Ueber die

Anziehung homogener Körper

insbesondere

der Polyeder.

Von

F. G. Mehler,
Lehrer an der Realschule zu St. Johann in Danzig.

Danzig,
Druck von A. W. Kafemann.

1865.

§ 1.

Durch das Newton'sche Gesetz wird die Wirkung eines materiellen Punktes auf einen andern festgestellt, und der Satz vom Parallelogramm der Kräfte lehrt, wie eine beliebige Anzahl von Kräften, die denselben Punkt angreifen, zu einer einzigen vereinigt werden kann. Der Integralrechnung fällt die Aufgabe zu, aus diesen Daten die Anziehung zu ermitteln, die ein materieller Punkt durch einen Körper von endlichen Dimensionen erfährt. Sie löst diese Aufgabe allgemein; sie lehrt uns die Attractionscomponenten nach drei verschiedenen, am besten auf einander senkrechten Richtungen mit Hülfe dreifacher Integrale bestimmen und dadurch zugleich die Grösse und Richtung der Resultante der Anziehung finden. Durch die Untersuchungen von Laplace wissen wir überdies, dass die Kenntniss eines einzigen dreifachen Integrals, des sogenannten Potentiales ausreicht, um durch blosse Differentiation die Grösse der nach irgend einer beliebigen Richtung stattfindenden Attraction abzuleiten. Aber man darf bei dieser Lösung der Aufgabe mittels dreifacher Integrale nicht stehen bleiben, sondern sobald die Gestalt des Körpers und die Vertheilung der Masse in seinem Innern gegeben ist, muss man jene Integrale zu vereinfachen und, wo möglich, auf solche Functionen zurückzuführen suchen, für deren numerische Berechnung wir uns im Besitze von Tafeln befinden. Wenn in dieser Beziehung nächst der Kugel das Ellipsoid mit besonderer Vorliebe von den Mathematikern behandelt worden ist, so hat das neben dem grossen Interesse, welches das Problem in theoretischer Beziehung darbietet, seinen guten Grund auch in der hohen praktischen Bedeutung, welche es für unseren Erdkörper besitzt. Doch auch die Anziehung anderer Körper, z. B. der ebenflächig begrenzten, verdient genauer gekannt zu werden, wie selbst derjenige nicht wird leugnen können, der von einer solchen Kenntniss keinen wesentlichen Nutzen für die Naturwissenschaften erwartet. Um aber einen Beleg dafür zu geben, dass derartige Untersuchungen sehr wohl praktisch verwerthbar sind, brauche ich nur auf die höchst verdienstvolle Arbeit des Herrn Dr. G. Schweizer: „Untersuchungen über die in der Nähe von Moskau stattfindende Local-Attraction*)“ aufmerksam zu machen, worin die beträchtlichen Abweichungen der Richtung des Bleilothes von der wahren Verticalen in völlig genügender Weise durch den störenden Einfluss gewisser prismatischen Schichten erklärt wird, welche sich unter der Erdoberfläche in der Richtung von Ost nach West quer durch den Meridian von Moskau hinziehen und eine von der mittleren Dichtigkeit der Erdrinde verschiedene Dichtigkeit besitzen. Um zu diesem Resultate zu gelangen, war eine genaue Kenntniss der analytischen Ausdrücke für

*) Bulletin de la société imperiale des naturalistes de Moscou. Année 1862. No. III. — Man vergleiche auch die „Literarische Anzeige“ in Nr. 1449 der „Astronomischen Nachrichten.“

