss die in Celsiusgraden ausgedrückte Temperatur irgend eines Körpers um 273, so liefert die so erhaltene neue Zahl direct dessen absolute Temperatur, welche — wenigstens für Gase — proportional der lebendigen Kraft der Gasmoleküle wächst und abnimmt, und insoferne ein natürliches Mass für die Intensität der jeweiligen Wärmebewegung vorstellt.

Nachdem wir hiemit auf elementarem Wege eine ziemlich befriedigende Einsicht in die Natur der Wärmeerscheinungen gewonnen haben, erscheint es im Hinblick auf das Thema der nächsten Vorlesung geboten, unsere, die moleculare Constitution der Körper betreffenden Auseinandersetzungen noch in gewissem Sinne zu ergänzen, wobei wir am zweckmässigsten von einem einfachen physikalischen Experimente ausgehen.

Sie sehen hier, hochgeehrte Anwesende, eine Luftpumpe, unter deren Glocke sich ein Läutewerk befindet, welches man von aussen nach Belieben in Gang bringen und wieder arretiren kann. Der oberste Theil der Glocke wird nämlich von einer dünnen, im letzten Viertel ihrer Länge seitlich ausgebogenen Messingstange durchsetzt, deren unteres Ende, ohne Luft in den Recipienten eintreten zu lassen, im Kreise herumbewegt werden kann, indem man den Knopf am oberen Ende der Messingstange dreht. In ihrer ursprünglichen Stellung verhindert die Messingstange das Ablaufen des Uhrwerkes; sobald jedoch ihr unteres Ende aus dem Räderwerke herausgedreht wird, kommt dasselbe in Rotation, und sind die vom Läutewerke hervorgebrachten Töne wohl an jeder Stelle des Saales deutlich zu hören. Diese Töne verlieren nun in dem Masse an Intensität, als die Luft im Recipienten durch Auspumpen verdünnt wird, und jetzt, nachdem der Luftdruck im Innern der Glocke, wie der Stand der mit dem Recipienten communicirenden Barometerprobe lehrt, auf zwei Millimeter gesunken ist, dürften nur noch die in nächster Nähe des Apparates sitzenden Zuhörer ein schwaches, von der Rotation der Räder herrührendes Geräusch vernehmen, welches durch die Unterlage des Läutewerkes, respective den Teller der Glocke nach aussen fortgepflanzt wird, während die Töne des Läutewerkes bereits unhörbar geworden sind.

Anderseits bleibt das Läutewerk selbst in gleicher Weise sichtbar wie bei Beginn des Versuches, welche Thatsache sich dahin interpretiren lässt, dass neben der wägbaren Materie, deren Verminderung im Innern der Glocke die Abschwächung der Töne des Läutewerkes nach sich zog, noch eine zweite Substanz existirt, welche aus dem Innern der Glocke durch Auspumpen nicht entfernt werden kann und es uns — gleichfalls durch die Fortpflanzung gewisser Schwingungen — möglich macht, das Läutewerk als solches nach wie vor zu sehen. Im Hinblick hierauf bezeichnet man diese Substanz kurzweg als Lichtäther und betrachtet deren Elemente als relativ sehr klein gegenüber jenen der wägbaren Materie.

Die genannte Substanz erfüllt aber nicht allein die Zwischenräume zwischen den Molekülen der irdischen Körper; sie muss auch die Räume zwischen den Himmelskörpern erfüllen, welche wir ohne ein vermittelndes Medium überhaupt nicht wahrnehmen könnten, und da uns durch den Weltraum hindurch, und zwar in erster Linie von der Sonne, ausser Lichtwirkungen auch Wärmewirkungen als sogenannte strahlende Wärme vermittelt werden, liegt die weitere Annahme nahe, dass der Lichtäther in gewissem Sinne auch Wärmebewegungen fortpflanzen kann.

Sobald wir aber neben der wägbaren Materie noch jene zweite Substanz annehmen, treten zu der bereits discutirten Frage, wie je zwei materielle Elemente aufeinander einwirken, die beiden weiteren Fragen hinzu, welche Wirkungen einerseits die Atome auf die Aethertheilchen, anderseits je zwei Aethertheilchen aufeinander ausüben.

Die erstere Frage beantwortet sich auf Grundlage der Vorstellung, dass der Aether auch die Zwischenräume zwischen den Elementen der wägbaren Materie erfülle, direct dahin, dass die Atome ihrerseits die Aethertheilchen anziehen und in Folge dessen rings um jedes Atom eine Verdichtung des Aethers stattfindet. Die letztere Frage erhält ihre Lösung durch die Discussion der Thatsache, dass jeder elastische feste Körper, dessen Theilchen durch Compression einander genähert wurden, falls die comprimirenden Kräfte eine bestimmte Grösse nicht überschritten haben, sich nachträglich wieder auf sein ursprüngliches Volumen ausdehnt. Man kann hieraus schliessen, dass bei Verkleinerung der Abstände der Moleküle des betreffenden Körpers abstossende Kräfte in Wirksamkeit treten, und kann die letzteren, nachdem die Wirkungen zwischen Materie und Materie und ebenso zwischen Materie und Aether bereits als Anziehungswirkungen charakterisirt worden sind, nur der Wechselwirkung je zweier Aethertheilchen zuschreiben.

Was ferner die Gesetze anbelangt, welche die neu eingeführten Anziehungs- und Abstossungskräfte beherrschen, so betrachtet man die letzteren gleichfalls als Functionen der Entfernungen der wirksamen Elemente in dem Sinne, dass die Wechselwirkungen je zweier Elemente bei fortgesetzter Annäherung derselben zwar qualitativ unverändert bleiben, dagegen hinsichtlich ihrer Intensität stetig zunehmen. Wenn also zum Beispiel zwei Gasmoleküle mit einander collidiren, so sind die abstossenden Kräfte ihrer Aetherhüllen im Momente ihres Zusammenstosses am grössten, wonach das Auseinanderprallen der Moleküle auch auf die Wirkung jener Abstossungen zurückgeführt werden kann.

Die eben entwickelte Ansicht von der Existenz zweier qualitativ verschiedener Kräftewirkungen, welche bei gegenseitiger Annäherung der betreffenden Theilchen nach im Uebrigen unbekannten Gesetzen wachsen, macht ihrerseits eine neue Untersuchung bezüglich der Giltigkeitsgrenzen jenes Princips nothwendig, welches wir vorläufig nur für Anziehungskräfte von einem bestimmten Typus präcisirt haben. — Das Resultat der in Frage stehenden Untersuchung, welche zuerst von Helmholtz vollständig durchgeführt worden ist, sich aber der Natur der Sache nach einer elementaren Darstellung entzieht, lehrt dann, dass das Princip von der Erhaltung der Kraft auf alle derartigen Kräftewirkungen [26]) Anwendung findet, wobei auch die früher gegebene Formulirung desselben im Wesentlichen unverändert bleibt.

Gemäss dem so verallgemeinerten Principe kann beispielsweise die Bewegung eines Körpers durch irgend ein widerstehendes Mittel, mögen sich nun die Elemente des letzteren gegenseitig anziehen oder abstossen, nur in der Weise erfolgen, dass die zur Ueberwindung des jeweiligen Widerstandes erforderliche mechanische Arbeitsleistung durch Umsatz eines äquivalenten Theiles jener lebendigen Kraft aufgebracht wird, welche der Körper vermöge seiner fortschreitenden und drehenden Bewegung besitzt. Es nehmen also die Geschwindigkeiten beider Bewegungen mit wachsender Zeit stetig ab, und wird der Körper, sobald seine ganze lebendige Kraft in dem hier präcisirten Sinne in Arbeit transformirt worden ist, vollständig *zum* Stillstande kommen, wobei sich die sichtbare Bewegung seiner ganzen Masse in unsichtbare Bewegungen kleinster Theilchen des Körpers und des Mediums verwandelt haben wird.

Dass alle sichtbaren irdischen Bewegungen unter den fortdauernden Einflüssen irgend welcher Widerstände, seien es nun Reibungswiderstände oder der Widerstand der Luft etc., vor sich gehen und in Folge dessen ohne entsprechende Zufuhr von lebendiger Kraft schliesslich aufhören, ist sattsam bekannt. Aber auch die Himmelskörper erfahren bei ihren Bewegungen in dem den Weltraum erfüllenden Lichtäther einen, wenngleich ausserordentlich geringen Widerstand, wie dies einerseits aus der Theilung des Biela'schen Kometen, anderseits aus den Aenderungen in den Umlaufszeiten des Encke'schen und Winnecke-schen Kometen hervorgeht. [27])

Hiezu tritt die weitere Erfahrungsthatsache, dass — selbst unter den günstigsten Bedingungen — immer nur ein aliquoter Theil der durch Vernichtung irgend einer sichtbaren Bewegung erzeugten Wärme in mechanische Arbeit, respective lebendige Kraft zurückverwandelt werden kann, woran sich der Inductionsschluss knüpft, dass eine fortwährende Transformation irdischer und kosmischer Bewegungen in Wärmebewegungen im weitesten Sinne des Wortes stattfindet, ohne dass gleichzeitig ein äquivalenter Umsatz von Wärme in sichtbare Bewegung erfolgt. Ist also die Summe sämmtlicher lebendiger Kräfte im Weltall eine endliche, so muss nach einer endlichen, wenn auch noch so langen Zeit ein Grenzzustand eintreten, in welchem alle fortschreitenden und drehenden Bewegungen der im Weltraum befindlichen Körper in Wärmebewegungen umgewandelt sein werden.

In diesem Sinne gilt Thomson's berühmtes Princip der Dissipation der Energie, und sei schliesslich noch hervorgehoben, dass schon die nächste Frage, warum, wenn der sichtbare Kosmos von Ewigkeit her besteht, der eben angedeutete Grenzzustand nicht bereits eingetreten ist, die Grenzen unserer Naturerkenntniss uns fühlbar macht.

IV. Elektricität und Magnetismus.

Wir betreten nunmehr ein Forschungsgebiet, welches, obzwar sich ihm in jüngster Zeit das Interesse, man kann wohl sagen aller Gebildeten zugewendet hat, mehr ungelöste Probleme enthält als irgend ein anderer Zweig der Physik. Ja selbst die fundamentale Frage, ob die elektrischen und magnetischen Erscheinungen den Wechselwirkungen zweier unwägbarer Substanzen, sogenannter Fluida, entspringen, oder aus gewissen Wechselwirkungen zwischen den Elementen der Materie und einer einzigen unwägbaren Substanz hervorgehen, deren Theilchen sich gegenseitig abstossen, kann bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft noch nicht definitiv entschieden werden.[28]) Anderseits ist es gelungen, durch Beobachtung des äusseren Verlaufes der genannten Erscheinungen wenigstens eine Reihe empirischer Gesetze festzustellen, welche von den über die Natur der Elektricität und des Magnetismus möglichen Hypothesen völlig unabhängig sind und insoferne sichere Ausgangspunkte für jede theoretische Untersuchung liefern.

Hiebei erscheinen natürlich sowohl die Auswahl der in Betracht zu ziehenden empirischen Gesetze, als auch die Form ihrer Interpretation in erster Linie durch den Zweck bestimmt, welchen die an dieselben zu knüpfenden theoretischen Erwägungen verfolgen, und müssen wir uns daher zunächst darüber klar werden, in welchem Sinne wir das Princip von der Erhaltung der Kraft für die in Frage stehenden Phänomene verwerthen können.

Die gewünschte Directive ist bereits in dem Entwicklungsgange unserer bisherigen Betrachtungen enthalten. — Sie erinnern sich, hochgeehrte Anwesende, dass das genannte Princip in Gestalt einer Gleichung seinen mathematisch präcisen Ausdruck findet. Diese

Gleichung vereinigt für gewisse Bewegungsprocesse die lebendigen Kräfte und den gleichzeitigen Arbeitsvorrath der wirksamen Elemente zu einer für alle Zeiten unveränderlichen Summe von endlicher Grösse, beruht aber selbst in ihrer allgemeinsten Fassung noch auf der Voraussetzung, dass die Wechselwirkungen zwischen je zwei Elementen als Anziehungs- oder Abstossungskräfte von einem ganz bestimmten Typus auftreten. Es dürfen nämlich die in Betracht kommenden Kräfte nur von den Entfernungen der wirksamen Massen und diesen selbst abhängen, das heisst je zwei Elemente üben, sobald sie im Laufe ihrer Bewegungen wieder in dieselbe Entfernung von einander gelangen, unabhängig von ihren etwaigen Geschwindigkeitsänderungen und der inzwischen verflossenen Zeit dieselbe Wirkung aufeinander aus.

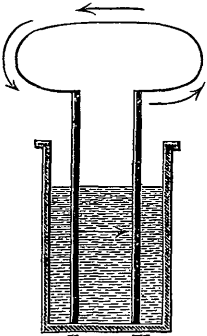
Wir waren demgemäss bei allen bisher mit dem Principe in Verbindung gebrachten Erscheinungen bemüht, dieselben vorerst auf Grundlage gewisser Erfahrungsthatsachen als Bewegungsprocesse zu charakterisiren, hierauf uns über die in Bewegung befindlichen Elemente eine Vorstellung zu bilden und schliesslich auch zu zeigen, dass sich die Wechselwirkungen der letzteren als Bewegungskräfte von der früher präcisirten Beschaffenheit interpretiren lassen.

Die Lösung dieser Aufgabe gelang am vollständigsten bezüglich der Gravitationserscheinungen, insoferne wir die hiebei in Frage kommenden Wirkungen durch

Ableitung des Newton'schen Attractionsgesetzes nicht allein qualitativ, sondern auch quantitativ genau bestimmen konnten, während wir uns bei der Discussion der Wärmeerscheinungen mit einer qualitativen Charakteristik der wirksamen Molecularkräfte begnügen mussten, welche ihrerseits eine Erweiterung der ursprünglichen Formulirung des Princips von der Erhaltung der Kraft nothwendig machte. Auf solche Art gestaltete sich die Entscheidung über die Anwendbarkeit des Princips im Allgemeinen schwieriger als dessen Anwendung, welche, wie schon unsere Auseinandersetzungen über das mechanische Aequivalent der Wärme gelehrt haben, selbst ohne Kenntniss der wirksamen Kräfte möglich wird, sobald nur einmal die betreffende Erscheinung mit Sicherheit als ein Bewegungsprocess charakterisirt werden kann und eine Verknüpfung desselben mit dem Begriffe: „Mechanische Arbeitsleistung" herstellbar ist. Der einfachste, bei dem Studium neuer, ihrem Wesen nach unbekannter physikalischer Vorgänge einzuschlagende Entwicklungsgang besteht mithin darin, das genannte Princip anfänglich nur als Hypothese einzuführen und, ausgehend vom Arbeitsbegriffe, eine Verwerthung desselben anzustreben.

Die vorstehenden Erwägungen bestimmen vollständig den Operationsplan für unsere gegenwärtigen Betrachtungen, welche sich zunächst auf eine Erscheinung beziehen, deren Auffassung als Bewegungsprocess bereits eine, ich möchte sagen allgemein übliche [29]) geworden ist und in der Bezeichnung: „Galvanischer Strom“ auch sprachlich zum Ausdrucke gelangt. Ein solcher entsteht beispielsweise (siehe die schematische Fig. 7) nach Einsenkung einer Zink- und einer Kupferplatte, welche durch einen sogenannten Schliessungsdraht leitend mit einander verbunden sind, in ein, verdünnte Schwefelsäure enthaltendes Glasgefäss, und muss selbstverständlicher Weise vor Allem die Frage discutirt werden, was sich bewegt?

Fig. 7.



Z K

Ihre hypothetische Beantwortung fällt unter den früher entwickelten Gesichtspunkten nicht schwer, wenn wir hiebei die bekannten Erfahrungsthatsachen verwerthen, dass der Schliessungsdraht nach Einsenkung des Plattenpaares in die Flüssigkeit sich stets erwärmt, und dass die Erwärmung um so bedeutender wird, je kleiner der Querschnitt des Schliessungsdrahtes ist.

Gemäss der im letzten Vortrage dargelegten Auffassungsweise von Wärmeerscheinungen betrachten wir vorerst die Erwärmung des Schliessungsdrahtes — ganz abgesehen von ihrer veranlassenden Ursache — nur als den äusseren Ausdruck für die Steigerung eines molecularen Bewegungsprocesses, und zwar gewisser Schwingungen der Moleküle des Drahtes. Es liegt dann nahe, diese Steigerung ihrer Oscillationen aus einer Bewegung des die Räume zwischen den Molekülen erfüllenden Aethers herzuleiten und die letztere im Einklange mit der seinerzeit motivirten Vorstellung, dass die Aethertheilchen im Verhältnisse zu den Atomen sehr klein und ungemein leicht verschiebbar seien, als Bewegung einer Flüssigkeit zu interpretiren, welche ein von der Oberfläche des jeweiligen Leiters begrenztes Gebiet in einem bestimmten Sinne durchströmt.

Behufs einer näheren Erläuterung dieser Hypothese fassen wir irgend einen Flüssigkeitsstrom, etwa einen Wasserstrom ins Auge, welcher sich in einem zahlreiche grosse Geschiebe enthaltenden Bette bewegt, dessen Querschnitt nicht in allen Theilen des Stromlaufes derselbe bleibt. Die an jene Geschiebe anprallenden Wassertheilchen werden dann trotz ihrer Kleinheit und leichten Verschiebbarkeit im Stande sein, die ersteren in Bewegung zu setzen, sobald nur die Strömung genügend stark, beziehungsweise das Gefälle des Stromes hinlänglich gross ist. Da ferner, wenn sich der Strom in seiner ganzen Ausdehnung im Beharrungszustande befindet, das heisst weder steigt, noch sinkt, durch jeden Querschnitt seines Bettes in einer und derselben Zeit gleiche Quantitäten Wasser fliessen müssen, wird die Strömung dort reissender sein, wo der Querschnitt des Strombettes sich verkleinert, dagegen sich verlangsamen, wo dessen Querfläche grösser wird, wonach auch der auf die Geschiebe geäusserte Bewegungsantrieb mit abnehmendem Stromquerschnitte zunehmen muss.

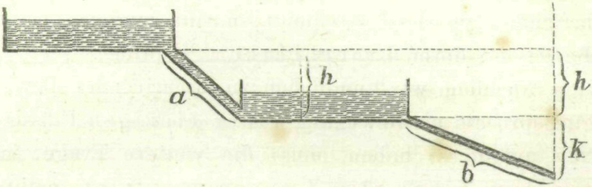
Die Nutzanwendung des eben Gesagten auf die Wirkungen des hypothetisch eingeführten Aetherstromes beruht jetzt auf einem einfachen Analogieschlusse; [30]) an die Stelle der Geschiebe treten hiebei die gegenüber den Aethertheilchen sehr grossen Moleküle des betreffenden Stromleiters, und es ist einleuchtend, dass speciell die zweite früher hervorgehobene Thatsache der mit abnehmendem Querschnitte zunehmenden Erwärmung des Schliessungsdrahtes nunmehr als eine nothwendige Folgerung der zugelassenen Hypothese erscheint, mithin zugleich einen Beweis für deren Brauchbarkeit [31]) bildet.

Nachdem wir hiemit den zu discutirenden Bewegungsprocess als Bewegung einer einzigen Flüssigkeit aufgefasst haben, muss die weitere Frage, in welchem Sinne ihre Bewegung erfolgt, natürlich gleichfalls im Anschlusse [32]) an jene Hypothese beantwortet werden, welche sich zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen eines einzigen Fluidums bedient. Wir betrachten demgemäss den galvanischen Strom als einen Bewegungsprocess, welcher — entsprechend den in Fig. 7 eingezeichneten Pfeilen — im Schliessungsdrahte vom Kupfer K zum Zink Z, in der verdünnten Schwefelsäure vom Zink zum Kupfer fortschreitet.

Die dritte noch zu erledigende Frage betrifft die Bestimmungsstücke, von welchen die Intensität eines galvanischen Stromes abhängt, und kann gleichfalls auf Grundlage der zuvor verwertheten Analogie zwischen galvanischen Strömen und Wasserströmen elementar discutirt werden, wobei wir am zweckmässigsten von der Erörterung des nachstehenden idealen Bewegungsprocesses ausgehen:

Aus einem prismatischen Gefässe von sehr bedeutender, horizontal aufruhender Bodenfläche (siehe die nebenstehende schematische Figur 8, in welcher die Dimensionen des Gefässes in Folge der geringen Text-

Fig. 8.



breite allerdings nicht proportional dargestellt werden konnten) ströme Wasser durch eine cylindrische Ansatzröhre von der Länge a und dem Querschnitte q_1 in ein zweites Gefäss von derselben Gestalt und gleichem inneren Volumen, dessen Bodenfläche parallel zu jener des ersten Gefässes, aber um h Meter tiefer gelegen sein mag. Auch das zweite Gefäss sei mit einer cylindrischen, schräg nach abwärts gerichteten Ansatzröhre versehen, deren Länge wir mit b, deren Querschnitt wir mit q_2 bezeichnen wollen, [33]) und mag die Niveaudifferenz zwischen dem Ende der zweiten Röhre und der Bodenfläche des zweiten Gefässes k Meter betragen.