die Wirkung solcher Prismen erforderlich. Herr Dr. Schweizer spricht sein Befremden darüber aus, dass die gewöhnlichen Lehrbücher der Mechanik über solche Gegenstände keine Auskunft enthalten, dass man darin vergeblich die Attraction eines Parallelepipeds*), eines Prismas, einer Pyramide suche. Er fügt indessen hinzu (a. a. O. p. 149): „Dagegen fand ich in einem noch ungedruckten Aufsatze des Herrn Akademikers Ssomow, welchen derselbe mir die Güte hatte mitzutheilen, diesen Gegenstand auf das Eleganteste behandelt und allgemein durchgeführt." Es ist mir über den Inhalt der Arbeit des Herrn Ssomow ausser dem eben Angeführten nichts bekannt geworden. Auch ich hatte mich indessen, bevor ich noch die Schrift des Herrn Dr. Schweizer kannte, mit demselben Gegenstande beschäftigt, und war zu dem Resultate gelangt, dass das Potential und die Attractionscomponenten eines beliebigen homogenen Polyeders sich in übersichtlicher Weise durch Formeln darstellen lassen, welche keine andern Transcendenten als Logarithmen und Kreisbogen enthalten, also mit Hülfe der gewöhnlichen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln jederzeit leicht numerisch berechnet werden können. Es ist meine Absicht, in den folgenden Zeilen eine Herleitung der in Rede stehenden Formeln zu geben, und ich werde dabei einige geometrische Betrachtungen zu Hülfe nehmen, weil dadurch jede weitläufige und mühsame Rechnung vermieden werden kann und gleichzeitig die Bedeutung aller in dem Endresultate auftretenden Grössen klar hervortritt. Daran werden sich einige Bemerkungen über die Anziehung der von Regelflächen begrenzten homogenen Körper knüpfen.

§ 2.

Der deutlicheren Vorstellung wegen kann man das anziehende Polyeder als ein convexes voraussetzen, d. h. als ein solches, das von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird. Ich bemerke jedoch, dass für die Gültigkeit der nachfolgenden Betrachtungen diese Voraussetzung nicht nothwendig ist. Das Polyeder kann unter seinen Grenzflächen auch solche Polygone enthalten, in denen überstumpfe Winkel vorkommen, es kann beliebig viele ebenflächig begrenzte Höhlungen haben oder kanalförmig durchbrochen sein u. s. w., ohne dass die Methode einer Modification bedarf. Nur die Voraussetzung müssen wir der Natur der Sache gemäss machen, dass die begrenzenden Polygone nicht in das Innere des mit Materie erfüllten Raumes eindringen, und dass ihre nichtaufeinanderfolgenden Kanten sich nicht durchschneiden. Es trennt also jede Fläche die Masse des Körpers von dem nicht mit Materie erfüllten Raume, und es lassen sich somit stets zwei Seiten an derselben unterscheiden, eine innere, die der Masse des Körpers, und eine äussere, die dem von Materie freien Raume angehört. Construiren wir nun über jeder Polyederfläche F als Basis eine Pyramide, welche ihre Spitze in dem angezogenen Punkte P hat, so ist das Volumen des Polyeders stets gleich der Summe aller Pyramiden, welche sich auf die innere, vermindert um die Summe derjenigen, welche sich auf die äussere Seite einer Polyederfläche stützen. Da aber das Potential des Polyeders ein dreifaches Integral ist, dessen Grenzen genau die-

*) Die Formel für die Attraction eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist in gelehrten Zeitschriften mehrfach mitgetheilt worden, z. B. von Bessel in Zachs monatlicher Correspondenz, Bd. XXVII p. 83. Eine elegante Ableitung hat Herr Dr. Röthig im 58. Bande des Borchardt'schen Journals gegeben.

selben, wie bei der Volumenbestimmung sind, so lässt es sich in gleicher Weise auffassen als die Differenz zwischen den Summen der Potentiale aller innern und derjenigen aller äusseren Pyramiden, wobei man nur, um jedem einzelnen dieser Potentiale eine physikalische Bedeutung unterzulegen, sich vorstellen muss, dass jede einzelne der betrachteten Pyramiden für sich mit homogener Materie erfüllt sei. Man theile nun in jeder dieser Pyramiden die Basis F in unendlich kleine Elemente $d\omega$, zerschneide dann jede der dadurch bestimmten neuen Pyramiden von unendlich kleiner Basis durch Parallelebenen zu F in unendlich kleine Elemente dt, bezeichne durch r und ϱ die Entfernungen des angezogenen Punktes P von $d\omega$ und von dt, und durch p und x die senkrechten Abstände dieses Punktes von der Ebene, der $d\omega$ angehört, und von einer der beiden damit parallelen Grenzflächen des Elementes dt, so ist, da dt als ein Prisma mit der Höhe dx und der Basis $\frac{x^2}{p^2}\,d\omega$ betrachet werden kann:

$$dt = \frac{x^2\,d\omega\,dx}{p^2}, \text{ und ferner ist: } \frac{\varrho}{r} = \frac{x}{p}.$$

Die Dichtigkeit der Materie, aus der das Polyeder besteht, können wir der Einheit gleichsetzen, und dasselbe dürfen wir mit der Stärke der Anziehung, welche die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung ausübt, thun, indem dadurch in allen Formeln nur ein numerischer Factor unterdrückt wird, der jederzeit sofort hinzugefügt werden kann. Dies festgesetzt, ist das Potential der Pyramide, die $d\omega$ zur Basis und P zur Spitze hat, gleich

$$\int\frac{dt}{\varrho} = \frac{d\omega}{pr}\int_o^p x\,dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{p\,d\omega}{r},$$

und folglich das Potential der ganzen Pyramide mit der Basis F und der Spitze P gleich $\frac{1}{2}\,p\int\frac{d\omega}{r}$, wobei das Doppelintegral sich über die Oberfläche des Polygons F erstreckt. Es sind nun, um das Potential V des ganzen Körpers zu erhalten, die analogen Ausdrücke auch für die zu den übrigen Grenzpolygonen gehörigen Pyramiden zu bilden, mit dem positiven oder negativen Zeichen zu versehen, je nachdem die betreffende Pyramide sich auf die innere oder äussere Seite einer Polyederfläche stützt, und darauf durch Addition mit einander zu verbinden. Dadurch wird

$$1)\quad V = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, p\int\frac{d\omega}{r},$$

wenn das Integral über irgend eine Polyederfläche, die Summe über alle diese Flächen ausgedehnt wird, und wenn man p, d. h. das von P auf eine Fläche F gefällte Loth, positiv oder negativ wählt, je nachdem F dem angezogenen Punkte P ihre innere oder äussere Seite zukehrt.

Die nach irgend einer Richtung hin stattfindende Attraction könnte man jetzt dadurch finden, dass man den Differentialquotienten von V nach dieser Richtung nimmt. Wir erhalten aber eine für unsere Zwecke geeignetere Formel, indem wir auf die bekannte Art und Weise das Polyeder in Prismen von unendlich kleinem Querschnitt zerlegen, deren Seitenkanten der betrachteten Richtung parallel sind. Sind a, b, c die Coordinaten des angezogenen Punktes, x, y, z die eines Massenelementes in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, ferner ϱ die Entfernung von (a, b, c) und (x, y, z), und A die Componente der Anziehung parallel mit der Axe der x, so ist:

$$A = \int \frac{d\,(\varrho^{-1})}{d\,a}\, dx\, dy\, dz = -\int \frac{d\,(\varrho^{-1})}{d\,x}\, dx\, dy\, dz, \text{ oder:}$$

$$A = \int \left(\frac{\varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon'}{r'} + \frac{\varepsilon''}{r''} + \ldots \right) dy\, dz,$$

wenn $r, r', r'', \ldots$ die Werthe des ϱ für die Stellen bezeichnen, an denen das Prisma, dessen Querschnitt $dy\, dz$ ist, in die Masse des Polyeders eintritt oder aus ihr heraustritt, und $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots = +1$ an den Eintritts-, dagegen $= -1$ an den Austrittsstellen gesetzt werden. Man kann aber diese Formel bekanntlich einfacher schreiben, indem man $\varepsilon\, dy\, dz = \cos\alpha\, d\omega$ setzen darf, wo $d\omega$ das Oberflächenelement des Körpers an der betreffenden Ein- oder Austrittsstelle und α den Winkel der auf $d\omega$ nach Innen errichteten Normalen mit der Axe der X bedeutet. Man erhält also

$$A = \int \frac{\cos\alpha\, d\omega}{r},$$

wenn das Integral über die ganze Oberfläche des Polyeders genommen wird. Da aber α für alle Elemente derselben Polyederfläche constant ist, so können wir die Formel auch so schreiben:

$$2)\quad A = \Sigma \cos\alpha \int \frac{d\omega}{r},$$

und haben jetzt das Integral- und das Summenzeichen genau so wie in 1) zu verstehen. Setzt man noch zur Abkürzung

$$3)\quad \Omega = \int \frac{d\omega}{r},$$

so wird:

$$1')\quad V = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, p\,.\,\Omega, \qquad 2')\quad A = \Sigma \cos\alpha\,.\,\Omega.$$