Wir nehmen ausserdem an, dass die zweite Röhre so lange geschlossen bleibt, bis sich das tiefer befindliche Gefäss ebenso hoch mit Wasser gefüllt hat wie das erste, und dass hierauf durch passende Regelung des weiteren Zuflusses das in jeder Secunde aus dem letzten Querschnitte der zweiten Röhre ausströmende Wasserquantum durch ein gleich grosses, dem ersten Gefässe zuströmendes Wasserquantum ersetzt wird, mithin ein Beharrungszustand eintritt, in welchem durch jeden Querschnitt der ersten wie der zweiten Röhre in der Zeiteinheit ein gleiches Wasserquantum Q abfliesst. Hiebei mag übrigens der Wasserspiegel in beiden Gefässen so niedrig stehen, dass wir die Niveaudifferenz zwischen ihm und der Bodenfläche des betreffenden Gefässes gegenüber den Niveaudifferenzen h und k gar nicht in Rechnung zu ziehen brauchen.

Um endlich auch im vorliegenden Falle analoge Hindernisse zu schaffen, wie solche bei der Bewegung des zuerst in Betracht gezogenen Flüssigkeitsstromes vorausgesetzt wurden, wollen wir die Innenwände beider Röhren so rauh annehmen, dass sich das Wasser bei horizontaler Lage derselben in dem Masse langsamer bewegen müsste, als es weiter in ihnen vordringen würde. Anderseits entströmt Wasser, welches aus irgend einem Reservoir tiefer gelegenen Orten zugeführt wird, dem Ende der Leitung bekanntlich desto heftiger, je bedeutender die Niveaudifferenz zwischen dem letzteren und dem Wasserspiegel im Reservoir ausfällt. Es stellt also zunächst jene Geschwindigkeit: v_1, welche sämmtlichen Wassertheilchen beim Austritte aus der ersten Röhre zukommt, eine Grösse vor, welche zugleich mit der Niveaudifferenz: h zunimmt, dagegen für eine und dieselbe Niveaudifferenz mit wachsender Röhrenlänge a abnimmt. Die einfachste mathematische Präcisirung der angeführten Eigenschaften von v_1 besteht dann darin, dass wir v_1 der Niveaudifferenz: h gerade, der Länge: a verkehrt proportional setzen, folglich nach Einführung einer einstweilen noch unbestimmt bleibenden Erfahrungszahl: α die Gleichung:

$$v_1 = \frac{\alpha \times h}{a}$$

aufstellen. Dieselben Erwägungen gelten natürlich auch für die Endgeschwindigkeit: v_2, mit welcher das Wasser die zweite Röhre verlässt; nur treten an die Stelle von h und a nunmehr die Grössen k und b, und wird die Erfahrungszahl α im Allgemeinen mit einer neuen Erfahrungszahl: β zu vertauschen sein, indem ja die Innenwände beider Röhren, falls sie aus verschiedenem Materiale bestehen, sogar einer und derselben sich bewegenden Flüssigkeit specifisch verschiedene Reibungswiderstände entgegensetzen können. Auf solche Art resultirt die der früheren völlig analoge Gleichung:

$$v_2 = \frac{\beta \times k}{b}.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit v_2 bleibt hienach ebenso wie v_1 so lange unverändert, als die Niveaudifferenzen h und k durch passende Regelung des Zuflusses constant erhalten werden, so dass für jeden solchen Beharrungszustand zwischen beiden Geschwindigkeiten und dem in jeder Secunde ausströmenden, sich gleichbleibenden Wasserquantum Q zwei sehr einfache Beziehungen stattfinden.

Um dieselben kennen zu lernen, denken wir uns an die zweite Röhre zu irgend einer Zeit ein cylindrisches Gefäss von congruentem Querschnitte: q_2 angesetzt, und, um die eintretenden Wassertheilchen zusammenzuhalten, mit einem luftdicht schliessenden, aber vollkommen leicht verschiebbaren Stempel versehen, welchen die Wassertheilchen im Momente des Abprallens mit der Geschwindigkeit v_2 vor sich hertreiben. Der Stempel wird daher eine Secunde später um v_2 Meter vorgerückt, d. h. inzwischen ein Flüssigkeitscylinder von der Länge v_2 und dem Querschnitte q_2 eingetreten sein, dessen Volumen, da in einer strömenden Flüssigkeit erfahrungsgemäss nirgends Hohlräume entstehen, zugleich das in derselben Zeit aus der zweiten Röhre ausgetretene Wasserquantum: Q bestimmt. So ergibt sich unter Anwendung des bekannten Satzes, dass der Kubikinhalt jedes geraden Cylinders durch Multiplication seines Querschnittes mit seiner Axenlänge gefunden wird, bezüglich v_2 die Gleichung:

$$q_2 \times v_2 = Q,$$

und analog für die Geschwindigkeit v_1 die Beziehung:

$$q_1 \times v_1 = Q,$$

wonach die Division von Q durch q_1, respective q_2 ebenfalls die fraglichen Geschwindigkeiten liefert. Die diese Folgerung präcisirenden Formeln:

$$v_1 = \frac{Q}{q_1}, \quad v_2 = \frac{Q}{q_2}$$

bedingen in ihrer Vereinigung mit den ursprünglich für v_1, v_2 gegebenen Ausdrücken die weiteren Gleichungen:

$$\frac{\alpha \times h}{a} = \frac{Q}{q_1}, \quad \frac{\beta \times k}{b} = \frac{Q}{q_2},$$

welche ihrerseits die keiner Erläuterung bedürftigen Umformungen:

$$\alpha \times h = a \times \frac{Q}{q_1}, \; h = \frac{a}{\alpha} \times \frac{Q}{q_1} = \frac{a}{\alpha \times q_1} \times Q,$$

$$\beta \times k = b \times \frac{Q}{q_2}, \; k = \frac{b}{\beta} \times \frac{Q}{q_2} = \frac{b}{\beta \times q_2} \times Q$$

gestatten und die beiden Quotienten:

$$\frac{h}{Q} = \frac{a}{\alpha \times q_1}, \quad \frac{k}{Q} = \frac{b}{\beta \times q_2}$$

unmittelbar mit den Dimensionen der durchströmten Röhren und den Erfahrungszahlen α, β in Zusammenhang bringen. Diesen Quotienten lässt sich übrigens noch ein dritter zuordnen, dessen Dividend durch die Niveaudifferenz zwischen dem Wasserspiegel im ersten Gefässe und dem Ende der zweiten Röhre, dessen Divisor durch das Ausflussquantum Q gebildet wird. Hiebei entspricht die in Betracht gezogene Niveaudifferenz — wir wollen sie H nennen — da die Wasser-höhen in beiden Gefässen vorausgesetztermassen sehr klein sind, ohne merklichen Fehler (vergleiche die schematische Figur 8) der Summe: $h + k$, während anderseits für die Summe der beiden Quotienten: $\frac{h}{Q}$, $\frac{k}{Q}$ gemäss unseren letzten Resultaten die Gleichung:

$$\frac{h}{Q} + \frac{k}{Q} = \frac{a}{\alpha \times q_1} + \frac{b}{\beta \times q_2}$$

gilt. Nun werden aber bekanntlich Brüche mit gleichen Nennern addirt, indem man ihre Zähler addirt und den gemeinschaftlichen Nenner beibehält. Es ist also gleichzeitig:

$$\frac{h}{Q} + \frac{k}{Q} = \frac{h + k}{Q} = \frac{H}{Q}$$

womit nunmehr die wichtige Formel:

$$\frac{H}{Q} = \frac{a}{\alpha \times q_1} + \frac{b}{\beta \times q_2}$$

gewonnen erscheint. Ihre physikalische Interpretation erheischt vor Allem eine solche der beiden rechter Hand stehenden Quotienten, die durch folgende einfache Ueberlegungen vermittelt wird:

Indem das Wasser die erste Röhre durchströmt, überwindet es in seiner Bewegung längs der rauhen Innenwände der Röhre gewisse Widerstände, deren Gesammtsumme natürlich mit wachsender Röhrenlänge zunimmt, anderseits aber mit wachsendem Querschnitte der Röhre insoferne abnehmen müsste, als die Wassertheilchen dann in Folge ihrer kleineren Geschwindigkeiten auf die ihre Wege verlegenden Hindernisse schwächer aufprallen, dieselben also auch mit geringeren Geschwindigkeitsverlusten umfliessen würden. Auf diese Art wird der Gesammtwiderstand: w_1, welchen die strömende Flüssigkeit in der ersten Röhre zu überwinden hat, im denkbar einfachsten Falle ihrer Länge: a gerade, ihrem Querschnitte: q_1 verkehrt proportionirt sein, d. h. — unter γ wieder eine Erfahrungszahl verstanden — durch die Gleichung:

$$w_1 = \gamma \times \frac{a}{q_1}$$

charakterisirt werden können. Bezüglich des Gesammtwiderstandes: w_2 in der zweiten Röhre treten offenbar dieselben Schlüsse in Kraft; nur wird die Erfahrungszahl: γ hiebei, falls die Röhren aus verschiedenem Materiale bestehen, durch eine andere Erfahrungszahl: δ zu ersetzen sein, welche Bemerkungen die nachstehende Darstellungsweise von w_2 motiviren:

$$w_2 = \delta \times \frac{b}{q_2}.$$

Dividiren wir nun unter Anwendung der bekannten Regel, nach welcher eine Zahlengrösse durch einen Bruch dividirt wird, indem man dieselbe durch dessen Zähler dividirt und mit dessen Nenner multiplicirt, die Werthe von w_1 und w_2 durch jene der beiden Quotienten: $\frac{h}{Q}$, $\frac{k}{Q}$, so reduciren sich die erhaltenen Resultate:

$$w_1 : \frac{h}{Q} = \frac{\gamma}{a} \times \frac{a}{q_1} \times \alpha \times q_1$$

$$w_2 : \frac{k}{Q} = \frac{\delta}{b} \times \frac{b}{q_2} \times \beta \times q_2$$

da die Nenner: $a \times q_1$, respective $b \times q_2$ zugleich Factoren ihrer Zähler:

$$\gamma \times \alpha \times a \times q_1, \ \delta \times \beta \times b \times q_2$$

bilden, auf $\gamma \times \alpha$, beziehungsweise $\delta \times \beta$, d. h. es führt die Division von w_1 durch $\frac{h}{Q}$ ebenso wie jene von w_2 durch $\frac{k}{Q}$ auf ein Product zweier reiner, constanter Zahlen.

Hieraus geht hervor, dass die den Quotienten: $\frac{h}{Q}, \frac{k}{Q}$ äquivalenten Grössen:

$$\frac{a}{\alpha \times q_1}, \ \frac{b}{\beta \times q_2}$$

sich auf dieselben Masseinheiten wie w_1, w_2 beziehen lassen und daher ebenfalls die Bedeutung von Widerständen besitzen. Dasselbe gilt selbstverständlicher Weise auch von ihrer Summe:

$$\frac{a}{\alpha \times q_1} + \frac{b}{\beta \times q_2},$$

wonach die für $\frac{H}{Q}$ gewonnene Formel, wie folgt, physikalisch zu interpretiren ist:

So lange Zufluss und Abfluss einander das Gleichgewicht halten, steht das in jeder Secunde einen beliebigen Querschnitt der Röhrenleitung passirende Wasserquantum in einer unveränderlichen Beziehung zu zwei Grössen, nämlich zu der Niveaudifferenz zwischen dem Wasserspiegel im ersten Reservoir und dem Ende der Leitung, ferner zu dem gesammten Widerstande, welchen das Wasser bei seiner Bewegung durch beide Röhren überwinden muss.

Nun kann bekanntlich die Mächtigkeit jedes Wasserstromes nach jenem Wasserquantum beurtheilt werden, welches irgend einen Querschnitt des Strombettes in einer bestimmten Zeit, beispielsweise in der Zeiteinheit, passirt, so dass die eben interpretirte Formel zugleich die durch Q messbare Intensität des Wasserstromes mit der Niveaudifferenz: H und dem Gesammtwiderstande der Leitung verknüpft. Definiren wir daher in weiterer Verwerthung der Analogie zwischen Wasserströmen und galvanischen Strömen die Intensität eines galvanischen Stromes als die in der Zeiteinheit durch irgend einen Querschnitt des Stromleiters fliessende Elektricitätsmenge, so wird, falls die in solcher Form bestimmte Stromintensität in allen Theilen der Leitung dieselbe ist, auch die Intensität des galvanischen Stromes zu zwei Grössen in eine unveränderliche Beziehung treten, von welchen die eine der Niveaudifferenz: H, die andere dem Gesammtwiderstande der Leitung correspondiren muss.

Die vorstehenden Betrachtungen erledigen die dritte, hinsichtlich des galvanischen Stromes aufgeworfene Frage erst qualitativ; um dieselbe auch in quantitativer Hinsicht zu beantworten, müssen nunmehr die mit einander zu verknüpfenden Grössen als messbare Grössen präcisirt werden, wobei noch experimentell festzustellen ist, ob die Intensität eines galvanischen Stromes wirklich in allen Theilen der Leitung, respective des sogenannten Stromkreises dieselbe bleibt, denn wäre dies nicht der Fall, so würden unsere auf einen Wasserstrom von unveränderlicher Intensität bezüglichen Resultate für das weitere Studium des zu discutirenden Bewegungsprocesses gegenstandslos sein.

Es erscheint demnach geboten, ausser den früher besprochenen Wärmewirkungen des galvanischen Stromes noch eine andere Wirkung desselben in Betracht zu ziehen, welche einer directen Messung zugänglich ist und zugleich einen Rückschluss auf die Intensität des Stromes gestattet, nämlich die Ablenkung einer in den Bereich des jeweiligen Stromkreises gebrachten Magnetnadel. Aber ehe wir elektrische und magnetische Erscheinungen causal mit einander verknüpfen können, muss selbstverständlicher Weise die Vorfrage beantwortet werden, unter welchen Gesichtspunkten der empirisch feststehende Zusammenhang zwischen beiden Erscheinungsreihen eine derartige Verknüpfungsweise ermöglicht?

Zu diesem Zwecke sei zunächst an einige wesentliche Merkmale des magnetischen Zustandes erinnert, die an jedem Magnete zu Tage treten und daher zu den allgemein geläufigen Phänomenen gehören.

Sie wissen, hochgeehrte Anwesende, dass ein Magnet — wir denken uns denselben der Einfachheit wegen als einen cylindrischen Stahlstab von kreisförmigem Querschnitt — falls er um eine verticale, die Verbindungslinie seiner Pole senkrecht durchsetzende Axe frei drehbar ist, eine charakteristische Gleichgewichtslage annimmt, wobei er mit dem Nordpole nach Norden, mit dem Südpole nach Süden weist, und welche er bei etwaigen Verschiebungen nach einer kleineren oder grösseren Anzahl von Oscillationen stets wieder gewinnt. Es ist ferner bekannt, dass, wenn man einen Magnet halbirt, jede Hälfte abermals in zwei gleiche Theile zerlegt und die Theilung hierauf noch weiter bis zu einer beliebigen Grenze fortsetzt, alle in solcher Weise erhaltenen Bruchstücke vollständige Magnete vorstellen, respective dass jedes derselben gleichfalls seinen Nord- und Südpol besitzt und, um eine verticale Axe frei drehbar angebracht, die Verbindungslinie seiner Pole zu derselben Richtung im Raume parallel stellt wie der ursprüngliche Magnet.

Denken wir uns jetzt, um die hier geschilderten Erscheinungen möglichst einfach zu interpretiren, einen cylindrischen Stab, der aus zwei materiell von einander verschiedenen Hälften besteht. Die eine Hälfte sei aus Elfenbein, die andere aus einer Holzart, deren specifisches Gewicht um ebensoviel gegen jenes des Wassers zurücksteht, als das specifische Gewicht des

Elfenbeins das letztere übertrifft.[34]) Würden wir einen derartigen Stab in ein mit Wasser gefülltes Gefäss einsenken, so müsste derselbe, da sein mittleres specifisches Gewicht mit jenem des Wassers übereinstimmt, in jeder Tiefe unter dem Wasserspiegel eine Gleichgewichtslage besitzen, hiebei aber eine ganz bestimmte Stellung zeigen. Es würde nämlich die specifisch schwerere Stabhälfte, also die Elfenbeinhälfte, nach abwärts, die Holzhälfte nach aufwärts weisen, und würde der Stab im Wasser irgendwie gedreht, so müsste er nach einigen Schwingungen stets wieder in seine anfängliche Gleichgewichtslage zurückkehren. Ein solcher Stab verhielte sich mithin in gewissem Sinne ebenso wie der zuvor beschriebene Magnet; nur wäre die unveränderliche Richtung, zu welcher sich die Stabaxe unter allen Umständen parallel stellt, hier durch die Richtung der Schwerkraft bestimmt, während die Gleichgewichtslage beim Magnet bekanntlich durch die Richtung des magnetischen Meridians präcisirt erscheint.

Wir wollen nunmehr in der Ausbildung unserer Analogie noch weiter gehen, indem wir uns ausserordentlich viele, dabei aber ungemein kleine Stäbchen, von welchen jedes zur Hälfte aus Holz, zur Hälfte aus Elfenbein besteht, durch einen starren Kitt von dem specifischen Gewichte des Wassers zu einem einzigen cylindrischen Stabe derart verbunden denken, dass alle Elfenbeinhälften nach der einen, folglich alle Holzhälften nach der entgegengesetzten Seite gerichtet sind.

Es würde dann auch jedes Bruchstück eines solchen Stabes ein gleiches Verhalten zeigen wie dieser selbst. Dagegen bliebe der ins Wasser versenkte Stab in jeder beliebigen Stellung im Gleichgewichte, wenn wir die Stäbchen ohne jede bestimmte Orientirung regellos zu einem Ganzen vereinigt hätten, und liesse sich aus seinem indifferenten Zustande nur dadurch in den früher betrachteten überführen, dass man den Kitt auf irgend eine Art verflüssigen, also in Bewegung setzen würde, in welchem Falle jedes Stäbchen kraft der über das specifische Gewicht des Kittes gemachten Voraussetzung sofort seine Holzhälfte nach aufwärts, seine Elfenbeinhälfte nach abwärts kehren müsste.

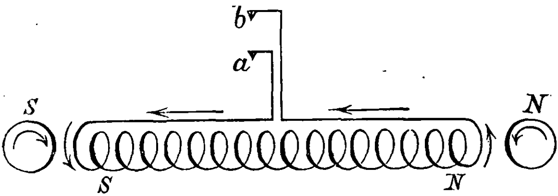
Im Hinblick hierauf liegt die Annahme nahe, dass die Moleküle jedes magnetisirbaren Körpers schon an und für sich lauter vollständige Magnete vorstellen, welche im unmagnetischen Zustande nach allen möglichen Richtungen orientirt sind, während beim Uebergange in den magnetischen Zustand die Nordpole aller dieser sogenannten Elementarmagnete nach der einen, mithin deren Südpole nach der entgegengesetzten Seite gerichtet werden.

Gleichwie ferner, um den indifferenten Zustand des Stäbchencomplexes zu beheben, der die einzelnen Stäbchen umgebende Kitt in Bewegung gesetzt werden musste, wird der Uebergang eines magnetisirbaren Molekülcomplexes aus dem unmagnetischen in den magnetischen Zustand von dem hier entwickelten Standpunkte aus eine Bewegung des die Moleküle umgebenden Aethers zur Vorbedingung haben müssen.

Die weitere Frage, was für eine Aetherbewegung hiebei in Betracht kommt, erheischt zu ihrer Beantwortung eine Reihe von Experimenten, [35]) die im Folgenden kurz beschrieben werden mögen:

1. Unterstützt man die Metallspitzen: *a*, *b* eines Solenoids, das heisst einer aus Kupferdraht bestehenden Spirale von der in Figur 9 schematisch dargestellten

Fig. 9.