Es handelt sich also bei der Bestimmung von V und A gleichmässig um die Ausmittlung des Doppelintegrales Ω, welches als das Flächenpotential eines Grenzpolygons betrachtet werden kann, wenn man sich dasselbe mit einer Massenschicht von der constanten Dichte 1 belegt denkt. An jeder der ein solches Polygon F begrenzenden Kanten, lassen sich, sobald man sich die Ebene, der F angehört, allseitig erweitert vorstellt, zwei Seiten unterscheiden, eine innere, an welcher F selbst, und eine äussere, an welcher der übrige Theil der Ebene liegt. Wir construiren jetzt in der Ebene des Polygons F über jeder der das letztere begrenzenden Kanten das Dreieck, welches seine dritte Ecke in dem Fusspunkte O des von P auf jene Ebene gefällten Lothes hat. Wird die Fläche eines solchen Dreiecks positiv oder negativ gerechnet, je nachdem es mit F an derselben (also inneren), oder an der entgegengesetzten (also äusseren) Seite der gemeinschaftlichen Kante liegt, so ist der Flächeninhalt von F gleich der algebraischen Summe aller construirten Dreiecke, und versieht man auch die Potentiale der äusseren Dreiecke mit dem negativen Vorzeichen, so setzt sich in gleicher Weise das Potential von F aus den Potentialen aller einzelnen Dreiecke zusammen. Betrachten wir also eines
. 1. dieser Dreiecke, OST, legen noch durch das Loth PO oder p eine zu der Polygonseite ST senkrechte Ebene POQ, fällen von irgend einem Punkte B des Dreiecks auf OQ das Loth $BC = y$, setzen $OC = x$, $\angle OPB = \vartheta'$, $\angle COB = \eta$, und bezeichnen durch (p) den absoluten Werth von p, so ist:

$$x = OB\,.\cos\eta = (p)\ tg\,\vartheta' \cos\eta,$$
$$y = OB\,.\sin\eta = (p)\ tg\,\vartheta' \sin\eta.$$

Der Winkel ϑ' liegt nothwendig zwischen o und $\tfrac{1}{2}\pi$, den Winkel η zählen wir, wenn Q, wie es in der Figur angenommen ist, zwischen S und T fällt, in dem

Dreiecke OQS in der Richtung von OQ nach OS, und in dem Dreiecke OQT in der Richtung von OQ nach OT, und in beiden Fällen positiv. Bekanntlich ist nun das Flächenelement $d\omega$ des Dreiecks unter Anwendung der Coordinaten ϑ' und η:

$$d\omega = \left(\frac{dx}{d\vartheta'}\,\frac{dy}{d\eta} - \frac{dy}{d\vartheta'}\,\frac{dx}{d\eta}\right) d\vartheta'\, d\eta = \frac{p^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\eta}{\cos^3\vartheta'},$$

ferner:

$$r = BP = \frac{(p)}{\cos\vartheta'},$$

also erhält man für das Flächenpotential D des Dreiecks OST:

$$D = (p) \iint \frac{\sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\eta}{\cos^2\vartheta'}.$$

Es sei M der Punkt, in welchem die Verlängerung von OB die Seite ST schneidet, und $\angle OPM = \vartheta$, so ist nach ϑ' von $\vartheta' = o$ bis $\vartheta' = \vartheta$, nach η aber einerseits von $\eta = o$ bis $\eta = \eta_1 = \angle QOS$, und andererseits von $\eta = o$ bis $\eta = \eta_2 = \angle QOT$ zu integriren und die erhaltenen Resultate zu addiren. Also ist:

$$D = (p) \int_o^{\eta_1} \left(\frac{1}{\cos\vartheta} - 1\right) d\eta + (p) \int_o^{\eta_2} \left(\frac{1}{\cos\vartheta} - 1\right) d\eta.$$

Um die noch übrig bleibende Integration nach η passend auszuführen, schneiden wir die körperliche Ecke $P - OST$ durch eine um P beschriebene Kugel vom Halbmesser 1, und erhalten ein dem ebenen Dreiecke OST entsprechendes sphärisches $O'S'T'$, und ein dem OQM entsprechendes $O'Q'M'$. In diesem letzteren, das bei Q' rechtwinklich ist, ist $O'M' = \vartheta$, $\angle Q'O'M' = \eta$, und wir bezeichnen ferner die (bei der Integration) constante Kathete $O'Q' = g$, die veränderliche $Q'M' = m'$ und den veränderlichen Winkel $O'M'Q' = \mu'$. Differentiirt man nun die aus den Elementen der sphärischen Trigonometrie bekannte Formel

$$\cos\eta = \sin\mu' \cos m',$$

nachdem man von beiden Seiten die Logarithmen genommen hat, so wird:

$$tg\,\eta\, d\eta = -\cot\mu'\, d\mu' + tg\, m'\, dm',$$

oder, da

$$\cos\vartheta = \cot\eta \cot\mu', \text{ also } tg\,\eta = \cot\mu' : \cos\vartheta \text{ ist:}$$

$$\frac{d\eta}{\cos\vartheta} = -\,d\mu' + tg\,\mu'\, tg\, m'\, dm',$$

oder auch, weil

$$\sin m' = \cot\mu'\, tg\, g, \text{ also } tg\,\mu' = tg\, g : \sin m' \text{ ist:}$$

$$\frac{d\eta}{\cos\vartheta} = -\,d\mu' + tg\, g\, \frac{dm'}{\cos m'}.$$

Subtrahirt man noch auf beiden Seiten $d\eta$ und integrirt darauf, so findet man:

$$\int \left(\frac{1}{\cos\vartheta} - 1\right) d\eta = -\,\eta - \mu' + tg\, g \log\cot\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} m'\right) + Const.$$

Um nun D zu erhalten, muss man von dem unbestimmten zu den bestimmten Integralen übergehen und dabei beachten, dass

für $\eta = o\ :\ \mu' = \tfrac{1}{2}\pi,\ m' = o$;
für $\eta = \eta_1 : \mu' = \angle O'S'Q' = \mu,\ m' = Q'S' = m$;
für $\eta = \eta_2 : \mu' = \angle O'T'Q' = \nu,\ m' = Q'T' = n$;

dadurch ergiebt sich:

$$D = (p) \cdot (\pi - \eta_1 - \eta_2 - \mu - \nu) + (p)\, tg\, g \log\left[\cot\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} m\right) \cot\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} n\right)\right].$$

Diese Formel ist hier nur für den Fall abgeleitet, dass der Punkt Q zwischen S und T liegt. Will man, dass sie allgemein gelte, so muss man, wie leicht einzusehen, m und η_1 (resp. n und η_2) negative Werthe ertheilen, wenn Q in die Verlängerung von ST über S (resp. T) hinaus fällt. Setzt man

$$m = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi, \; n = \tfrac{1}{2}\pi - \psi,$$

wo φ und ψ nichts anderes als die Winkel PST und PTS in Fig. 1 bedeuten, so erhalten, wenn φ und ψ stets positiv (zwischen o und π) gewählt werden, die Grössen m und n von selbst die richtigen Vorzeichen. Man beachte ferner, dass $(\eta_1 + \eta_2)$, μ und ν die drei Winkel des sphärischen Dreiecks $O'S'T'$ vorstellen, und dass der Bogen g den Winkel misst, welcher in dem rechtwinkligen ebenen Dreiecke POQ der Kathete OQ gegenüberliegt; dass also, wenn $\varDelta$ den Flächeninhalt des Dreiecks $O'S'T'$ und q die Länge der Linie OQ bezeichnet, die Gleichungen

$$\eta_1 + \eta_2 + \mu + \nu - \pi = \varDelta, \; (p)\, tg\, g = q$$

stattfinden: dann wird man die Formel für D einfacher so schreiben können:

$$D = -(p)\,\varDelta + q \log (\cot \tfrac{1}{2} \varphi \cot \tfrac{1}{2} \psi).$$