Form derart, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte sämmtlicher Drahtwindungen, die sogenannte Axe des Solenoids, in einer horizontalen Ebene mit sehr geringer Reibung drehbar wird, und gleichzeitig ein galvanischer Strom die Windungen der Drahtspirale — etwa im Sinne der in die Figur eingezeichneten Pfeile — durchfliessen kann, so stellt sich das Solenoid mit seiner Axe nach Schliessung des Stromes stets parallel zur Richtung des magnetischen Meridians und kehrt, aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht, nach einigen Oscillationen wieder in dieselbe zurück.

Aber auch die beiden Endquerschnitte der Drahtspirale erhalten hiebei insoferne eine charakteristische Stellung, als jener Querschnitt, welchen der Strom im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers umfliesst, immer nach Süden, der andere Querschnitt, welchen der Strom im entgegengesetzten Sinne umkreist, nach Norden gewendet ist, wonach jedes Solenoid, so lange es von einem Strome durchflossen wird, wie ein Magnet seinen Nordpol und seinen Südpol besitzt.

2. Nähert man einem solchen Solenoide ein zweites, in derselben Weise drehbares und von einem Strome durchflossenes Solenoid derart, dass zwei gleichnamige Pole (Nordpol — Nordpol, Südpol — Südpol) einander benachbart werden, so stossen die genannten Pole sich gegenseitig ab, während die ungleichnamigen Pole beider Solenoide (Nordpol — Südpol, Südpol — Nordpol) einander anziehen.

3. Gleiche Abstossungen und Anziehungen bestehen, falls man eines der beiden Solenoide durch einen cylindrischen, drehbaren Magnetstab ersetzt, zwischen den gleichnamigen und ungleichnamigen Polen des Solenoids und Magnets, wobei die Qualität dieser Wirkungen von den Dimensionen des letzteren völlig unabhängig bleibt.

4. Ebenso stossen sich die gleichnamigen Pole zweier cylindrischer Magnetstäbe, deren Axen in einer horizontalen Ebene frei drehbar sind, einander genähert, gegenseitig ab, während die ungleichnamigen Pole beider Magnete sich anziehen.

Hienach ist es möglich, für die Beurtheilung der Wechselwirkungen von Solenoiden und Magneten, beziehungsweise von Magneten und Magneten einen gemeinsamen Standpunkt zu gewinnen, sobald man sich die hier in Betracht gezogenen cylindrischen Magnetstäbe von Strömen durchflossen denkt, welche deren Pole in demselben Sinne umkreisen, wie der Solenoidstrom die Pole des Solenoids umfliesst.

Fig. 10 *A*.

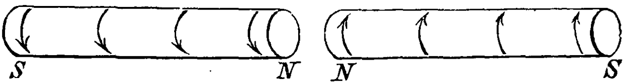
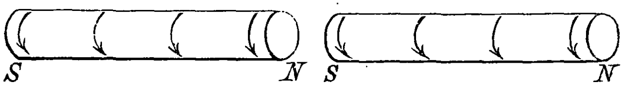


Fig. 10 *B*.



Wir können dann die Abstossung zweier einander gegenüberstehender gleichnamiger Magnetpole (siehe Fig. 10 *A*) ebenso wie jene zweier gleichnamiger, in derselben Position befindlichen Solenoidpole als Abstossung von elektrischen Strömen interpretiren, welche die wirksamen Pole im entgegengesetzten Sinne, aber parallel zu einer und derselben Ebene umfliessen, während sich die Anziehung zweier einander gegenüberstehender ungleichnamiger Magnetpole (siehe Fig. 10 *B*) gleichwie jene zweier ungleichnamiger, in derselben Position befindlicher Solenoidpole auf die Anziehung solcher elektrischer Ströme zurückführen lässt, welche die wirksamen Pole in demselben Sinne parallel zu einer und derselben Ebene umkreisen. Da ferner zwei Magnete, respective zwei Solenoide, deren ungleichnamige Pole einander nahe gegenüberliegen, bei Drehung ihrer Axen einander nach einigen Oscillationen immer wieder ungleichnamige Pole zukehren, werden wir geschlossenen, kreisförmig verlaufenden Strömen, deren Bahnebenen irgend einen Winkel mit einander bilden, das Bestreben zuzuschreiben haben, sich, falls sie frei beweglich sind, parallel derselben Ebene und gleichgerichtet zu stellen. [36])

Indem wir schliesslich die Thatsache, dass die Qualität der Wechselwirkungen von Solenoiden auf Magnete von deren Dimensionen unabhängig ist, mit der früher motivirten Auffassungsweise jedes Magnets als eines Systems magnetischer Moleküle combiniren, müssen wir den letzteren geschlossene elektrische Ströme in demselben Sinne wie den zuvor betrachteten Magnetstäben zuordnen, womit die Frage nach jener Art der Aetherbewegung, welche den Uebergang jedes magnetisirbaren Körpers aus dem unmagnetischen in den magnetischen Zustand ermöglicht, ihre Beantwortung gefunden hat.

Die vorstehenden Betrachtungen berechtigen uns überdies, elektrische und magnetische Erscheinungen in das Verhältniss von Ursache und Wirkung zu bringen, welcher Verknüpfungsweise wir uns hier speciell hinsichtlich der Ablenkung einer Magnetnadel durch einen galvanischen Strom bedienen wollen.

Das Phänomen selbst [37]) ist auf Grundlage unserer letzten Auseinandersetzungen leicht zu erläutern. Zu diesem Zwecke denken wir uns der Einfachheit wegen den Schliessungsdraht des betreffenden galvanischen Stromes kreisförmig gebogen und die Ebene dieses Kreises parallel zur Richtung des magnetischen Meridians vertical aufgestellt, so dass eine im Kreisscheitel angebrachte, in einer horizontalen Ebene drehbare Magnetnadel, ehe der Strom circulirt, die Verbindungslinie ihrer Pole vollständig in die Kreisebene einstellt. Es werden dann die Ebenen der die Moleküle umkreisenden Ströme mit der letzteren lauter rechte Winkel bilden, wonach in dem Momente, wo der Strom im Drahte circulirt, durch das Bestreben der Magnetströme, sich zur Ebene des Stromkreises parallel und gleichgerichtet zu stellen, eine Ablenkung der Nadel herbeigeführt werden muss.

Da nun diese Ablenkung dem Gesagten zufolge als unmittelbare Wirkung des im Drahte circulirenden Stromes aufgefasst werden darf, ermöglicht sie auch einen Rückschluss auf die Intensität des letzteren, welche für um so bedeutender angesehen wird, je stärker die beobachtete Ablenkung ist. Man schliesst daher zunächst aus der Thatsache, dass die Ablenkung einer und derselben Magnetnadel in den verschiedenen Theilen des Schliessungsdrahtes eines galvanischen

Stromes sich gleich bleibt, auf Gleichheit der Stromintensität in allen Querschnitten der Leitung, und ist ferner im Stande, die Intensitäten verschiedener Ströme mittelst der ihnen zugehörigen Ablenkungen einer und derselben Magnetnadel messend zu vergleichen, also nach Feststellung der Intensität eines bestimmten Stromes als Einheit durch Zahlen auszudrücken.

Die Erfahrung lehrt ausserdem, dass jede Verlängerung des Schliessungsdrahtes eines und desselben Stromes die Ablenkung der Magnetnadel verkleinert, mithin die Stromintensität herabsetzt, woraus vorerst das Vorhandensein eines Leitungswiderstandes für den galvanischen Strom zu entnehmen ist. Aber auch für die jeweilige Grösse dieses Leitungswiderstandes sind nach Annahme einer bestimmten Widerstandseinheit durch zahlreiche Experimente einfache und allgemeine Gesetze empirisch festgestellt worden, gemäss welchen die erstere von Fall zu Fall gefunden wird, indem man die Länge des betreffenden (festen oder flüssigen) Leiters durch das Product einer von dessen materieller Beschaffenheit abhängigen Erfahrungszahl (seiner sogenannten specifischen Leitungsfähigkeit) in dessen Querschnitt dividirt. Verstehen wir also jetzt, zu dem ursprünglich in Betracht gezogenen Volta'schen Elemente zurückkehrend, unter a den Abstand beider Platten, unter q_1 die einander gleichen Flächen derselben, so weit sie in die verdünnte Schwefelsäure eingetaucht sind, und bezeichnen deren specifische Leitungsfähigkeit mit α, so erscheint jener Widerstand: w_1, welchen der Strom im Elemente selbst zu überwinden hat, erfahrungsgemäss durch die Gleichung:

$$w_1 = \frac{a}{\alpha \times q_1}$$

bestimmt. Ebenso gilt für den Widerstand w_2 des Schliessungsdrahtes, wenn wir dessen Länge, Querschnitt und specifische Leitungsfähigkeit der Reihe nach mit b, q_2, β bezeichnen, die einfache Formel:

$$w_2 = \frac{b}{\beta \times q_2},$$

wonach der Gesammtwiderstand der ganzen Strombahn — wir wollen ihn W nennen — die Grösse:

$$W = w_1 + w_2 = \frac{a}{\alpha \times q_1} + \frac{b}{\beta \times q_2}$$

besitzt. Hieraus geht hervor, dass die Gesammtwiderstände des galvanischen Stromes und des seinerzeit untersuchten Wasserstromes von den Dimensionen der Stromleitungen in derselben Weise abhängen. Da ausserdem die Intensität des galvanischen Stromes mit jener des Wasserstromes gleichartig definirt wurde, muss sich nunmehr gemäss früheren Erwägungen auch die Intensität: I des galvanischen Stromes mit W und einer dritten, einer Niveaudifferenz correspondirenden Grösse — sie mag mit E bezeichnet werden — nach demselben Gesetze verknüpfen lassen, welches die Intensität: Q des Wasserstromes mit der Niveaudifferenz H und der Summe:

$$\frac{a}{\alpha \times q_1} + \frac{b}{\beta \times q_2}$$

in eine unveränderliche Beziehung bringt. Aber die so geforderte Gleichung:

$$\frac{E}{I} = W$$

drückt anderseits das wichtige, durch die Erfahrung bestätigte Gesetz von Ohm aus, sobald wir, ohne etwas an den Bedeutungen von I und W zu ändern, E als die sogenannte elektromotorische Kraft des betreffenden Stromes betrachten. Auf solche Art erscheint die letztere einerseits gemäss unseres Analogieschlusses einer Niveaudifferenz zugeordnet, anderseits durch die Formel:

$$E = I \times W$$

als messbare Grösse definirt und ermöglicht insoferne eine präcise Formulirung des Arbeitsbegriffes für den hier discutirten elektrischen Bewegungsprocess.

Um dieselbe kennen zu lernen, stützen wir uns wieder auf die Analogie zwischen Wasserströmen und elektrischen Strömen. Gleichwie nämlich eine bestimmte Arbeitsleistung gegeben wäre, wenn das in der Zeiteinheit irgend einen Querschnitt seiner Leitung durchströmende Wasserquantum Q vom Ende der Leitung in sein erstes Reservoir zurücktransportirt und so die von Q durchlaufene Bahn in eine geschlossene verwandelt würde, liegt eine gewisse Arbeitsleistung vor, sobald die in der Zeiteinheit irgend einen Querschnitt ihrer Leitung passirende Elektricitätsmenge I

unter Ueberwindung des Leitungswiderstandes sich in ihrer geschlossenen Strombahn bewegt.

Nachdem nun die Grösse der ersteren Arbeitsleistung kraft früheren Ueberlegungen durch das Product aus dem Wasserquantum Q in jene Niveaudifferenz H gemessen wird, welche zwischen der Ausflussöffnung und dem Wasserspiegel im ersten Reservoir besteht, muss auch die letztere Arbeitsleistung, weil die Stromintensität: I und die elektromotorische Kraft: E für den galvanischen Strom eine analoge Bedeutung besitzen, wie Q und H für den Wasserstrom, durch das Product: $I \times E$ messbar sein. Anderseits fällt hiebei die Thatsache ins Gewicht, dass sich die Factoren I und E auf andere Masseinheiten beziehen als Q und H, wonach das Product: $I \times E$ noch mit einem empirischen Verwandlungsfactor — wir wollen ihn C nennen — zu multipliciren sein wird, ehe es eine mechanische Arbeit in dem früher definirten Sinne messen kann.

Die weitere Frage, in welcher Form die hiemit präcisirte Arbeitsleistung:

$$C \times I \times E$$

auftritt, beantwortet sich auf Grundlage der seinerzeit erörterten Aequivalenz zwischen mechanischer Arbeit und Wärme dahin, dass diese Arbeitsleistung speciell als die in der gesammten Stromleitung entwickelte Wärme zum Ausdrucke gelangt. Bezeichnen wir demgemäss die in der gesammten Stromleitung während einer bestimmten Zeit, z. B. der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge mit M, so bleibt M ebenfalls dem Producte $I \times E$ gerade proportional, das heisst es gilt — unter c eine neue Erfahrungszahl verstanden — die Gleichung:

$$M = c \times I \times E,$$

welche sich, da E seinerseits dem Producte: $I \times W$ äquivalent ist, stets in die Beziehung:

$$M = c \times I \times I \times W$$

umformen lässt und in dieser Gestalt ein fundamentales, von Joule und Lenz experimentell bestätigtes Gesetz ausspricht. Dasselbe besagt, dass die in Betracht gezogene Wärmemenge proportional dem Quadrate der Stromintensität und dem Gesammtwiderstande der Leitung zunimmt.

Endlich ist auch die Frage, woher die in der gesammten Stromleitung entwickelte Wärmemenge in letzter Linie stammt, auf Grundlage des Princips von der Erhaltung der Kraft einer präcisen Beantwortung fähig; sie entspricht nämlich, wie dies Helmholtz in seiner bereits citirten Abhandlung zuerst ausgesprochen hat,[38] stets der Wärmemenge, welche durch die im Elemente vor sich gehenden chemischen Processe frei wird.

Lassen Sie mich jetzt, hochgeehrte Anwesende, dasselbe Princip noch zur Beurtheilung des jeweiligen Arbeitsverlustes bei der sogenannten elektrischen Kraftübertragung verwerthen, zumal dieselbe in technischer Hinsicht bereits durch einen meiner Vorredner gemeinfasslich und anziehend erörtert worden ist.[39]

Zu diesem Zwecke wollen wir die während einer Zeiteinheit zur Bewegung der ersten dynamo-elektrischen Maschine (Vordermaschine) aufgewendete Arbeit mit A, die durch die Bewegung der zweiten dynamo-elektrischen Maschine (Hintermaschine) während der gleichen Zeit gelieferte Arbeit mit B bezeichnen, ferner wie früher unter I die Intensität des erzeugten Stromes und unter W den Gesammtwiderstand der Stromleitung verstehen. Es wird dann gemäss dem Joule'schen Gesetze, so lange der Strom circulirt, in jeder Zeiteinheit die Wärmemenge: M entwickelt, welche, da zur Hervorbringung einer Wärmeeinheit bekanntlich 425 Arbeitseinheiten in Wärme umgesetzt werden müssen, $425 \times M$ Arbeitseinheiten consumirt.

Diese Arbeit: $425 \times M$ muss nun, zu B hinzuaddirt, wieder die ursprüngliche Arbeit: A liefern, sobald, was hier der Einfachheit wegen angenommen werden mag, die mit der Bewegung der beiden Maschinen als solcher verbundenen Arbeitsverluste verschwindend klein sind. Man erhält daher zunächst die Beziehung:

$$B + 425 \times M = A$$

und hieraus für den in Frage stehenden Arbeitsverlust: $A - B$ die Gleichung:

$$A - B = 425 \times M = 425 \times c \times I \times I \times W,$$

das heisst der jeweilige Arbeitsverlust wächst proportional dem Quadrate der Stromintensität und dem Widerstande der Stromleitung, welcher seinerseits gemäss früheren Auseinandersetzungen um so grösser ausfällt, je länger die Leitung ist und je kleiner man den Querschnitt derselben wählt.

Diese einfachen Gesetze lassen zugleich die ausserordentlichen Schwierigkeiten ermessen, welche einer praktischen Durchführung der Forderung, grosse Arbeitsleistungen auf weite Entfernungen zu übertragen, entgegenstehen, [40]) indem einerseits die Herstellung von langen Leitungen mit bedeutenden Querschnitten ungemein kostspielig wäre, anderseits Leitungsdrähte mit kleinen Querschnitten in Folge der gleichfalls mit dem Quadrate der Stromintensität zunehmenden Wärmeentwicklung abschmelzen könnten.

Aber der Grösse des Problems entsprechen auch die Anstrengungen, die namentlich in jüngster Zeit gemacht worden sind, dasselbe praktisch zu lösen, und mögen so vielleicht noch vor Abschluss unseres Jahrhunderts die Worte jenes österreichischen Ingenieurs (Herrn J. Popper in Wien) verwirklicht werden, welcher die Idee der elektrischen Kraftübertragung bereits vor mehr als zwanzig Jahren zuerst klar ausgesprochen und vorahnenden Blickes ihre Consequenzen erfasst hat: [41]) „Der beste Vermittler zur Uebersetzung der Kräfte, also gewissermassen die vortheilhafteste Zwischenmaschine zwischen einem Motor und einer Arbeitsmaschine ist die strömende Elektricität; unter Arbeit (an der Arbeitsmaschine) ist sowohl elektrische, als mechanische, als auch chemische verstanden.

„Naturmotoren, wie Ebbe und Fluth, heftige Winde in öden Gegenden, Wasserfülle in den Tiefen der Gebirge u. s. w., können auf diese Weise aus fernen Orten in die Gebiete der Civilisation, in die Umgebung der passenden, zugehörigen Nebenumstände geleitet werden, die Kraft eines fliessenden Wassers und überhaupt jeder vielleicht thatsächlich verwertheter Motor kann den für den industriellen, nationalökonomischen Zweck entsprechenderen Bedingungen zugeführt, also in seinem Werthe vervielfacht werden. In Kurzem, jedes industrielle oder ähnliche Unternehmen könnte in Zukunft auf ein ungefähres Maximum der Verwerthung, Rentabilität gebracht werden.

„Unsere technisch-chemischen Processe können daher durch mechanische hervorgebracht werden, auf directem und indirectem Wege, unter vollständiger oder theilweiser Benützung der Umwandlung.

„Dies Alles ist aber zu bewerkstelligen, wenn der Motor, z. B. der Wasserfall, eine passend aufgestellte magnet-elektrische Maschine bewegt, der hiedurch entstehende galvanische Strom in einer Art Telegraphenleitung über Berg und Thal geleitet und am gewünschten Orte mittelst einer elektro-magnetischen Maschine zu mechanischer und unmittelbar zu chemischer Arbeit — also zur Elektrolyse im Grossen — verwendet wird."

V. Verwerthung des Princips ausserhalb der Physik.

Der grosse englische Forscher Sir John Herrschel hat Allen, welche das Studium der Natur zu ihrer Lebensaufgabe gemacht haben, die nachstehende classische Unterweisung [42]) ertheilt: „Der vollkommene Beobachter wird in sämmtlichen Theilen des Wissens seine Augen gleichsam offenstehend halten, damit sie sofort von jedem Ereigniss getroffen werden können, welches sich nach den bereits angenommenen Theorien nicht ereignen sollte; denn diese sind die Thatsachen, welche als Leitfaden zu neuen Entdeckungen dienen."

Wählen wir den citirten Ausspruch als Richtschnur, so werden wir allerdings das sogenannte Princip der Continuität, welches uns seinerzeit die Erkenntniss der allgemeinen Massenanziehung vermittelt hat, vielleicht mit mehr Reserve verwerthen, als dies im Interesse eines raschen Ausbaues der Systematik der Wissenschaft gelegen ist, anderseits aber eine um so grössere Bereicherung ihres Inhaltes erhoffen dürfen und auch vor dem unlogischen Vorgange bewahrt bleiben, gewisse, aus physikalischen Experimenten mit Hilfe mathematischer Schlüsse abgeleitete Fundamentalsätze ohneweiters auf andere Erfahrungsgebiete zu übertragen, mithin die Aufklärung, welche wir daselbst erst suchen, von vorneherein in bestimmte Kategorien einzwängen zu wollen.

Diese Bemerkungen erscheinen mir nothwendig, um an die heute zu discutirenden Fragen vorurtheilslos herantreten zu können, welche zunächst die bei dem Wachsthume gewisser organischer Gebilde in Betracht kommenden Kräfte und deren Beziehungen zum Principe von der Erhaltung der Kraft zum Gegenstande haben. Hiebei mögen gewisse, die Morphologie stammbildender Holzgewächse betreffende Thatsachen als empirische Ausgangspunkte dienen, deren Auswahl sich wohl am besten historisch motiviren lässt.

Bekanntlich hat die grosse Regelmässigkeit, welche die Formen vieler organischer Gebilde bei normaler Entwicklung zeigen, seit den ältesten Zeiten zur Forschung angeregt, und zwar war es vor Allem die menschliche Gestalt, deren Formverhältnisse — in erster Linie zum Zwecke künstlerischer Nachbildung — eingehender untersucht worden sind. Schon die alten Egypter gelangten, wie durch glaubwürdige historische Nachrichten verbürgt wird, in den Besitz gewisser Regeln über die Proportionen des menschlichen Körpers, desgleichen die Griechen, wofür unter Anderem die Thatsache einen Beleg liefert, dass bereits Polyklet eine Schrift, den Kanon, über diesen Gegenstand verfasste und die in ihr aufgestellten Regeln speciell an zwei Musterstatuen, dem „Διαδούμενος“ und „Δορυφόρος“, zur Anschauung brachte. Aber eine breitere empirische Grundlage erhielt das Studium der Massverhältnisse der menschlichen Gestalt erst durch Lionardo da Vinci und Albrecht Dürer, an dessen Proportionslehre ich hier kurz erinnern will. Dieselbe erschien 1528 unter dem Titel: „Hierinn sind begriffen vier Bücher von menschlicher Proportion, durch Albrechten Dürer von Nürnberg erfunden und beschriben. zu nutz allen denen, so zu diser kunst lieb tragen“ — und stützt sich auf genaue, an fünf Männern und fünf Frauen von verschiedenem Körperbaue vorgenommene Messungen, welchen als jeweilige Masseinheit die vom Scheitel bis zur Sohle gerechnete Gesammtlänge des betreffenden Individuums zu Grunde gelegt wurde.

Auf diese Art ergab sich für gewisse, genügend scharf präcisirbare Dimensionen verschiedener Körpertheile eine Reihe echter Brüche, so beispielsweise für die Länge des Ober-, respective Unterkörpers, von der Spaltung aus gerechnet, die Zahl $^1/_2$, für die Kopflänge (vom Scheitel bis zum Kinn) $^1/_8$, für die Gesichtslänge (vom Kinn bis zum Haarwuchs) $^1/_{10}$ etc., jedoch bemühte sich Dürer vergeblich, zwischen seinen Verhältnisszahlen einen inneren, gesetzlichen Zusammenhang herzustellen.

Die seinen Untersuchungen zu Grunde liegende Idee, die Entfernungen verschiedener, ihrer Lage nach wenigstens näherungsweise bestimmbarer Oberflächenpunkte der menschlichen Gestalt durch eine dieser selbst entnommene Längeneinheit zu messen und so deren eigenthümliche Formverhältnisse durch Zahlen zu kennzeichnen, wurde später noch vielfach und insoferne vollständiger realisirt, als einerseits die jeweiligen numerischen Angaben aus einer grösseren Zahl von Einzelbeobachtungen abgeleitet, anderseits in der Gruppirung der gewonnenen Resultate auch Nationalität, Alter, Lebensberuf etc. der gemessenen Individuen berücksichtigt wurden.[43]) Da sich ferner hiebei mit Nothwendigkeit die Einsicht aufdrängen musste, dass die Oberfläche des menschlichen Körpers keine Fixpunkte im strengen Sinne des Wortes liefere, wurden in der Folge parallel mit diesen Forschungen auch die Massverhältnisse des menschlichen Skeletes und einzelner Theile desselben — ich erinnere hier nur an die gegenwärtig so eifrig gepflegte Kraniologie — nach analogen Gesichtspunkten eingehend studirt, ohne dass es bisher möglich gewesen wäre, die für eine geometrische Charakteristik der in Betracht gezogenen Gebilde wesentlichen empirischen Daten festzustellen.

Ein um so grösseres Interesse verdient daher die Thatsache, dass es A. Zeising gelang, viele die Form des menschlichen Körpers betreffende numerische Ergebnisse wenigstens untereinander in eine geometrisch präcisirbare Verbindung zu bringen.[44])

Er ging hiebei von der zweifachen Voraussetzung aus, dass die Schönheit der menschlichen Gestalt der Proportionalität ihrer Gliederung in ungleiche Theile entspringe, und dass weiter die Gliederung eines gegebenen Ganzen in ungleiche Theile nur dann als proportional erscheine, wenn das Ganze zum grösseren Theile in demselben Verhältnisse stehe wie der grössere Theil zum kleineren, also die geforderte Theilung mit jener durch den bekannten „goldenen Schnitt“ zusammenfalle.

Indem nun Zeising an gewissen Längen- und Breitenmassen des menschlichen Körpers den „goldenen

Schnitt" wiederholt ausführte, fand er, dass die durch dieses Verfahren erhaltenen Schnittpunkte in der weiteren Gliederung der untersuchten Gebilde [45]) sich vielfach sehr präcis ausprägten, und schloss hieraus, dass die von ihm als „proportional" bezeichnete Theilung für die Beurtheilung der menschlichen Körperformen wirklich die Bedeutung eines morphologischen Grundgesetzes besitze. Anderseits erkannte er aber auch, dass dasselbe am einzelnen Individuum nie mathematisch strenge zum Ausdrucke gelange, indem die durch directe Messungen constatirten Verhältnisszahlen theilweise nur rohe Näherungswerthe der geforderten Verhältnisszahlen vorstellten. [46])

Während hienach die Forschungen Zeising's in mathematischer Hinsicht noch auf den Nachweis gewisser, von vornherein angenommener Beziehungen zwischen den Masszahlen verschiedener Körpertheile beschränkt blieben, stellte sich F. Liharžik in seinen auf die Form des menschlichen Körpers bezüglichen Untersuchungen [47]) bereits die Aufgabe:

1. Sämmtliche zur geometrischen Construction der menschlichen Gestalt in einer bestimmten Normalstellung erforderlichen Daten zu eruiren und dieselben zur Aufstellung präciser Constructionsregeln zu verwerthen.

2. Die Veränderungen dieser Bestimmungsstücke für jedes Alter und beide Geschlechter empirisch zu ermitteln.

3. Die charakteristischen Längenmasse des menschlichen Körpers womöglich aus einer im geometrischen Sinne regelmässigen Figur constructiv abzuleiten.

Auch der genannte Forscher erzielte in seinem vergeblichen Bemühen, die eben angeführten Probleme allgemein zu lösen, überraschende specielle Resultate, auf welche ich übrigens nicht mehr näher eingehen kann, zumal ja meine bisherigen Mittheilungen lediglich den Zweck verfolgt haben, an einem Jedermann interessirenden Beispiele anzudeuten, unter welch' mannigfaltigen Gesichtspunkten die Formen eines einzigen organischen Gebildes studirt werden können, und welche Schwierigkeiten hiebei geometrischen Untersuchungen entgegentreten.

Diese Schwierigkeiten werden aber für einfacher organisirte Gebilde voraussichtlich geringer sein als für solche, welche gewissermassen die Endglieder der organischen Formenreihe vorstellen, wonach Versuche, die Formverhältnisse bestimmter Gewächse geometrisch zu charakterisiren, schon an und für sich aussichtsreicher sein mussten als die analogen Bestrebungen hinsichtlich der Formen des menschlichen Körpers.

Die ersten derartigen Versuche entsprangen dem Bedürfnisse der forstlichen Praxis, die körperlichen Inhalte von als Nutzholz in Verwendung kommenden Baumstämmen möglichst genau und mit möglichst geringem Zeitaufwande kennen zu lernen, wobei man sich allerdings anfänglich damit begnügte, die für den Kegel und verwandte geometrische Körper längst bekannten Cubirungsformeln unmittelbar zur Inhaltsberechnung von Stämmen und Stammstücken, sogenannten Stammsectionen zu benützen.[48]) Erst L. Smalian gebührt das Verdienst, in demselben Decennium, in welchem gründliche mathematische Betrachtungen auch in der Botanik[49]) und Zoologie[50]) Eingang fanden, aus zahlreichen Messungen eine allerdings noch sehr rohe geometrische Auffassungsweise von Stammformen abstrahirt zu haben,[51]) deren Hauptsätze sich, wie folgt, wiedergeben lassen:

1. Die Flächen der Stammquerschnitte können gemeiniglich als Kreisflächen angesehen werden, deren Radien den halben mittleren Durchmessern der ersteren gleich sind.

2. Bestimmt man das Volumen eines Stammes empirisch dadurch, dass man denselben in kurze, nach geometrischen Regeln cubirbare Stücke (Sectionen) zerlegt und deren Inhalte summirt, so schwankt der Quotient aus dem Stammvolumen und dem Volumen eines Cylinders von der Höhe des Stammes und einem Querschnitte, welcher dem Querschnitte des Letzteren im zwanzigsten Theile der Stammhöhe gleich ist, für

Eichen und Buchen	zwischen	0·36	und	0·60,
Erlen	„	0·38	„	0·59,
Birken und Weiden	„	0·37	„	0·55,
Nadelhölzer	„	0·36	„	0·55.

3. Dieser Quotient, die sogenannte echte Formzahl des Stammes, hängt lediglich von der Form des-

selben ab und kann zur geometrischen Charakteristik der mittleren Formen von Stämmen derselben Holzart und gleichen Alters verwendet werden.

Die weitere Ausbildung der geometrischen Betrachtungen Smalian's trat übrigens in der Folge fast vollständig gegenüber jenen Untersuchungen zurück, welche in Verfolgung der wesentlich praktischen Ziele der Holzmesskunde die Herstellung von praktisch brauchbaren Tafeln zur Inhaltsberechnung gegebener Baumstämme [52]) zum Gegenstande hatten. Hiebei ergab sich nun auf Grundlage ausserordentlich zahlreicher empirischer Stammcubirungen die merkwürdige Thatsache, dass Stämmen von gleicher Holzart, gleichem Holzalter, gleicher Länge und gleichem mittleren Durchmesser — in einer bestimmten Höhe über dem Boden — auch eine ganz bestimmte Volumzahl zugeordnet werden kann, welche, wenngleich für den einzelnen Stamm nicht genau zutreffend, in ihrer Anwendung auf eine grössere Anzahl von, in jenen Bestimmungsstücken übereinstimmenden Stämmen deren Gesammtvolumen hinlänglich genau liefert.

Wir haben es hier offenbar mit einer Thatsache zu thun, welche einerseits zufolge der grossen Anzahl empirischer Volumbestimmungen eine sehr solide empirische Grundlage besitzt, anderseits bei ihrer grossen Einfachheit insoferne theoretisch gut verwerthbar sein wird, als die mittleren Stammformen, wenn zur Feststellung der Inhalte gegebener Stämme so wenige Bestimmungsstücke genügen, dann ebenfalls relativ einfach geartet und daher einer präcisen geometrischen Charakteristik zugänglich sein dürften.

Dieser Wahrscheinlichkeitsschluss hat mich vor acht Jahren veranlasst, aus dem weiten Gebiete der organischen Morphologie gerade den eben besprochenen Complex von Erfahrungen vorerst als Ausgangspunkt für geometrische Untersuchungen zu wählen, wobei es auf Grundlage gewisser empirischer Daten, welche sich durch Ermittlung der echten Formzahlen, Höhen und gewisser Querflächen der in Betracht gezogenen Stämme direct gewinnen lassen, möglich geworden ist, deren mittlere Formen durch Gleichungen zu beschreiben.[53]) Die Letzteren charakterisiren die mittleren Stammformen als Gebilde, deren Oberflächen während des Wachsthums eine Reihe geometrisch definirbarer Gestalten durchlaufen, welche in den einfachsten Fällen [54]) einander in demselben Sinne ähnlich bleiben, wie beispielsweise die Blätter der Rosskastanie oder irgend eines Obstbaumes schon unmittelbar nach ihrer Entfaltung ihre typischen Formen deutlich ausgeprägt zeigen.

Angesichts der weiteren, in dem historischen Entwicklungsgange der Botanik und Zoologie zum Ausdrucke gelangten Thatsache, dass speciell die Formen der organischen Gebilde auch die ersten Ausgangspunkte für deren wissenschaftliche Unterscheidung und Classification geliefert haben, also insoferne wesentliche Merkmale jener Gebilde vorstellen, lag es nunmehr nahe, die mathematisch verfolgbaren Veränderungen einer und derselben mittleren Stammform während ihres Wachsthums mit den zwischen ihren materiellen Elementen wirksamen Kräften causal zu verknüpfen, respective zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen über die Natur der Letzteren die empirisch feststellbaren Formveränderungen des betreffenden Gebildes als mechanische Wirkungen interpretirt werden können. Da ferner ohne Bewegung der Elemente eines Gebildes das Eintreten neuer Elemente in dasselbe undenkbar ist, mithin jedes Wachsthum auf einem Bewegungsprocesse beruht, sind die hiebei in Betracht kommenden Kräfte jedenfalls Bewegungskräfte, welche übrigens voraussichtlich nicht mehr ausschliesslich von den Massen der bewegten Elemente und deren gegenseitigen Entfernungen abhängen werden.

Zur Motivirung dieser Aeusserung sei es mir gestattet, auf die in meinem letzten Vortrage entwickelte Auffassungsweise der magnetischen Erscheinungen als Wirkungen elementarer, die Moleküle jedes magnetisirbaren Körpers umkreisender elektrischer Ströme zurückzugehen. Sobald wir nämlich den hypothetisch eingeführten Elementarströmen, wie dies seinerzeit geschehen ist, specifische Wirkungen zuschreiben, erscheint auch der Schluss unvermeidlich, dass bewegte Aethertheilchen unter Umständen anders auf einander wirken als ruhende Aethertheilchen, folglich in die Wechselwirkungen der Ersteren eventuell die Bestimmungsstücke ihrer gegenseitigen Bewegungen einzutreten haben. Nachdem nun bekanntlich kraft früherer Betrachtungen zur vollständigen Charakteristik jeder Bewegung die Angabe ihrer jeweiligen Geschwindigkeit und Beschleunigung nothwendig wird, können wir die eben gemachte Bemerkung unmittelbar dahin präcisiren, dass die Wechselwirkungen der bewegten Theilchen bedingungsweise von deren gegenseitigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abhängen, welche Abhängigkeit speciell für elektrische Wechselwirkungen in Weber's berühmtem elektrischen Grundgesetze[55]) zuerst mathematisch präcisirt worden ist.

Die vorstehenden Erwägungen lieferten mir zugleich die erste Directive für die Formen, in welchen ich die bei meinen morphologischen Problemen in Betracht kommenden Kräfte darzustellen hatte, und führten mich schliesslich zur Annahme von Kraftwirkungen, welche zwar eine mechanische Interpretation der in Frage stehenden Bewegungsprocesse ermöglichen, aber anderseits — unähnlich allen bisher bekannt gewordenen physikalischen Kräften — nicht nur von den Entfernungen der bewegten Theilchen, sondern auch von den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten und der seit Beginn des betreffenden Bewegungsprocesses verflossenen Zeit abhängen. Dessenungeachtet genügen selbst derartige Kräfte, wie ich vor fünf Jahren nachgewiesen habe,[56]) bedingungsweise dem Principe von der Erhaltung der Kraft in der hier präcisirten Fassung, wonach dessen Giltigkeitsgrenzen einer bedeutenden Erweiterung fähig sind.[57])

Diese neue Verallgemeinerung des Princips gestattet jedoch keine so scharfe Abgrenzung wie dessen seinerzeit besprochene erste Generalisation für solche Kräfte, welche sich nur mit den Entfernungen der wirksamen Elemente und mit deren Massen ändern, indem sich ohne Schwierigkeit beliebig viele Wirkungsgesetze construiren lassen, welche das genannte Princip nicht erfüllen, obwohl sie ebenfalls nur von den Entfernungen der bewegten Elemente, von ihren Geschwindigkeiten und der Zeit abhängen. Berücksichtigen wir ausserdem, dass die hier in Betracht gezogenen organischen Bewegungsprocesse thatsächlich nur einen verschwindend kleinen Theil der überhaupt vorkommenden organischen Bewegungen ausmachen, so werden wir unseren diesbezüglichen Ergebnissen vorläufig nur einen diagnostischen Werth beilegen dürfen und demgemäss das Princip der Erhaltung der Kraft in seiner Anwendung auf organische Bewegungsprocesse als einen Satz zu bezeichnen haben, dessen Giltigkeit für jeden derartigen Process wohl sehr wahrscheinlich, aber noch nicht allgemein beweisbar ist und daher von Fall zu Fall erst durch die Erfahrung bestätigt werden muss.

Um aber nunmehr auch Processe zur Sprache zu bringen, auf welche das Princip der Erhaltung der Kraft in der ihm hier gegebenen Fassung überhaupt nicht bezogen werden kann, gestatten Sie mir, hochgeehrte Anwesende, zwei früher gemachte Bemerkungen etwas weiter auszuführen, welche einerseits unsere subjective Schätzung der Gewichte von schweren Körpern, anderseits die Thatsache betreffen, dass wir erst auf Reize von *endlicher* Stärke mit Empfindungen reagiren.

Was nämlich unsere *Druckempfindungen* [58]) anbelangt, so bewirkt nach den Versuchen von Aubert und Kammler auf der Stirne und den Schläfen bereits ein Druck von 0·002 Gramm eine *merkliche* Druckempfindung, während hiezu auf den Fingernägeln und der Fersenhaut ein solcher von 1 Gramm nöthig wird, wonach sich für die Hervorbringung *eben merklicher* Druckempfindungen an verschiedenen Oberflächentheilen des menschlichen Körpers keine *gemeinsame* Reizgrösse aufstellen lässt. Es ist ferner, wie die Experimente von E. H. Weber gelehrt haben, nicht mehr möglich, zwei Gewichte, deren Unterschied weniger als den vierzigsten Theil jedes einzelnen Gewichtes beträgt, selbst bei successiver Hebung mit *einer und derselben* Hand und gleichzeitiger Beugung des anfänglich gestreckten Armes von einander zu unterscheiden, woraus hervorgeht, dass Reize, welche unter *denselben* äusseren Bedingungen gleiche oder besser gesagt *als gleich geschätzte* Druckempfindungen hervorrufen, dessenungeachtet innerhalb bestimmter Grenzen von einander *verschieden* sein können.

Hiezu tritt noch eine weitere, allerdings nur approximativ giltige Beziehung zwischen Reiz und Empfindung, gemäss welcher die Steigerung der letzteren bei Zunahme des Reizes von dem Verhältnisse desselben zu seiner ursprünglichen Grösse abhängt. Wenn nämlich bei irgend einem Individuum die etwa durch das Gewicht: P an einem bestimmten Körpertheile bewirkte Druckempfindung sich erfahrungsgemäss erst dann merklich erhöht, sobald man P um den Betrag: p vergrössert, so erfordert das doppelte ursprüngliche Gewicht, soll wieder eine eben merkliche Steigerung der zugehörigen Druckempfindung eintreten, die doppelte Zulage, ferner das dreifache ursprüngliche Gewicht zur Erreichung desselben Zweckes die dreifache Zulage etc., wobei jedoch die eben merklichen Empfindungszuwüchse qualitativ unterscheidbar bleiben.

Im Hinblick auf diese Thatsachen erscheint es daher unmöglich, die Stärke der jeweiligen Druckempfindung als eine Summe gleichartiger Elemente darzustellen respective sämmtliche Druckempfindungen durch eine einzige Empfindungseinheit zu messen. Gesetzt also auch den Fall, dass sich Reiz und Empfindung ohne Bezugnahme auf die sie vermittelnden Vorgänge einander direct als Grössen zuordnen liessen, so würde eine solche Zuordnung keineswegs schon die Aufstellung einer Gleichung zwischen der jeweiligen Reizgrösse und der ihr entsprechenden Empfindungsgrösse ermöglichen, weil hiebei nur die erstere als der von Fall zu Fall wirksame Druck allgemein auf Grundlage einer und derselben Masseinheit als eine Zahl ausdrückbar wäre.[59])

Auf diese Art bildet die Qualität der Empfindung zugleich eine unübersteigliche Schranke für jeden Versuch, irgend welche psycho-physische Processe aus Bewegungen angenommener Elemente unter den Wirkungen von im Sinne der Mechanik präcisirbaren Kräften erklären zu wollen,[60]) wonach auch das Princip der Erhaltung der Kraft in der ihm hier gegebenen Fassung nicht mehr auf derartige Processe übertragen werden kann.

Während wir so bezüglich der Anwendung des genannten Princips einerseits Grenzen anerkennen müssen, welche der Definitionsweise der in ihm verknüpften Begriffe entspringen, sind anderseits auch für seine empirische Bestätigung Grenzen denkbar, die in der eigenthümlichen Beschränktheit unserer Sinnesempfindungen begründet erscheinen.

Als Ausgangspunkt für die Erläuterung dieser Vermuthung mag ein elementares physikalisches Experiment dienen. — Bekanntlich zerfällt Sonnenlicht, dessen Strahlen ein Glasprisma durchsetzen, in eine Reihe verschiedenfarbiger Strahlen, welche am klarsten ersichtlich gemacht werden, wenn man behufs Ausführung des Versuches Sonnenstrahlen durch eine kleine Oeffnung in einen dunklen Raum eintreten und die das Prisma verlassenden Strahlen auf einen weissen

Papierschirm auffallen lässt. Man gewahrt dann ein prachtvolles Farbenband, das sogenannte Sonnenspectrum, in welchem die Anordnung der farbigen Strahlen durch deren verschiedene Brechbarkeit bedingt ist. Das am wenigsten brechbare Roth liegt an dem einen Ende des Spectrums; sein anderes Ende wird durch das am stärksten brechbare Violett gebildet, und es ist auf Grundlage der gegenwärtig allgemein herrschenden Auffassungsweise des Lichtes als transversaler Schwingungen des Aethers auch möglich, die einzelnen Spectralfarben durch ganz bestimmte Schwingungszahlen der im Wege der betreffenden Strahlen liegenden Aethertheilchen zu charakterisiren. Hiebei entspricht speciell dem äussersten Roth des Spectrums eine Anzahl von 452 Billionen Aetherschwingungen in der Secunde, ferner dem äussersten Violett eine solche von 785 Billionen, während die Schwingungszahlen aller übrigen sichtbaren Spectralfarben zwischen den angeführten Grenzen gelegen sind.

Im Anschlusse hieran können wir nunmehr die Wahrnehmbarkeit einer bestimmten Spectralfarbe, wie dies in der physiologischen Optik geschieht, gleichfalls mit ihrer specifischen Schwingungszahl verknüpfen und — zunächst theoretisch — die Möglichkeit einsehen, dass ausser den sichtbaren Spectralfarben noch andere existiren, deren Schwingungszahlen zu niedrig, beziehungsweise zu hoch sind, um uns unter den früher präcisirten Bedingungen[61]) Lichtempfindungen zu vermitteln. Aber gesetzt den Fall, dass es derartige

Strahlen wirklich gibt, so müsste, falls wir beispielsweise im Stande wären, die Schwingungszahlen der ihnen angehörigen Aethertheilchen durch irgend welche physikalische Mittel entsprechend zu verlangsamen, sofort auch eine Verlängerung des sichtbaren Spectrums über das Violett hinaus eintreten.

Sie wissen, hochgeehrte Anwesende, dass eine solche Verlängerung in der That erfolgt, sobald man den das Spectrum auffangenden Papierschirm mit irgend einer fluorescirenden Substanz, z. B. mit einer Lösung von schwefelsaurem Chinin durchtränkt, in welchem Falle die ultraviolette Fortsetzung des Spectrums in blauem Fluorescenzlichte erglänzt. Weniger bekannt dürfte dagegen die Thatsache sein, dass andere Geschöpfe, z. B. die Ameisen, durch jene ultravioletten Strahlen sogar stärker afficirt werden als durch die uns sichtbaren Strahlen des Sonnenspectrums, wofür unter Anderm gewisse Beobachtungen J. Lubbock's einen Beleg geliefert haben.[62]) Als nämlich der genannte Naturforscher, von der allgemein geläufigen Erfahrung ausgehend, dass die genannten Thierchen bei Zerstörung ihres Baues vor Allem ihre ans Tageslicht gebrachten Larven und Puppencocons (die sogenannten Ameiseneier) wieder ins Dunkle zu bringen suchen, sorgfältig ausgehobene und in ein finsteres Zimmer transportirte Ameisenhaufen nach ihrer Zerstörung mit dem Spectralbande beleuchtete, entfernten die zu seinen Versuchen verwendeten Ameisen *(Lasius niger* und *Formica fusca)* ihre Larven und Concons zuerst aus der ultravioletten

Fortsetzung des Spectrums, wonach diesen Insecten die Wirkung von ultravioletten Strahlen auf ihre Larven und Cocons in der That empfindlicher erschien als beispielsweise jene der gelben und grünen Strahlen.

Die Nutzanwendung des Gesagten auf unsere früher ausgesprochene Vermuthung ergibt sich jetzt von selbst. Denn sobald uns einmal Experimente darüber belehrt haben, dass die Grenzen für gewisse Sinnesempfindungen bei anderen Geschöpfen durch deren biologischen Entwicklungsprocess weiter hinausgeschoben wurden, als dies bei uns selbst der Fall ist, muss auch — wenigstens akademisch — die Möglichkeit eingeräumt werden, dass in der Natur Kraftwirkungen vorkommen, für deren Untersuchung uns die hiefür erforderlichen Sinne fehlen, und dass mithin das Princip der Erhaltung der Kraft in der Folge für gewisse Bewegungsprocesse nur deshalb nicht empirisch erweisbar sein dürfte, weil die hiebei zu summirenden Arbeitsgrössen nicht insgesammt der directen oder indirecten Controle durch unsere sinnliche Erfahrung zugänglich sind. Aber die Grenzen der letzteren bestimmen zugleich jene der exacten naturwissenschaftlichen Forschung, wonach ein weiteres Ausspinnen derartiger Vermuthungen jenseits meines Vortragsthemas gelegen ist.

Alle bisherigen Betrachtungen[63]) überblickend, möchte ich schliesslich das Princip der Erhaltung der Kraft als eine Art Erkenntnissonne bezeichnen, welche, gleichwie die physische Sonne ihren Planeten bestimmte Bahnen vorschreibt und ihnen nach Massgabe ihrer Entfernungen Licht und Wärme spendet, den Fortschritten auf gewissen Gebieten der Naturerkenntniss ein ganz bestimmtes Gepräge verleiht und um so machtvoller wirkt, je enger sich das zu fördernde Erkenntnissgebiet mit den mechanischen Grundlagen des Princips verknüpfen lässt. Und gleichwie die physische Sonne von einer ungeheuren Photosphäre umhüllt wird, besitzt auch jene Erkenntnissonne ihre Photosphäre, welche dem erdgebornen Naturforscher, dieweil ihn die schwere Rüstung einer mathematisch-mechanischen Denkweise an den festen Boden bannt, unzugänglich bleibt und nur auf den Flügeln einer schöpferischen Phantasie zu durchmessen ist.

Es erscheint sonach im Grunde selbstverständlich, dass neben zahlreichen Vertretern exacter Wissenschaften, welche über das Princip forschen, auch Philosophen und Dichter erstehen, die über dasselbe träumen und, indem sie die Idee der Erhaltung der Kraft [64]) auch für die psychischen Processe jedes einzelnen Individuums zur Geltung bringen, in gewissem Sinne jene Weltanschauung weiter ausbilden, welche bereits von Platon im Gewande eines Dialoges zwischen Sokrates und Glaukon angedeutet worden ist: [65])

Sokrates: Nach diesem nun vergleiche unsere Natur hinsichtlich des Wissens oder Nichtwissens etwa folgendem Zustande: Denke dir nämlich Menschen wie in einer unterirdischen, höhlenähnlichen Wohnung, deren ausgedehnter, die ganze Höhle entlang sich hinerstreckender Ausgang nach dem Lichte zu offen ist; dass sie in dieser von Kindheit auf an den Schenkeln und Nacken gefesselt sich befinden, so dass sie auf derselben Stelle verharren und nur vorwärts sehen, durch die Fesseln aber ausser Stande sind, ihre Köpfe rings herum zu drehen; dass die Erleuchtung ferner ihnen von einem hinter ihnen, oben und in der Ferne brennenden Feuer kommt, zwischen dem Feuer und den Gefesselten, über denselben einen Weg; diesen entlang denke dir ein Mäuerchen aufgeführt, wie eine Umhegung die Taschenspieler von den Zuschauern trennt, über der sie ihre Wunderdinge zeigen.

Glaukon: Das denk' ich mir.

S. Denke dir nun Menschen, die an diesem Mäuerchen hin mancherlei über das Mäuerchen hervorragende Geräthschaften tragen, sowie steinerne und hölzerne und verschiedenartig gearbeitete Bilder von Menschen und anderen Geschöpfen, und dass, wie natürlich, von den Vorbeitragenden die Einen sprechen, die Andern schweigen.

G. Du sprichst da von einem seltsamen Bilde und seltsamen Gefesselten.

S. Die uns gleichen; denn glaubst du, dass zunächst solche Gefesselte von sich und von einander wohl etwas Anderes sehen als die vom Feuer auf den ihnen gegenüberstehenden Theil der Höhle geworfenen Schatten?

G. Wie sollten sie doch, wären sie genöthigt, lebenslänglich ihre Köpfe unbewegt zu halten?

S. Was aber von dem Vorübergetragenen? Nicht Ebendasselbe?

G. Was sonst?

S. Wären sie nun im Stande, sich mit einander zu unterreden, meinst du nicht, dass sie gewohnt sein würden, dem, was sie sähen, den Namen der vorüberziehenden Gegenstände selbst zu geben?

G. Nothwendig.

S. Wie ferner? Wenn ihr Kerker, sollte einer der Vorüberziehenden sprechen, vermittelst der Gegenwand einen Widerhall gäbe, meinst du, dass sie etwas Anderes als den vorüberziehenden Schatten für das Sprechende halten würden?

G. Beim Zeus, das mein' ich nicht.

S. Durchgängig würden wohl dergleichen Menschen nichts Anderes für das Wahre halten, als den Schatten der verarbeiteten Gegenstände.

G. Sehr nothwendig.

S. Erwäge nun, wie wohl ihre Entfesselung und die Heilung ihrer Verblendung beschaffen sein dürfte, wenn auf natürlichem Wege so etwas ihnen widerführe; wenn einer entfesselt und stracks aufzustehen und den Nacken umzudrehen und fortzuschreiten und zum Lichte aufzublicken genöthigt würde, und wenn alle diese Verrichtungen ihm Schmerzen verursachten, und der Glanz es ihm unmöglich machte, die Gegenstände zu sehen, deren Schatten er früher erblickte; was meinst du, dass er angeben würde, wenn ihm Jemand sagte, er habe damals das Gaukelwerk erblickt, jetzt aber sehe er, dem Seienden etwas näher gerückt und dem wirklich Seienden zugewendet, richtiger, und wenn er ihn, mit

Hinweisung auf jedes der Vorüberziehenden, durch seine Fragen nöthigte, Bescheid zu geben, was es sei? Glaubst du nicht, dass er wohl ungewiss sein und das früher Gesehene für der Wahrheit entsprechender halten würde, als das jetzt ihm Gezeigte?

G. Ei bei Weitem.

S. Würde derselbe nicht auch, nöthigte Jener ihn, auf das Licht selbst zu blicken, an den Augen Schmerzen empfinden und, sich zurückwendend, nach den Gegenständen flüchten, die er zu sehen vermag, und diese in der That für deutlicher als die ihm gezeigten halten?

G. So ist's.

S. Wenn ihn aber Jemand von dort mit Gewalt auf rauhem und steilem Wege hinaufzöge und nicht abliesse, bis er zum Lichte der Sonne ihn herauszog, würde er da wohl nicht Schmerz empfinden und Unwillen über das Heraufziehen und, zum Lichte gelangt, die Augen mit Helligkeit erfüllt, nicht einen einzigen der ihm jetzt als die wahren genannten Gegenstände zu erkennen vermögen?

G. So plötzlich wenigstens wohl nicht.

S. Er würde wohl, denk' ich, der Gewöhnung bedürfen, um das oben Befindliche zu sehen, und zuerst wohl am leichtesten die Schatten erkennen und dann die Bilder der Menschen und der anderen Gegenstände im Wasser, später aber diese selbst. Nach diesen würde er wohl das am Himmel Befindliche, sowie den Himmel selbst zur Nachtzeit, den Blick auf das Licht der Sterne und des Mondes richtend, leichter betrachten als am Tage die Sonne und was mit ihr in Verbindung steht.

G. Wie sollt' er nicht?

S. Zuletzt aber vermag er wohl, denk' ich, nicht Abbilder derselben im Wasser oder an einer anderen Stelle, sondern sie selbst, für sich selbst, an der Stelle, die sie einnimmt, zu erschauen und zu betrachten.

G. Nothwendig.

S. Nach diesem würde er auch wohl bereits über sie Betrachtungen anstellen, dass sie die Tagesstunden und den Jahreswechsel herbeiführt und über Alles in der sichtbaren Welt waltet und gewissermassen die Urheberin von Allem ist, was sie sahen.

G. Es liegt zu Tage, dass er nach dem wohl dahin gelangen würde.

S. Doch wie? Glaubst du nicht, dass er wohl, indem er seines frühern Aufenthaltes und der dortigen Weisheit und seiner damaligen Mitgefesselten gedächte, sich selbst wegen der Veränderung glücklich preisen, diese aber bedauern würde?

G. Gar sehr.

S. Gab es aber damals unter ihnen Ehrenbezeugungen, Lobpreisungen und Belohnungen für Den, der das Vorüberziehende am scharfsichtigsten erschaute und am treuesten im Gedächtniss bewahrte, was von ihnen früher, was später, was zusammen zu kommen pflegte, und darnach so gut wie möglich, was da kommen werde, vorausverkündete, meinst du wohl, dass er darauf begierig sein und die von Jenen Hochgeehrten und unter ihnen Herrschenden beneiden, oder dass es ihm wohl vielmehr nach den Worten des Homeros ergehen, und er viel lieber wünschen würde, das Feld eines dürftigen Mannes, ohne Erbe, als Taglöhner zu bestellen und irgend sonst etwas über sich ergehen zu lassen, als jenen Ruhm davonzutragen und in jener Weise zu leben?

G. Ja, der Meinung bin ich, Alles wird er eher über sich ergehen lassen als in jener Weise zu leben.

S. Auch das überlege dir: Wenn so Einer wieder herabstiege und denselben Sitz einnähme, würden nicht, indem er plötzlich von der Sonne käme, seine Augen mit Dunkelheit erfüllt sein?

G. Ja wohl.

S. Müsste er nun wieder, jene Schatten zu unterscheiden, mit den dort fortwährend Gefesselten, während er sich geblendet fühlt, einen Wettstreit bestehen, bevor er seine Augen wieder brauchen lernte, und, wäre diese Zeit der Angewöhnung keine kurze, würde er sich nicht lächerlich machen und von ihm gesagt werden, er sei von seiner Wanderung nach oben mit verderbten Augen zurückgekehrt, und es sei nicht der Mühe werth, das Hinaufsteigen auch nur zu versuchen? Und würden sie nicht Den, der Jemanden zu entfesseln und hinaufzuführen versuchte, könnten sie irgendwie seiner habhaft werden, sogar wohl tödten?

G. Ei gewiss.

S. Dieses Bild muss man also, mein geliebter Glaukon, in allen seinen Theilen mit dem vorher Gesagten zusammenstellen, indem man unsern den Augen sichtbaren Wohnsitz mit der Wohnung im Kerker, die Erleuchtung durch das Feuer in demselben mit der Gewalt der Sonne vergleicht. Wenn du aber das Aufsteigen nach oben und die Betrachtung des oben Befindlichen mit dem sich Erheben der Seele zu dem Bereiche des Denkbaren zusammenstellst, so wirst du wenigstens das, was ich erhoffe, nicht verkennen, da du auch das zu hören wünschest; aber nur ein Gott weiss wohl, ob es mit der Wahrheit zusammentrifft.

Anmerkungen.

I. Einleitende Betrachtungen.

1. Vergl. hierüber die biographische Skizze des Lebenslaufes Dr. R. Mayer's im IV. Bande von F. Zöllner's „Wissenschaftlichen Abhandlungen", p. 674—690.

2. Siehe hierüber die Bemerkungen von H. Helmholtz im I. Bande seiner „Wissenschaftlichen Abhandlungen", p. 74, 75.

3. Besonders schwere Fälle dieser Art hat der grosse englische Naturforscher A. R. Wallace in einer im November 1870 zu London gehaltenen Vorlesung (siehe die 1874 von A. Aksákow herausgegebene Schrift „Der Spiritualismus und die Wissenschaft", p. IV, V) zusammengestellt, in welcher er unter Anderem Folgendes mittheilte: „Als Benjamin Franklin die Erfindung des Blitzableiters vor die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften brachte, wurde er als ein Träumer verlacht, und seine Abhandlung wurde in die Verhandlungen der Gesellschaft nicht aufgenommen. Sir Humphry Davy lachte über die Idee, dass London einmal mit Gas beleuchtet werden würde. Als Stephenson den Gebrauch von Locomotiven auf der Liverpool- und Manchester-Eisenbahn vorschlug, bewiesen gelehrte Männer, es sei eine Unmöglichkeit, dass dieselben jemals zwölf englische Meilen in einer Stunde zurücklegen würden. Eine andere grosse wissenschaftliche Autorität erklärte es für gleich unmöglich, dass Meeresdampfer jemals den atlantischen Ocean durchkreuzen würden. Die französische Akademie der Wissenschaften verlachte den grossen Astronomen Arago, als er die Erfindung des elektrischen Telegraphen zur Discussion bringen wollte."

4. Es sei hier daran erinnert, dass Kirchhoff in seinen Vorlesungen über mathematische Physik deren Aufgabe direct dahin präcisirt, die in der Natur vorkommenden Bewegungen vollständig und möglichst einfach zu beschreiben.

5. Um experimentell darzuthun, dass der von einem frei fallenden Körper zurückgelegte Weg proportional dem Quadrate der Fallzeit wachse, bediente ich mich eines Hipp-schen Chronoskops mit Fallapparat und bestimmte für eine Marmorkugel die den Fallhöhen: 100 Mm. und 400 Mm. zugehörigen Fallzeiten aus je fünf Beobachtungen, zwischen welchen die grösste individuelle Differenz: 0·008 Secunden betrug. Weitere Eigenschaften der gleichförmig beschleunigten, geradlinigen Bewegung wurden dann mittelst einer Atwood'schen Fallmaschine demonstrirt.

6. Im Anschlusse an diese speciellen Betrachtungen mag der mathematisch gebildete Leser folgenden allgemeineren Erwägungen seine Aufmerksamkeit zuwenden:

Hat ein materielles Theilchen, eine ursprüngliche Ruhelage verlassend, nach Verlauf irgend einer Zeit: t den gerad- oder krummlinigen Weg: s zurückgelegt, so steht vor Allem fest, dass dasselbe hiebei in jedem Zeitmomente nur an einem einzigen Orte seiner Bahn sich befunden haben kann, und dass die Gesammtheit aller Bahnpunkte immer eine lückenlose Linie bildet. Es muss also s stets eine einwerthige und stetige Function der Zeit vorstellen.

Was ferner das Verhältniss des Weges zur Zeit anbelangt, so kann dasselbe entweder einen constanten Werth: C besitzen oder veränderlich sein. Im ersten Falle liefert die Ueberlegung, dass — unter c den in der ersten Secunde durchlaufenen Weg verstanden — der Quotient: $\frac{s}{t} = C$ für $t = 1$ in: $c = C$ übergeht, die Gleichung: $\frac{s}{t} = c$ resp. $s = ct$, wobei c zugleich den in jeder auf die erste Secunde folgenden Secunde zurückgelegten Weg, d. h. die unveränderliche Geschwindigkeit für die in Betracht gezogene gleichförmige Bewegung repräsentirt.

Im zweiten Falle erscheint die Bewegung nur innerhalb sehr kurzer Zeitintervalle näherungsweise als gleichförmig, so dass, wenn v nunmehr die Geschwindigkeit zur Zeit t bezeichnet, der Werth von v nur während eines sehr kurzen, auf t folgenden Zeitabschnittes: Δt approximativ als constant aufgefasst werden darf. Ist also Δs der innerhalb dieses Zeitabschnittes: Δt erfolgte Zuwachs des Weges, so ist approximativ:

$$\Delta s = v\,\Delta t \text{ und: } v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

aus welcher Näherungsformel eine mathematisch strenge Definition von v gewonnen wird, indem man $\Delta t = o$ setzt, also von dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ zu dem Differentialquotienten: $\frac{ds}{dt}$ übergeht. Hiernach wird die jeweilige Geschwindigkeit v im zweiten Falle gleich dem ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit, z. B. also für:

$$s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \text{ gleich: } v = \beta + 2\gamma t.$$

Natürlich kann auch das Verhältniss der jeweiligen Geschwindigkeit des bewegten Theilchens zur Zeit entweder einen constanten Werth: g besitzen, oder eine Function der Zeit vorstellen. Im ersten Falle besagt die Relation: $\frac{v}{t} = g$ resp. $v = gt$, dass die in jeder Zeiteinheit stattfindende Geschwindigkeitsänderung, die sogenannte Beschleunigung, eine unveränderliche Grösse: g ist, und charakterisirt die Bewegung als eine gleichförmig beschleunigte.

Im zweiten Falle kann die Bewegung nur während sehr kurzer Zeitintervalle approximativ als eine solche betrachtet werden, so dass — unter p die Beschleunigung zur Zeit t verstanden — die im Zeitintervalle Δt erfolgte Geschwindigkeitsänderung: Δv näherungsweise dem Producte: $p\Delta t$ gleichzusetzen ist. Die wahre Grösse von p ergibt sich dann aus dem Differenzenquotienten: $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ wieder durch den Uebergang zu dem correspondirenden Differentialquotienten:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

wonach die jeweilige Beschleunigung: p im zweiten Falle als der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit zu definiren ist, z. B. also für:

$$s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 \text{ gleich: } p = 2\gamma + 6\delta t$$

wird. Soll dann der letztere Ausdruck für jeden Werth der Zeit etwa die vorgeschriebene Grösse: g besitzen, so muss man $2\gamma = g$, $\delta = o$ nehmen, und bilden daher die mit zwei unbestimmten Constanten: α, β versehenen Gleichungen:

$$p = g,\ v = \beta + gt,\ s = \alpha + \beta t + \frac{1}{2} g t^2$$

die allgemeine Beschreibung jeder geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung.

7. Ich verweise hiebei auf Bain's diesbezügliche Theorie, die Prof. Stricker in seinen „Studien über das Bewusstsein“ (Wien, 1879), p. 45, wie folgt, charakterisirt: Die Empfindungen, welche mit der Contraction der Muskeln verbunden sind, werden von uns hinsichtlich ihrer Intensität und ihrer Dauer unterschieden. Die Intensität des Muskelgefühls gibt uns den Begriff der Kraft, das andere Moment hingegen, das Dauergefühl, gibt uns die Vorstellung der Zeit.

8. In diesem Sinne wurde der Begriff: Masse zuerst von Kirchhoff in dessen Vorlesungen über mathematische Physik interpretirt.

9. Die im vorigen Jahre von Lothar Meyer und Karl Seubert separat herausgegebene Tabelle der Atomgewichte der Elemente zählt deren 66 auf.

10. Hiezu sei gelegentlich bemerkt, dass in dem vom internationalen Congress der Elektriker zu Paris (1881) endgiltig festgesetzten absoluten Masssysteme als Einheit der Länge das Centimeter, als Einheit der Masse die Masse des Grammgewichtes und als absolute Krafteinheit jene Kraft gewählt wurde, welche der Masse 1 in einer Secunde die Beschleunigung 1 ertheilt. Als Arbeitseinheit gilt daher im absoluten Masssysteme jene Arbeit, welche die so definirte Kraft 1 bei einer Verschiebung ihres Angriffspunktes um einen Centimeter leistet.

11. Dieses Princip wird von Newton als drittes Bewegungsgesetz (siehe die „Philosophiae naturalis principia mathematica) wie folgt ausgesprochen: „Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.“ (Bei jeder Wirkung ist immer eine gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung vorhanden: oder die Wirkungen, welche irgend zwei Körper auf einander ausüben, sind immer gleich und entgegengesetzt gerichtet.)

II. Gravitation.

12. Dividirt man den Abstand des Brennpunktes einer gegebenen Ellipse von ihrem Mittelpunkte durch deren halbe grosse Axe, so erhält man die sogenannte numerische Excentricität der Ellipse, welche für die Bahnen der acht grossen Planeten der Reihe nach folgende Werthe besitzt:

Mercur: 0·206, Venus: 0·007, Erde: 0·017, Mars: 0·093, Jupiter: 0·048, Saturn: 0·056, Uranus: 0·047, Neptun: 0·009.

Hiernach sind speciell die Bahnen der Venus und Erde gegenwärtig fast kreisförmig.

13. Setzt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne 148,600.000 Kilometer als Masseinheit für die Bestimmung der halben grossen Axen der Bahnen der übrigen Planeten fest, so hat man für:

Mercur: 0·4, Venus: 0·7, Mars: 1·5, Jupiter: 5·2,
Saturn: 9·5, Uranus: 19·2, Neptun: 30·0,

während die Aequator-Durchmesser der acht grossen Planeten die Werthe:

4816, 11.969, 12.756, 6745, 143.757, 123.734, 59.171, 54.979 Kilometer

besitzen und der Durchmesser der Sonne 1,386.690 Kilometer beträgt. Es sind also in der That die räumlichen Dimensionen der wirksamen Körper relativ sehr klein gegenüber ihren Entfernungen.

14. Siehe hierüber dessen 1883 zu Leipzig erschienenes Werk: „Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt", p. 177. — Prof. Mach knüpft an den Satz ebendaselbst noch folgende Betrachtungen, welche sich direct auf das Thema meines zweiten Vortrages beziehen: „Wenn die Erdschwere nicht nur auf der Oberfläche der Erde, sondern auch auf hohen Bergen und in tiefen Schachten beobachtet wird, so stellt sich der an Continuität der Gedanken gewöhnte Naturforscher auch in grösseren Höhen und Tiefen, als sie uns zugänglich sind, die Erdschwere wirksam vor. Er frägt sich: Wo liegt die Grenze für die Wirkung der Erdschwere? Sollte sie nicht bis zum Monde reichen? Mit dieser Frage ist der gewaltige Aufschwung der Phantasie gewonnen, von dem die grosse wissenschaftliche Leistung bei Newton's Verstandeskraft nur eine nothwendige Folge war.

„Am Monde hat Newton zuerst erkannt, dass dieselbe Beschleunigung, welche die Fallbewegung des Steines beherrscht, auch diesen Weltkörper verhindert, sich in geradliniger Bahn von der Erde zu entfernen, während umgekehrt seine Tangentialgeschwindigkeit ihn verhindert, gegen die Erde zu fallen. Die Mondbewegung erschien also mit einem Male in einem ganz neuen Lichte und doch unter ganz bekannten Gesichtspunkten. Die neue Anschauung war reizend, indem sie bisher ganz ferneliegende Objecte erfasste, und überzeugend zugleich, indem sie die bekanntesten Elemente enthielt. Das erklärt ihre rasche Anwendung auf andere

Gebiete und ihre durchschlagende Wirkung. Nicht allein das tausendjährige Räthsel des Planetensystems hat Newton durch seine neue Anschauung gelöst, sondern auch andere Vorgänge wurden verständlich. Sowie die Schwerebeschleunigung der Erde bis zum Monde und überall hin reicht, so reichen auch die von anderen Weltkörpern herrührenden Beschleunigungen, welchen wir nach dem Principe der Continuität dieselben Eigenschaften zuerkennen müssen, überall hin, auch zur Erde. Ist die Schwere aber nichts Locales, nichts der Erde individuell Angehöriges, so hat sie auch nicht im Erdmittelpunkte allein ihren Sitz. Jedes noch so kleine Stück der Erde hat Theil an derselben. Jeder Theil beschleunigt jeden anderen. Hiemit ist ein Reichthum und eine Freiheit der physikalischen Anschauung gewonnen, von der man vor Newton keine Ahnung hatte."

15. Um im Anschlusse hieran für den mathematisch gebildeten Leser auch eine strenge Begründung dieses Satzes zu geben, denken wir uns eine fixe Kugel von dem Radius: ρ_1, welche eine bewegliche, sie ursprünglich berührende Kugel von dem Radius: ρ_2 und der Masse: m nach dem Newton-schen Gesetze anzieht, so dass für irgend einen Abstand beider Kugelcentren — er mag mit r bezeichnet werden — die Grösse der Anziehung durch:

$$K = \frac{bm}{r^2}$$

bestimmt erscheint. Eine weitere Verschiebung der beweglichen Kugel um dr in der Richtung der wirksamen Kraft erfordert dann die Arbeitsleistung: Kdr, und wird daher die gesammte mechanische Arbeit: A, welche zur Verschiebung der beweglichen Kugel aus ihrer anfänglichen Position in eine unendlich grosse Entfernung von der fixen Kugel in Anspruch genommen wird, den Werth:

$$A = \int_{\rho_1+\rho_2}^{\infty} Kdr = \int_{\rho_1+\rho_2}^{\infty} bm\,\frac{dr}{r^2} = bm \int_{\rho_1+\rho_2}^{\infty} r^{-2}dr$$

besitzen. Da nun kraft einer bekannten Fundamentalformel der Integralrechnung für jeden von: — 1 verschiedenen Werth von k:

$$\int r^k dr = \frac{r^{k+1}}{k+1} + \text{Const.}$$

ist, erhalten wir speciell für das hier zu ermittelnde Integrale die Gleichung:

$$\int_{\rho_1+\rho_2}^{\infty} r^{-2}\, dr = \left[-\frac{1}{r}\right]_{\rho_1+\rho_2}^{\infty} = -\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{\rho_1+\rho_2}\right) = \frac{1}{\rho_1+\rho_2}$$

wonach für die fragliche Arbeitsleistung die endliche, völlig bestimmte Grösse: $\frac{bm}{\rho_1+\rho_2}$ resultirt. Ueberdies wird nunmehr auch ersichtlich, dass die Voraussetzung endlicher — wenn auch noch so kleiner — Kugelradien eine wesentliche ist, denn für $\rho_1 = \rho_2 = o$ würde der Quotient $\frac{bm}{\rho_1+\rho_2}$ offenbar unendlich gross.

16. Dass auch der vorgestellte Raum diese Eigenschaft besitzt, ist zuerst von Prof. Stricker in Kürze, wie folgt, hervorgehoben worden: (Siehe dessen 1883 zu Wien erschienene Schrift: Studien über die Association der Vorstellungen, p. 44): „Mein vorgestellter Raum ist nur eine Erinnerung an den gesehenen Raum. Ich kann mir einen kleinen oder grossen Raum, ich kann mir einen scharf begrenzten oder einen verschwommenen Hintergrund vorstellen. Ich kann mir aber einen unendlichen Raum ebensowenig vorstellen, als ich einen unendlichen Raum gesehen habe. Und wem etwa der verschwommene Hintergrund, welchen der möglichst grosse Raum in der Erinnerung anzunehmen pflegt, dennoch als eine Vorstellung des unendlichen Raumes imponiren sollte, den bitte ich, auf die seitlichen Grenzen dieses vorgestellten Raumes zu achten; er wird bald finden, dass der vorgestellte Raum, er mag sich nach vorne hin noch so weit erstrecken, seitlich begrenzt ist. Will er in der Vorstellung eine seitliche Grenze los werden, muss er sich weiter vorstellen, dass er den Kopf oder die Augen wendet, und dann verschwindet die Grenze eigentlich nicht, sie wird nur verschoben; der vorgestellte Raum wird in eine andere Lage versetzt."

17. Es scheint mir angemessen, im Anschlusse hieran auf folgende schöne Betrachtungen des grossen Physikers Thomson (Handbuch der theoretischen Physik, I. Band, 2. Theil, p. 1—3) hinzuweisen: „So lange wir nicht die Natur der Materie und die Kräfte, welche ihre Bewegungen hervorbringen, vollständig kennen, wird es durchaus unmöglich sein, die exacten Bedingungen irgend einer physikalischen Frage einer mathematischen Behandlung zu unterwerfen. Doch kann man fast jedes Problem der gewöhnlichen Theile der Physik leicht approximativ durch Einführung einer Art von abstracten oder vielmehr gegen eine Grenze hin verschobenen Annahmen lösen, die uns in den Stand setzt, die Frage in ihrer modificirten Form ohne Mühe zu beantworten, während wir zugleich versichert sind, dass die (so modificirten) Umstände auf das Resultat nur von unwesentlichem Einflusse sind."

„Nehmen wir z. B. den einfachen Fall eines Hebebaumes, den man anwendet, um eine schwere Masse in Bewegung zu setzen. Wollte man die Wirkung vollständig berechnen, so hätte man gleichzeitig die Bewegungen jedes Theiles des Baumes, der Unterlage und der gehobenen Masse zu behandeln, und bei der fast gänzlichen Unkenntniss, in der wir uns über die Natur der Materie und der Molecularkräfte befinden, ist es offenbar unmöglich, das Problem in dieser Weise in Angriff zu nehmen.

„Nun lehrt die Beobachtung, dass die Theile des Baumes, der Unterlage und der Masse, eines jeden für sich, während des ganzen Processes nahezu dieselben relativen Lagen gegeneinander beibehalten, und diese Beobachtung bringt uns auf die Idee, statt der obigen unmöglichen Frage eine andere, allerdings ganz davon verschiedene Frage zu behandeln, die jedoch, während sie unendlich einfacher ist, offenbar zu nahezu denselben Resultaten wie die erstere führt.

„Zu der neuen Form der Aufgabe führt uns unmittelbar das experimentelle Ergebnis des Versuches. Stellen wir uns die in Frage kommenden Massen als vollkommen starr vor, d. h. als durchaus unfähig, ihre Form oder ihre Dimensionen zu ändern, so kann die unendliche Reihe der wirklich wirkenden Kräfte von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben; die mathematische Untersuchung hat es dann mit einer endlichen (und im Allgemeinen kleinen) statt mit einer praktisch unendlich grossen Anzahl von Kräften zu thun."

„Dass wir berechtigt sind, statt der Aufgabe, von der wir ausgingen, die neue, einfachere zu behandeln, lässt sich in folgender Weise zeigen: Die Wirkungen der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte würden sich nur in Aenderungen der molecularen Form oder des Volumens der in Rede stehenden Massen zeigen. Da diese aber (praktisch) fast unverändert bleiben, so können die Kräfte, welche Aenderungen hervorbringen oder hervorzubringen suchen, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Wir können folglich die Wirkung der Vorrichtung unter der Voraussetzung untersuchen, dass dieselbe aus getrennten Theilen bestehe, deren Form und Dimensionen unveränderlich sind."

„Wenn wir ein wenig näher auf die Sache eingehen, so finden wir, dass sich der Hebel biegt, dass einige seiner Theile ausgedehnt, andere zusammengezogen werden. Dies würde uns in eine sehr ernsthafte und schwierige Untersuchung führen, wenn wir alle Umstände zu berücksichtigen hätten. Wir finden aber (auf dem Wege der Erfahrung), dass wir eine hinlänglich genaue Lösung dieser noch viel bedenklicheren Theile der Frage erhalten, wenn wir voraussetzen (was in der Praxis nie realisirt werden kann), die Masse sei homogen, und die durch eine Ausdehnung, eine Compression oder eine Verdrehung hervorgerufenen Kräfte seien beziehungsweise diesen Deformationen an Grösse proportional, an Richtung entgegengesetzt. Mittelst dieser weiteren Annahmen kann man die Vibrationen von Stäben, Platten u. s. w., sowie den statischen Effect von elastischen Federn u. s. w. in sehr enger Annäherung behandeln."

„Wir können den Process noch weiter verfolgen. Compression entwickelt im Allgemeinen Wärme, Ausdehnung, Kälte. Diese ändern merklich die Elasticität eines Körpers. Durch Einführung solcher Betrachtungen erreichen wir ohne grosse Schwierigkeit das, was man eine dritte Approximation an die Lösung des betrachteten physikalischen Problems nennen kann."

„Wir könnten weiter die Leitung der so erzeugten Wärme durch den festen Körper und die Modificationen der Elasticität, von denen sie begleitet ist, einführen u. s. w. Darauf könnten wir die Erzeugung der thermo-elektrischen Ströme betrachten, welche (wie wir sehen werden) immer durch ungleiche Erwärmung einer Masse entwickelt werden, wenn dieselbe nicht vollkommen homogen ist. Doch wird das Gesagte genügen, zu zeigen, dass wir erstens völlig unfähig sind, irgend eine physikalische Frage mittelst der einzig vollkommenen Methode, nämlich durch Betrachtung der Umstände, welche auf die Bewegung jedes einzelnen Theiles jedes in Rede stehenden Körpers von Einfluss sind, exact und vollständig zu lösen; und dass zweitens praktische Fragen in praktisch ausreichender Weise dadurch in Angriff genommen werden können, dass man ihre Allgemeinheit beschränkt; die Beschränkungen, die man einführt, sind aus der Erfahrung hergeleitet und sind daher als die von der Natur selbst gegebene (mehr oder weniger genaue) Lösung der unendlich vielen Gleichungen zu betrachten, die uns sonst in Verlegenheit gesetzt haben würden."

III. Wärme.

18. Weitere Daten über die Anfangsgeschwindigkeiten von Projectilen bei verschiedenen Schusswaffen findet man in A. Mieg's 1884 zu Berlin erschienenem Werke: „Theoretische äussere Ballistik", p. 213.

19. Eine Abbildung und kurze Beschreibung des Hirnschen Apparates findet man beispielsweise in A. Wüllner's Compendium der Physik, 2. Band, p. 100, 101.

20. Es sei hier darauf hingewiesen, dass Thomsen gewisse Vorgänge bei der Verbindung der Moleküle und Atome auf Grundlage der Annahme zu erklären versucht hat, dass deren Geschwindigkeiten beim Zusammenstosse nach den für unelastische Kugeln geltenden Gesetzen sich ändern. — Vergl. hierüber etwa Mousson's Handbuch der Physik, 2. Aufl., 2. Band, p. 246, 247.

21. Weitere Angaben über mittlere Geschwindigkeiten, mittlere Weglängen und Stosszahlen von Gasmolekülen findet man in dem zuvor citirten Werke Mousson's, 2. Band p. 95, 96 und 103.

22. Vergl. hierüber das 1877 zu Breslau erschienene Werk von Dr. O. E. Meyer: „Die kinetische Theorie der Gase in elementarer Darstellung", p. 230, 231.

23. Der Erste, welcher den Gasdruck aus molekularen Stössen hergeleitet und die hiebei gewonnene Ansicht zur Begründung eines wichtigen empirischen Gesetzes verwerthet hat, war Daniel Bernoulli, dessen Argumentation (enthalten in seinem 1738 erschienenen Werke: Hydrodynamica) R. Meyer (l. c. p. 11), wie folgt, charakterisirt: „Bernoulli stellt sich in einem Gefässe mit beweglichem, aber luftdicht schliessendem Deckel, also etwa in dem Stiefel einer Luftpumpe, eine Gasmasse vor, welche durch den vermehrten Druck auf den Deckel oder Kolben zusammengedrückt werden kann. Besteht nun das Gas aus einer grossen Zahl sich bewegender Partikeln, und entsteht der von ihm ausgeübte Druck aus der Summe der von jenen gegen die Wände des Gefässes gerichteten Stösse, so wird Gleichgewicht stattfinden, wenn die Resultante aller Stösse gegen den Deckel dem auf ihn ausgeübten Drucke gleich ist.

„Wird das Gas zusammengepresst und das Volumen verkleinert, so vermehrt sich die Zahl der Stösse, welche die jetzt dichter gelagerten Partikeln gegen die Wände ausführen, und zwar aus einem doppelten Grunde: Erstens befindet sich in der unmittelbar an der Wandung befindlichen Schicht des Gases eine grössere Anzahl von Theilchen, und zweitens stossen die dichter gedrängten Theilchen häufiger zusammen und werden, beim Zusammenstosse zurückgeschleudert, häufiger gegen die Wand geworfen. Ist durch die Compression des Gases das Volumen im Verhältnisse von $1 : s^3$ verringert worden, so ist die Entfernung zweier beliebiger Theilchen von einander im Verhältnisse: $1 : s$ vermindert; demnach ist die Zahl der Theilchen, welche sich in der Grenzschichte mit einem unveränderlich gedachten Stücke der Wandung in Berührung befinden, im Verhältnisse von $s^2 : 1$ vermehrt worden; zugleich ist die Zahl der in einer bestimmten Zeit erfolgenden Zusammenstösse der Theilchen unter einander im Verhältnisse von $s : 1$ gewachsen, und in demselben Masse hat die Zahl der die Wand treffenden Stösse eines Theilchens der Grenzschicht zugenommen. Da also die Zahl der stossenden Partikeln im Verhältnisse von $s^2 : 1$, und die Anzahl der Stösse jeder einzelnen im Verhältnisse von $s : 1$ vermehrt worden ist, so hat die Summe der einen beliebigen Theil der Wand in einer bestimmten

Zeit treffenden Stösse im Verhältnisse von $s^3:1$ oder in demselben Verhältnisse zugenommen, in welchem das Volumen des Gases verkleinert wurde. Der Druck eines Gases variirt also im umgekehrten Verhältnisse seines Volumens, womit das Boyle'sche Gesetz aus der Hypothese der molekularen Stösse abgeleitet ist."

24. Die erste, wissenschaftlich strenge Ableitung dieser wichtigen Beziehung zwischen Druck, Volumen und mittlerer Geschwindigkeit der bewegten Gasmoleküle rührt von R. Clausius her, dessen Ideengang (Ges. Abhandlungen aus der mechanischen Wärmetheorie, 2. Abth., p. 248—251) folgender ist: „Wenn das Gas ein ideelles ist, was wir im Folgenden immer voraussetzen wollen, indem wir von den Unregelmässigkeiten, welche durch den unvollkommenen Gaszustand entstehen, absehen, so kann man bei der Bestimmung des Druckes, wie es schon Krönig gethan hat, statt die Bewegung ganz so zu betrachten, wie sie wirklich stattfindet, einige Vereinfachungen einführen.

„Die Gesammtzahl der Stösse, welche die Wand erleidet, bleibt ungeändert, wenn man annimmt, dass sich die Moleküle untereinander in ihrer Bewegung nicht stören, sondern jedes Molekül so lange geradlinig fortfliegt, bis es eine Wand trifft.

„Ferner ist es zwar in Wirklichkeit nicht nöthig, dass ein Molekül, wie es nach den gewöhnlichen Elasticitätsgesetzen bei elastischen Kugeln an einer vollkommen festen Wand sein müsste, unter demselben Winkel und mit derselben Geschwindigkeit von der Wand zurückfliegt, welche es beim Heranfliegen hatte; nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit kann man aber annehmen, dass es ebenso viele Moleküle gibt, deren Zurückwerfungswinkel in ein gewisses Intervall, z. B. zwischen 60° und 61° fällt, als solche, deren Einfallswinkel in dieses Intervall fällt, und auch an der Geschwindigkeit der Moleüle wird im Ganzen genommen durch die Wand nichts geändert. Es kann daher in dem Endresultate keinen Unterschied hervorbringen, wenn man annimmt, dass für jedes Molekül der Winkel und die Geschwindigkeit der Zurückwerfung gleich denen des Einfalls seien. Hienach würde ein Molekül in denselben Richtungen, welche ein Lichtstrahl zwischen ebenen Spiegeln wählt, so oft zwischen den beiden grossen Wänden hin und her gehen, bis es einmal eine Seitenwand träfe; von dieser zurückgeworfen würde es eine ähnliche Reihe von Hin- und Hergängen beginnen u. s. f.

„Endlich findet in der Wirklichkeit gewiss die mannigfaltigste Verschiedenheit in den Geschwindigkeiten der einzelnen Moleküle statt. Bei der Betrachtung aber kann man allen Molekülen eine gewisse mittlere Geschwindigkeit zuschreiben. Diese mittlere Geschwindigkeit muss, wie aus den folgenden Formeln ersichtlich ist, um einen gleichen Druck zu erhalten, so gewählt werden, dass die lebendige Kraft aller Moleküle bei der mittleren Geschwindigkeit dieselbe ist wie bei den wirklich stattfindenden Geschwindigkeiten.

„Nach diesen Voraussetzungen kann man leicht angeben, wie oft ein Molekül während der Zeiteinheit gegen die zur Betrachtung ausgewählte Wand stossen muss. Nämlich so oft, wie es bei der ihm eigenthümlichen Bewegungsrichtung während der Zeiteinheit von dieser Wand zur andern und wieder zur ersten zurückfliegen kann. Bezeichnen wir mit h den Abstand der beiden Wände und mit θ den Winkel, welchen die Bewegungsrichtung mit der Normale bildet (welcher Winkel nur von 0^0 bis 90^0 gerechnet wird), so ist $\frac{h}{\cos\theta}$ die Länge des Weges von der einen Wand zur andern, und folglich, wenn u die Geschwindigkeit des Moleküls bedeutet, die Anzahl der Stösse gegen die Wand: $\frac{u\cos\theta}{2h}$.

„Was die Bewegungsrichtung der einzelnen Moleküle anbetrifft, so müssen wir annehmen, dass durchschnittlich jede Richtung gleich oft vorkommt. Daraus folgt, dass die Anzahl der Moleküle, deren Bewegungsrichtungen mit der Normale Winkel bilden, welche zwischen den Werthen θ und $\theta + d\theta$ liegen, zur ganzen Anzahl der vorhandenen Moleküle in demselben Verhältnisse steht, wie der Flächeninhalt einer Kugelzone, deren Grenzkreise den Winkeln θ und $\theta + d\theta$ entsprechen, zum Flächeninhalte der Halbkugel also wie: $2\pi \sin \theta d\theta : 2\pi$.

„Demnach ist, wenn die ganze Anzahl der vorhandenen Moleküle mit n bezeichnet wird, die Anzahl derer, welche dem Winkelintervall von θ bis $\theta + d\theta$ entsprechen: $n \sin \theta d\theta$ und die Anzahl der von ihnen herrührenden Stösse: $\frac{nu}{2h} \cos \theta \sin \theta d\theta$.

„Um die Stärke eines Stosses zu bestimmen, muss die ganze Geschwindigkeit in zwei Componenten zerlegt werden, die eine parallel der Wand, die andere senkrecht darauf. Die erstere wird durch den Stoss nicht geändert und kommt also bei der Bestimmung der Stärke des Stosses nicht in Betracht, die letztere aber, welche ihrer Grösse nach durch $u \cos \theta$ dargestellt wird, wird durch den Stoss in die entgegengesetzte verwandelt. Die Wirkung der Wand auf das Molekül besteht also darin, dass sie ihm in der Richtung der Normale in dem einen Sinne die Geschwindigkeit: $u \cos \theta$ entzieht, und im anderen Sinne dieselbe Geschwindigkeit mittheilt. Daraus ergibt sich als Grösse der Bewegung, welche dem Molekül mitgetheilt wird, wenn wir die Masse des Moleküls mit m bezeichnen: $2mu \cos \theta$.

„Wenden wir dieses auf alle die Moleküle an, welche dem Winkelintervalle von θ bis $\theta + d\theta$ entsprechen, so erhalten wir während der Zeiteinheit

$$\frac{nu}{2h} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

mal dieselbe Wirkung, und die diesen Molekülen während der Zeiteinheit mitgetheilte Bewegung ist somit:

$$\frac{nmu^2}{h} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Diesen Ausdruck braucht man nur noch von $\theta = o$ bis $\theta = \frac{\pi}{2}$ zu integriren, um die Bewegung zu erhalten, welche die Wand allen Molekülen, die während der Zeiteinheit gegen sie stossen, mittheilt, nämlich: $\frac{nmu^2}{3\,h}$.

„Denken wir uns nun die Wand als frei beweglich, so muss, damit sie durch die Stösse der Moleküle nicht zurückgetrieben wird, von der anderen Seite eine Gegenkraft vorhanden sein, und zwar kann man sich wegen der grossen Anzahl der Stösse und der Schwäche jedes einzelnen die entgegenwirkende Kraft als eine stetige denken. Die Stärke dieser Kraft ist dadurch bestimmt, dass sie die durch den vorigen Ausdruck dargestellte Bewegung während der Zeiteinheit muss hervorbringen können. Da nun aber die Grösse der Bewegung, welche eine Kraft während der Zeiteinheit hervorbringen kann, das Mass der Kraft selbst ist, so stellt der vorige Ausdruck ohne Weiteres jene Kraft und somit auch den vom Gase ausgeübten Druck, welchem sie das Gleichgewicht hält, dar.

„Nennen wir den Flächeninhalt der Wand α, und den Druck auf die Flächeneinheit p, so ergibt sich:

$$p = \frac{nmu^2}{3\alpha h}.$$

„Das hierin vorkommende Product αh stellt den Rauminhalt des Gefässes oder das Volumen des Gases dar. Bezeichnen wir dieses mit v, so kommt:

$$pv = \frac{nmu^2}{3}.$$

„ . . . Das Product nm stellt die Masse des ganzen gegebenen Gasquantums dar. Diese dürfen wir aber nicht unmittelbar mit dem Gewichte des Gases als identisch setzen, sondern sie ist das Gewicht, dividirt durch die Schwerkraft g. Nennen wir das Gewicht q, so ist $nm = \frac{q}{g}$, und man erhält somit aus der vorigen Gleichung: $u^2 = \frac{3gpv}{q}$."

Wir wollen nun als Längeneinheit das Meter, als Gewichtseinheit das Kilogramm wählen und voraussetzen, es sei speciell ein Kilogramm atmosphärischer Luft unter dem Drucke von 1 Atmosphäre, d. i. 10.333 Kilogramm auf das Quadratmeter gegeben. Dann ist $g = 9{\cdot}81$ Meter, $p = 10.333$ und, da das Volumen eines Kilogramms Luft unter jenem Drucke bei der Temperatur des Gefrierpunktes 0·7733 Cubikmeter einnimmt, $v = 0{\cdot}7733$, $q = 1$. — Die diesbezügliche Geschwindigkeit der Luftmoleküle ergibt sich dann nach einer leichten Rechnung als: $u = 485$ Meter.

25. Diese Gleichung wird gemeiniglich in der ihr von Clapeyron gegebenen Form: $pv = R\ (273 + t)$ geschrieben, wobei die Erfahrungszahl R z. B. für atmosphärische Luft gleich 29·272 ist. — Vergl. hierüber etwa Zeuner's mechanische Wärmetheorie, 2. Aufl., p. 103—105.

26. Welche Bedeutung Helmholtz einer, solche Kräftewirkungen voraussetzenden Naturauffassung ursprünglich zugeschrieben hat, wird aus den Schlussworten der Einleitung zu seiner bereits citirten Abhandlung (p. 16) ersichtlich: „Die Aufgabe der physikalischen Naturwissenschaften bestimmt sich schliesslich dahin, die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche, anziehende und abstossende Kräfte, deren Intensität von der Entfernung abhängt. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe ist zugleich die Bedingung der vollständgen Begreiflichkeit der Natur." ... „Die theoretische Naturwissenschaft wird daher, wenn sie nicht auf halbem Wege des Begreifens stehen bleiben will, ihre Ansichten mit der aufgestellten Forderung über die

Natur der einfachen Kräfte und deren Folgerungen in Einklang setzen müssen. Ihr Geschäft wird vollendet sein, wenn einmal die Zurückleitung der Erscheinungen auf einfache Kräfte vollendet ist, und zugleich nachgewiesen werden kann, dass die gegebene die einzig mögliche Zurückleitung sei, welche die Erscheinungen zulassen. Dann wäre dieselbe als die nothwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen; es würde derselben alsdann also auch objective Wahrheit zuzuschreiben sein."

27. Näheres hierüber findet man beispielsweise in der 1881 zu Leipzig erschienenen deutschen Ausgabe von Newcomb's populärer Astronomie, p. 416—420.

IV. Elektricität und Magnetismus.

28. Es erscheint mir angemessen, den Leser hier mit jener Charakteristik bekannt zu machen, welche der grosse englische Physiker Cl. Maxwell im ersten Bande seines Lehrbuches der Elektricität und des Magnetismus (siehe die autorisirte deutsche Uebersetzung, p. 40—43) von beiden diesbezüglichen Hypothesen gegeben hat:

Hypothese der zwei Fluida.

In der Hypothese der zwei Fluida nimmt man an, dass jeder Körper in seinem unelektrischen Zustande mit gleichen Mengen positiver und negativer Elektricität geladen ist. Dabei sollen diese Mengen so gross sein, dass kein Elektrisirungsprocess bis jetzt einen Körper gänzlich einer Elektricitätsart hat berauben können. Die Elektrisirung eines Körpers besteht dann nach dieser Hypothese in der Uebertragung einer gewissen Menge P positiver Elektricität von einem Körper A auf einen anderen Körper B, oder einer gewissen Menge N negativer Elektricität von B nach A oder auch in einer Combination beider Processe.

Es hat also A nach der Elektrisirung $P + N$ Einheiten negativer Elektricität mehr im Verhältniss zu der ihm noch gebliebenen positiven Elektricität. Letztere denkt man sich mit einer gleichen Menge negativer Elektricität verbunden und bezeichnet sie zusammen mit dieser als gebundene oder latente Elektricität. $P + N$ aber heisst die freie Elektricität des Körpers A.

Da die beiden Elektricitätsarten nach dieser Theorie von einem Körper zu einem anderen übergeführt werden können und zudem in Leitern eine ausserordentliche Beweglichkeit zeigen, so bezeichnet man sie meistentheils als Fluida. Aber abgesehen von der Beweglichkeit schreiben ihnen diejenigen, welche die Theorie nach ihrer mathematischen Seite verfolgen, fast keine einzige der sonstigen Eigenschaften der Flüssigkeiten zu, also weder Trägheit, noch Gewicht, noch Elasticität. Das Wort Fluidum hat jedoch Viele und unter ihnen auch Gelehrte, welche wenig an naturphilosophisches Denken gewöhnt waren, anzunehmen verleitet, dass es ganz unentbehrlich für den Ausbau der ihnen fasslich scheinenden Theorie sei.

Wir werden später sehen, dass die mathematische Behandlung unseres Gegenstandes gerade von denen am meisten gefördert worden ist, welche sich der Terminologie der Theorie von zwei Fluidis bedienten. Ihre Resultate sind aber unabhängig von jener Hypothese, weil sie aus Daten erhalten sind, die jederzeit durch das Experiment verificirt werden können, also keinen Zweifel an ihrer Richtigkeit zulassen. Deshalb ist auch die Bestätigung der mathematischen Resultate durch die Erfahrung kein Prüfstein für die Richtigkeit der speciellen Lehren jener Theorie, aber auch keiner gegen dieselbe.

Die Einführung der beiden Fluida gestattet uns die negative Elektrisirung von A und die positive Elektrisirung von B in dreifacher Weise mit demselben Endresultate zu erreichen. Früher haben wir sie dadurch zu Stande gebracht, dass wir P Einheiten positiver Elektricität von A nach B und N Einheiten negativer Elektricität von B nach A übergeführt haben. Bringen wir jetzt $P + N$ Einheiten positiver Elektricität von A nach B oder $P + N$ Einheiten negativer Elektricität von B nach A, so müssen offenbar A und B ebensoviel freie Elektricität erhalten wie nach der zuerst angegebenen Operation, aber die in A gebundene Elektricitätsmenge ist im zweiten Falle kleiner und im dritten grösser, als sie im ersten war.

Demnach würde man nach dieser Theorie nicht blos die freie Elektricität eines Körpers, sondern auch seine gebundene ändern können. Bis jetzt hat man noch keine besonderen Eigenschaften an einem Körper, wenn sein Inhalt an gebundener Elektricität geändert wurde, in Erscheinung treten sehen. Wir müssen daher schliessen, dass entweder die gebundene Elektricität überhaupt keine Eigenschaften besitzt, oder dass ihre Menge in einem Körper nicht verändert werden kann. Die erste dieser Alternativen bietet den Mathematikern weiter keine Schwierigkeiten, denn da diese den Fluidis keine anderen Eigenschaften zuschreiben als die der Attraction und Repulsion, so müssen sich die beiden Elektricitätsarten, wenn sie sich binden, in ihren Wirkungen aufheben und so jeder Beobachtung entgehen. Wer jedoch mit dem Worte Fluidum substantielle Eigenschaften verbinden zu müssen glaubt, dem wird es immer undenkbar bleiben, dass die Combinirung der zwei Fluida sie gänzlich jeder Eigenschaft berauben sollte, so dass sie weder das Gewicht, noch die Masse, noch sonst eine Qualität des Körpers, in dem sie sich befinden, zu ändern vermögen. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, haben daher Einige angenommen, dass jede Elektrisirung in einem Transport genau gleicher Quantitäten der beiden Fluida nach entgegengesetzten Richtungen bestehe, so dass die absolute Summe der beiden Fluida in einem Körper sich stets gleich bliebe. Durch dieses neue Gesetz retten sie zwar den Schein, vergessen aber vollständig, dass sie es sehr wohl entbehren könnten, wenn sie nicht darauf ausgingen, die zwei Fluida auf alle Fälle mit den Thatsachen in Einklang zu bringen und ihre Theorie davor zu bewahren, Phänomene vorauszusagen, die in der That nicht existiren.

Hypothese von Einem Fluidum.

Die Hypothese von Einem Fluidum unterscheidet sich von der der zwei Fluida eigentlich nur dadurch, dass sie für das eine Fluidum der letzteren, im Allgemeinen für das negative, alle Eigenschaften der gewöhnlichen Materie vindicirt und nur das zweite, das positive, als elektrisches Fluidum bezeichnet.

Die Theilchen dieses Fluidums sollen sich untereinander im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung abstossen, dagegen die Theilchen des Körpers, in dem sie sich befinden, nach demselben Gesetze anziehen. Aehnlich sollen die Theilchen der Materie gegen einander eine Abstossung und gegen das elektrische Fluidum eine Anziehung ausüben. Doch nimmt man an, dass die Attraction zwischen Einheiten der Materie und Elektricität etwas grösser ist als die gegenseitige Repulsion gleicher Einheiten von Materie bezüglich Elektricität. Eine Einheit Materie in Verbindung mit einer Einheit Elektricität soll also eine entsprechende Combination anziehen. Die Kraft der Attraction zwischen Combinationen von Elektricität und Materie wird aber als sehr gering gegen die der Attraction freier Elektricität gegen freie Materie betrachtet. Sie soll übrigens dazu dienen, die allgemeine Gravitation zu erklären.

Enthält ein Körper so viel Fluidum, dass seine Elektricität ein ausserhalb befindliches elektrisches Partikel ebenso stark abstösst, als seine materiellen Theilchen es anziehen, so heisst er elektrisch gesättigt. Enthält er mehr Fluidum, so besitzt er einen Ueberfluss an Elektricität und ist überladen; enthält er weniger, so ist er nicht gesättigt oder unterladen und hat ein Deficit von Elektricität. Diese Theorie lehrt, unähnlich der von den zwei Fluidis, nicht mehr, als die Erfahrung bestätigen kann. Sie setzt aber voraus, dass die Dichtigkeit der Elektricität so gering ist, dass keine bisher erreichbare Elektrisirung die Masse oder das Gewicht eines Körpers zu verändern vermag. Zudem ist sie auch nicht im Stande, zu erklären, weshalb gerade die Glaselektrisirung in einem Ueberschuss an Elektricität im Verhältniss zur Materie bestehen soll.

Ganz ungerechtfertigt ist aber ein anderer Vorwurf, der dieser Theorie selbst von competenter Seite gemacht worden ist. Man sagte nämlich, dass die Lehre von der Repulsion zweier von Elektricität freier materieller Theilchen in directem Gegensatze zu der allgemeinen Erfahrung stehe, dass materielle Theilchen sich im ganzen Universum anziehen, denn nach jener Lehre müsste das gerade Gegentheil stattfinden. Das würde richtig sein, wenn eben die Weltkörper ganz frei von Elektricität wären, denn dann hätten sie die höchste negative Ladung und müssten sich gegenseitig abstossen. Zu einer solchen Annahme liegt aber nicht der geringste Grund vor. Man wird vielmehr mit grösserer Wahrscheinlichkeit voraussetzen dürfen, dass die Erde und alle anderen Weltkörper sich in einem unelektrischen Zustande befinden, das heisst, ebensoviele Einheiten Elektricität als Materie besitzen. Ihre gegenseitige Anziehung wird dann, wie wir schon bemerkt haben, durch den Ueberschuss der Attraction ungleichnamiger Substanzen über die Repulsion gleichnamiger verursacht. Inzwischen ist nicht zu leugnen, dass die Einführung dieses Ueberschusses etwas gekünstelt erscheint, und dass sie einen mächtigen Vorwurf gegen die Theorie bildet.

29. Ich habe diese Worte deshalb gebraucht, weil, dank der internationalen elektrischen Ausstellung in Wien, populäre Schriften über Elektricität bereits in allen Kreisen Verbreitung gefunden haben, und der Vortragende daher bezüglich der Auffassungsweise gewisser elektrischer Phänomene gegenüber einem grossen, gebildeten Publicum eine gebundene Marschroute besitzt. Diese Einsicht war auch für den im vierten Vortrage eingeschlagenen Entwicklungsgang massgebend.

30. Schon Maurice Lévy hat den galvanischen Strom mit einem Wasserstrome verglichen, und Professor Dr. Mach demonstrirt sogar das abwechselnde Fallen und Steigen des Potentialniveaus bei verzweigten Strömen mittelst eines Stromes gefärbter Flüssigkeit in verzweigten Röhren mit eingesetzten Piézometern. — Im Uebrigen verweise ich jene Leser, welche sich für eine gründlichere und dabei doch elementare Durchführung der merkwürdigen diesbezüglichen Analogien interessiren, auf die im 86. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie (II. Abth., Juliheft, 1882) erschienene Abhandlung von G. Schmidt: „Analogien zwischen elektrischen und Wasserströmen, calorischer und elektrischer Kraftübertragung."

31. Ich bemerke hiezu prophylaktisch, dass aus der Brauchbarkeit einer Hypothese noch nicht deren unbedingte Zulässigkeit gefolgert werden darf.

32. Diese Redewendung war nothwendig, weil anderseits die hier vertretene Auffassung der Gravitation von der diesbezüglichen Erklärung auf Grundlage der Hypothese von Einem Fluidum (vergleiche die erste Anmerkung zu diesem Vortrage) wesentlich abweicht.

33. Die Uebersichtlichkeit der Darstellung erfordert es, gleichartige Grössen, wie beispielsweise Querschnitte, mit demselben Buchstaben zu bezeichnen, wobei dann noch symbolisch anzuzeigen ist, welche dieser Grössen in einem gegebenen Specialfalle in Betracht gezogen wurde. Diesem Zwecke dienen beispielsweise die dem Buchstaben q bei-gegebenen Ziffern: 1, 2, seine sogenannten Indices, welche daher keine Rechnungszeichen, sondern lediglich Unterscheidungszeichen vorstellen. Dasselbe gilt natürlich auch von den Indices der später zur Verwendung kommenden Buchstaben *v* und *w*.

34. Der Grundgedanke zu diesem Gleichnisse rührt von Gauss her. (Siehe hierüber die Gesammtausgabe seiner Werke, 5. Band, p. 319—321).

35. Die Experimente 1) und 3) wurden von mir nach dem Vortrage zweimal demonstrirt.

36. Die drei hier ausgesprochenen Gesetze für die Wechselwirkungen beweglicher Ströme wurden zuerst von Ampère aufgestellt, welcher auch die Wechselwirkungen von Magneten auf Grundlage der Annahme von, ihre Moleküle umkreisenden Elementarströmen zu erklären versucht hat.

37. Selbstverständlicher Weise wurde auch diese Erscheinung demonstrirt.

38. Siehe hierüber die Gesammtausgabe der wissenschaftlichen Abhandlungen von Helmholtz, 1. Band, pag. 49—51.

39. Der diesbezügliche Vortrag ist am 28. Februar 1883 von Herrn Max Jüllig, diplom. Ingenieur, gehalten worden.

40. Zur näheren Orientirung über die Nutzeffecte verschiedener Ferntriebwerkssysteme diene folgende, der gekrönten Preisschrift A. Beringer's: „Kritische Vergleichung der elektrischen Kraftübertragung mit den gebräuchlichsten mechanischen Uebertragungssystemen“ — entnommene Tabelle:

Triebwerkslänge:	Elektrisches Triebwerk:	Wasser-Triebwerk:	Luft-Triebwerk:	Drahtseil-Triebwerk:
100 M.	0·69	0·50 (0·65)	0·55 (0·60)	0·96
500 M.	0·68	0·50 (0·65)	0·55 (0·60)	0·93
1000 M.	0·66	0·50 (0·65)	0·55 (0·60)	0·90
5000 M.	0·60	0·40 (0·55)	0·50 (0·55)	0·60
10.000 M.	0·51	0·35 (0·45)	0·50 (0·55)	0·36
20.000 M.	0·32	0·20 (0·25)	0·40 (0·55)	0·13

Die in derselben gegebenen Decimalbrüche bestimmen die Nutzeffecte der betreffenden Triebwerkssysteme für verschiedene Distanzen, und zwar gelten speciell die eingeklammerten Zahlen für die Uebertragung grösserer Kräfte. — Die Schlussworte der citirten Schrift lauten: „Wirft man noch einmal einen Rückblick auf die gefundenen Resultate, so sieht man, dass für all die Fälle, in denen die Anwendung eines Drahtseil-Triebwerkes ausgeschlossen ist, das elektrische Triebwerk vor dem Wasser- und Luft-Triebwerk bei Weitem den Vorzug verdient. Wenn hingegen auch das Drahtseil-Triebwerk in Betracht zu ziehen ist, so liefert dieses bis zu Längen von 1 Kilometer eine wesentlich billigere Kraft als die übrigen, und erst zwischen 1 und 5 Kilometer tritt das elektrische wieder an die Spitze.

„Somit ist schon jetzt das elektrische Triebwerk fähig, in unendlich vielen Fällen für die übrigen Systeme einzutreten, und je weiter man in der Construction der dynamoelektrischen Maschinen vorschreiten wird, desto mehr wird sich das Feld der Anwendbarkeit ausdehnen, und desto weiter wird sich die Grenze hinausschieben, bis zu welcher eine rationelle Uebertragung von Triebkraft überhaupt möglich ist."

41. Siehe hierüber den Anzeiger über die Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften in Wien vom 30. November 1882, in welchem der Inhalt des, von Herrn Popper am 6. November 1862 behufs Wahrung seiner Priorität deponirten versiegelten Schreibens publicirt worden ist.

V. Verwerthung des Princips ausserhalb der Physik.

42. Vergleiche dessen Einleitung in das Studium der Naturwissenschaften, §. 127.

43. Dies geschah in gründlicher Weise zuerst durch G. Schadow, dessen Werk: „Polyklet oder von den Massen des Menschen nach dem Geschlechte und Alter" (Berlin, 1834) ausserdem eine sehr genaue Uebersicht über die auf sein Thema *bezügliche Literatur enthält.*

44. Siehe hierüber dessen 1854 zu Leipzig erschienenes Werk: „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt."

45. Hiebei beschränkte sich Zeising nicht etwa auf lebende Menschen, sondern wies die Richtigkeit seines Proportionalgesetzes auch an getreuen Copien berühmter Kunstwerke, wie des Apollo von Belvedere, des Antinous, der mediceischen Venus etc. nach.

46. Im Anschlusse hieran suchte Zeising die Giltigkeit seines Gesetzes auch für gewisse, der Zoologie, Botanik und Mineralogie, der Chemie, Astronomie etc. angehörige Gruppen von Thatsachen nachzuweisen, wobei er dessen factisches Anwendungsgebiet allerdings zumeist weit überschätzte. — Was speciell die Bedeutung des „Grundgesetzes" von Zeising für das Studium gewisser thierischer Körperformen anbelangt, so verweise ich hier auf das 1878 in Wien erschienene Werk von Prof. Dr. M. Wilckens: „Form und Leben der landwirthschaftlichen Hausthiere", p. 721—756.

47. Siehe hierüber dessen Werke: 1) „Das Gesetz des Wachsthums und der Bau des Menschen." Wien, 1862. — 2) „Das Quadrat, die Grundlage aller Proportionalität in der Natur und das Quadrat aus der Zahl Sieben die Uridee des menschlichen Körperbaues." Wien, 1865.

48. So wurde z. B. die Regel: Das Volumen jedes geraden Kreiskegels ist gleich seiner Grundfläche, multiplicirt mit dem dritten Theile seiner Höhe, schon von Oettelt („Praktischer Beweis, dass die Mathesis bey dem Forstwesen unentbehrliche Dienste thue." Eisenach, 1765) für die Cubirung unentwipfelter Baumstämme empfohlen.

49. So erschienen unter Anderem 1831 die umfangreichen vergleichenden Untersuchungen A. Braun's über die Anordnung der Schuppen an den Tannenzapfen (Verhandlungen der kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher, 15. Band, 1. Abtheilung) und 1837 in den „Annales des sciences naturelles" die in mathematischer Hinsicht besonders interessanten Aufsätze der Brüder L. und A. Bravais über die geometrische Anordnung der Blätter und der Blüthenstände.

50. Als Beleg hiefür mag die 1838 in den „Philosophical Transactions of the Royal Society of London", part II publicirte Abhandlung von H. Moseley: On the geometrical forms of turbinated and discoid shells" dienen, an welche sich 1840 die beiden Arbeiten F. Naumann's: „Beitrag zur Conchyliometrie" und: „Ueber die Spiralen der Ammoniten" (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Band 50, 51) anschlossen.

51. Siehe hierüber dessen 1837 in Stralsund erschienenes Werk: „Beitrag zur Holzmesskunst."

52. Derartige Tafeln heissen durchgängig „Massentafeln", und mag hier zur Charakteristik ihrer Einrichtung wenigstens Ein Beispiel aus den in der forstlichen Praxis sehr oft benützten Behm'schen Massentafeln (2. Aufl., p. 33) angeführt werden. Man findet daselbst folgende, auf „haubare", über 90 Jahre alte Fichten bezügliche Tabelle, welche den Durchmesser des Stammes in 1·3 Meter Höhe in Centimetern, die Stammhöhe in Metern als gegeben voraussetzt:

Durchmesser	Höhe 25	26	27	28	29	30	31	32	33
18	0·33	0·34	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
20	0·40	0·41	0·43	0·44	. .	. .	. .	. .	. .
22	0·47	0·49	0·51	0·53	0·55	0·57	. .	. .	. .
24	0·56	0·58	0·60	0·62	0·65	0·67	0·69	0·71	. .
26	0·65	0·67	0·70	0·72	0·75	0·77	0·80	0·83	0·85
28	0·74	0·77	0·80	0·83	0·86	0·89	0·92	0·95	0·98
30	0·84	0·87	0·91	0·94	0·97	1·01	1·04	1·07	1·11

-- Die in der Tabelle angegebenen Decimalbrüche bestimmen das fragliche Stammvolumen in „Festmetern" auf 2 Decimalen.

53. Siehe hierüber meine im 5., 6., 7., 8., 9., 10. und 11. Hefte des dritten Jahrganges der gegenwärtig von Seckendorff redigirten Zeitschrift: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen" veröffentlichten analytischen Untersuchungen über den Zusammenhang geometrisch bestimmbarer Stammformen mit ihren Formzahlen.

54. Im allgemeinen Falle bleibt das Gebilde während seines Wachsthums nur geometrisch affin zu sich selbst, wobei sowohl die Formen der einzelnen Stammquerschnitte, als auch die Längsschnitte des Stammes mannigfaltig abändern können. So verdickt sich beispielsweise der anfangs walzenförmige Stamm von *Heritiera Fomes* Willd., einer in Ostindien einheimischen Sterculiacee, im Laufe seiner weiteren Entwicklung vorherrschend nach zwei entgegengesetzten Seiten, so dass die Querflächen sich allmälig in langgestreckte Ellipsen verwandeln, worauf auch die Bezeichnung: „Bretterbaum" Bezug nimmt. Ebenso bauchen sich die ursprünglich cylindrischen Stämme von *Oreodoxa regia* Kunth und *Iriartea ventricosa* Mart. (siehe hierüber das in dem Zeitraume von 1823 bis 1849 in München erschienene Werk von Dr. v. Martius: „Genera et species Palmarum", Tafel 156 und 38) später in ihren oberen Hälften so stark aus, dass beispielsweise bei der letztgenannten Palme die dem dritten Viertel der Schafthöhe zugehörige Querfläche im Vergleiche zu jener, welche der halben Höhe entspricht, einen drei- bis viermal grösseren Inhalt besitzen kann.

55. Dieses im Jahre 1846 zuerst veröffentlichte Gesetz bestimmt die Wechselwirkung zweier elektrischer Theilchen: e, e' für irgend einen Abstand: r durch die Formel:

$$\frac{e\,e'}{r^2}\left\{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\,\frac{d^2r}{dt^2}\right\},$$

wobei c eine gewisse Erfahrungszahl repräsentirt. — In der

Folge zeigte Helmholtz, dass das genannte Gesetz dem Principe von der Erhaltung der Kraft insoferne widerspreche, als zwei elektrische Theilchen, die sich nach diesem Gesetze bewegen und ihre Bewegung mit einer bestimmten endlichen Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander eine unendliche lebendige Kraft erreichen, also eine unendlich grosse Arbeit leisten könnten (vergleiche Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, I. Band, p. 553, 554), welche Argumentation Weber durch die Bemerkung zu entkräften suchte, dass die hiebei vorausgesetzte endliche Geschwindigkeit grösser sei als irgend eine empirisch nachweisbare Geschwindigkeit. (Vergleiche die dritte Auflage von Zöllner's Werk: „Ueber die Natur der Kometen", pag. 122—124.)

56. Die Voraussetzungen, unter welchen ich in der diesbezüglichen Abhandlung: „Ueber eine Erweiterung der Giltigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik" (Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissensch. zu Wien, LXXXI. Band, II. Abtheilung, p. 399 bis 414) die Giltigkeit des Princips von der Erhaltung der Kraft dargethan habe, sind folgende:

1) Die zwischen den Punkten des betreffenden freien materiellen Systems wirksamen Kräfte sind Anziehungskräfte, welche dem dritten Newton'schen Bewegungsgesetze genügen.

2) Ihre Richtungen fallen in jene der jeweiligen Verbindungslinien der einzelnen Systempunkte.

3) Ihre Intensitäten variiren derart, dass sich — unter m_a, m_b die Massen zweier beliebiger Systempunke, unter $r_{a,b}$ deren Abstand im Zeitmomente t verstanden — die wechselseitige Attractionswirkung beider Massen durch einen Ausdruck von der Gestalt:

$$km_a\, m_b\, f\,(r_{a,b}) \left\{\varphi\,(t, v_1^2, v_2^2, \ldots v_n^2)\right\}^2$$

wiedergeben lässt.

4) Die Functionen f und φ sind einwerthige, stetige und endliche Functionen ihrer variablen Argumente, deren Form für alle in Betracht kommenden Werthe von $t, v_1, v_2, \ldots v_n; r_{1,2}, r_{1,3}, \ldots r_{n-1,n}$ dieselbe bleibt.

57. Vergleiche in dieser Hinsicht auch die Folgerungen A. Mayer's in dessen Abhandlung: „Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welcher sich aus dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt." (Mathematische Annalen, XIII. Band, p. 20—34), ferner die hierauf bezüglichen Schlüsse von Prof. F. Zöllner im I. Bande seiner „Wissenschaftlichen Abhandlungen", p. 129.

58. Näheres hierüber findet man beispielsweise in W. Wundt's „Grundzügen der physiologischen Psychologie", I. Band, p. 342, 343.

59. Von diesem Standpunkte aus ist natürlich auf die Ableitung des bekannten Satzes: Die Merklichkeit einer Empfindung wächst proportional dem Logarithmus des Reizes — unzulässig. Näheres hierüber findet der Leser in dem zuvor citirten Werke von Wundt, I. Band, p. 355—365.

60. Zur weiteren Aufklärung des Lesers mögen hier noch folgende Worte von Prof. Dr. Mach (siehe dessen bereits citirtes Werk, p. 477, 478) dienen: „In der richtigen Erkenntniss der Unterordnung des Specialwissens unter das Gesammtwissen liegt eine besondere Philosophie, die von jedem Specialforscher gefordert werden kann. Ihr Mangel äussert sich durch das Auftreten vermeintlicher Probleme, in deren Aufstellung schon, einerlei ob man sie als lösbar betrachtet oder nicht, eine Verkehrtheit liegt. Ein solches Ueberschätzen der Physik gegenüber der Physiologie, ein Verkennen des wahren Verhältnisses, spricht sich in der Frage aus, ob es möglich sei, die Empfindungen durch Bewegung der Atome zu erklären?

„Forschen wir nach den Umständen, die zu einer so sonderbaren Frage drängen können. Zunächst bemerken wir, dass allen Erfahrungen über räumliche und zeitliche Verhältnisse ein grösseres Vertrauen entgegengebracht wird, dass man ihnen einen objectiveren, realeren Charakter zuschreibt, als Erfahrungen über Farben, Töne, Wärmen u. s. w. Doch kann man bei genauerer Untersuchung sich nicht darüber täuschen, dass Raum- und Zeitempfindungen ebenso Empfindungen sind wie Farben-, Ton-, Geruchsempfindungen, nur dass wir in Uebersicht der ersteren viel geübter und klarer sind als in Bezug auf letztere. Raum und Zeit sind wohlgeordnete Systeme von Empfindungsreihen. Die Grössen in den Gleichungen der Mechanik sind nichts als Ordnungszeichen der in der Vorstellung herauszuhebenden Glieder dieser Reihen. Die Gleichungen drücken die Abhängigkeit dieser Ordnungszeichen von einander aus.

„Ein Körper ist eine verhältnissmässig beständige Summe von Tast- und Lichtempfindungen, die an dieselben Raum- und Zeitempfindungen geknüpft ist. Mechanische Sätze, wie z. B: jener der Gegenbeschleunigung zweier Massen, geben unmittelbar oder mittelbar den Zusammenhang von Tast-, Licht-, Raum- und Zeitempfindungen. Sie erhalten nur (durch den oft complicirten) Empfindungsinhalt einen verständlichen Sinn.

„Es hiesse also wohl das Einfachere und näher Liegende durch das Complicirtere und ferner Liegende erklären, wollte man aus Massenbewegungen die Empfindungen ableiten, abgesehen davon, dass die mechanischen Begriffe ökonomische Mittel sind, welche zur Darstellung mechanischer und nicht physiologischer oder psychologischer Thatsachen entwickelt wurden. Bei richtiger Unterscheidung der Mittel und Ziele der Forschung, bei Beschränkung auf die Darstellung des Thatsächlichen können solche falsche Probleme gar nicht auftreten."

61. Es sei hier darauf hingewiesen, dass Helmholtz das ultraviolette Spectrum durch Ausschluss alles übrigen Lichtes als indigoblaues, beziehungsweise bläulichgraues Farbenband ohne Zuhilfenahme fluorescirender Substanzen ersichtlich gemacht hat. Da nun die Fluorescenz genau an derselben Grenze aufhört, bis zu welcher sich das Ultraviolett bei sorgfältiger Abblendung der übrigen Spectralfarben noch unmittelbar wahrnehmen lässt, so kann man mit Wundt (siehe dessen Lehrbuch der Physiologie des Menschen, p. 649) den Schluss ziehen, dass das objective Licht auf der Seite der brechbarsten Strahlen ebenfalls nicht weiter reicht, als die Netzhaut für dasselbe empfindlich ist, während die ultrarothen Strahlen infolge ihrer Absorption durch die Augenmedien stets unsichtbar bleiben. Es wäre somit vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus angemessener gewesen, meine Betrachtungen auf ultrarothe Strahlen zu beziehen, welche ja im *Bacterium photometricum* gleichfalls ihr Specialthier besitzen, und habe ich dies nur deshalb nicht gethan, weil anderseits die Vorstellung von unsichtbaren ultravioletten Strahlen in viele elementare Darstellungen der Physik Eingang gefunden hat und insoferne in einer populären Vorlesung direct verwerthbar ist.

62. Siehe hierüber die 1883 zu Leipzig erschienene deutsche Ausgabe seines Werkes über Ameisen, Bienen und Wespen, p. 153—186.

63. Hiezu bemerke ich noch, dass ich meine frei gehaltenen Vorlesungen in der hier vorliegenden Reproduction durch Benützung elementarer mathematischer Schlüsse ungefähr im Verhältnisse von 3 : 2 zusammengezogen habe, um hiedurch die Uebersichtlichkeit des Ganzen ohne wesentliche Beeinträchtigung seiner Verständlichkeit zu erhöhen.

64. Sieht man von einer präcisen Fassung des Princips der Erhaltung der Kraft ab, so lassen sich seine ersten Spuren, wie Dr. G. Berthold (siehe dessen 1876 im 157. Bande von Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie publicirte Abhandlung: „Notizen zur Geschichte des Princips der Erhaltung der Kraft", p. 342—351) mit Recht hervorgehoben hat, bis auf Epikur zurückverfolgen, insoferne dieser Philosoph bereits die Constanz der Materie und der Kraft behauptet und damit begründet hat, dass es keinen Ort ausserhalb des Universums gebe, wohin ein Theilchen der Materie zu entfliehen, und von wo eine neue Kraft in das Universum einzudringen vermöge.

65. Siehe hierüber die von Hieronymus Müller veranstaltete deutsche Gesammtausgabe der Werke Platon's, 5. Bd., p. 518—521.

Berichtigungen.

Seite 109, Zeile 5 von oben lies: Aufgang statt Untergang.

Seite 514, Zeile 8 von oben lies: Wissensschätze statt Schätze.