Man erhält hieraus sofort den Werth des sich auf das ganze Polygon F beziehenden Flächenpotentials Ω, indem man die analogen Ausdrücke für alle die Dreiecke, aus denen wir uns F zusammengesetzt dachten, bildet und sie, nachdem sie in der oben angegebenen Weise mit dem richtigen Vorzeichen versehen sind, zu einander addirt. Die Summe der ersten Glieder ist $-(p)f$, wenn f das dem ebenen Polygone F entsprechende sphärische bezeichnet, d. h. den Theil der um den angezogenen Punkt P mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kugelfläche, welcher durch die Seitenflächen der Pyramide, die in P ihre Spitze und F zur Basis hat, begrenzt wird. Der Werth der Grösse f, welche wir kurz die scheinbare Grösse von F in Bezug auf den Punkt P nennen können, fällt nach der vorhergehenden Ableitung wesentlich positiv aus, und dasselbe gilt von dem Producte $(p)f$, weil wir unter (p) den absoluten Werth von p verstanden. Wir dürfen aber pf statt $(p)f$ schreiben, wenn wir festsetzen, dass f stets dasselbe Zeichen wie p haben solle. Die Summe der den verschiedenen Seiten des Polygons F entsprechenden logarithmischen Glieder lässt sich nicht in einen einzigen Ausdruck zusammenziehen; wir deuten sie also nur durch ein Summenzeichen an und erhalten die Formel:

$$4)\quad \Omega = -pf + \sum_K q \log (\cot \tfrac{1}{2} \varphi \cot \tfrac{1}{2} \psi),$$

worin wir q positiv für diejenigen Kanten nehmen müssen, die der Projection O des angezogenen Punktes ihre innere Seite zukehren, negativ für die übrigen. Setzt man den erhaltenen Werth von Ω in die Gleichungen 1′) und 2′) ein, so gehen sie über in:

$$5)\quad V = \tfrac{1}{2} \sum_F p \left[-pf + \sum_K q \log (\cot \tfrac{1}{2} \varphi \cot \tfrac{1}{2} \psi)\right]$$

$$6)\quad A = \sum_F \cos \alpha \left[-pf + \sum_K q \log (\cot \tfrac{1}{2} \varphi \cot \tfrac{1}{2} \psi)\right]$$

Durch diese beiden Formeln ist unsere Aufgabe vollständig gelöst. Der besseren Uebersicht wegen stelle ich noch die Bedeutung der einzelnen Zeichen kurz zusammen. Es bedeutet:

V das Potential des Polyeders in Bezug auf irgend einen Punkt P.

p das von P auf irgend eine Fläche F gefällte Loth, positiv oder negativ genommen, je nach dem F dem P ihre innere oder äussere Seite zukehrt;

f ist die scheinbare Grösse der Fläche F, vom Punkte P aus betrachtet, und ist mit demselben Zeichen wie p zu versehen; (Vergl. § 4.)

q ist das von dem Fusspunkte O des erwähnten Lothes auf irgend eine der F begrenzenden Kanten gefällte Perpendikel und hat das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem O an der inneren oder äusseren Seite der Kante liegt.

φ und ψ sind die an den beiden Endpunkten dieser Kante liegenden Winkel in dem Dreiecke, das seine dritte Ecke in P hat.

A bezeichnet die Stärke der Attraction nach irgend einer Richtung, d. h. die Projection der Resultante der Anziehung auf diese Richtung,

α den Winkel dieser Richtung mit der auf F nach dem Innern des Körpers zu errichteten Normalen. Die Summe $\sum\limits_K$ erstreckt sich über alle Seiten eines Grenzpolygons F, und das Zeichen $\sum\limits_F$ deutet an, dass die entsprechenden Ausdrücke für alle Grenzflächen des Polyeders zu bilden sind. — Die Logarithmen sind natürliche.

§ 3.

Wenn man die Formel 5), indem man die Grössen p, q u. s. w. als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten a, b, c des angezogenen Punktes betrachtet, partiell nach a differentiirt und das sich so ergebende Resultat mit 6) vergleicht, so gelangt man zu einer Relation, die sowohl an sich bemerkenswerth erscheint, als auch für unser Problem nützliche Anwendungen gestattet. Rückt P parallel der Axe der a um eine unendlich kleine Strecke δa fort, und werden von den Endpunkten der letzteren auf eine Fläche F die Lothe p und $p + \delta p$ gefällt, so ist, da diese Lothe mit jener Axe den Winkel α einschliessen, offenbar $\delta p = \cos\alpha \, . \, \delta a$, also:

$$\frac{dp}{da} = \cos\alpha, \quad \frac{d\,(p^2)}{da} = 2p\cos\alpha.$$

Es war oben $(p)\, tg\, g = q$ gesetzt worden, und es ist daher, wenn $\varepsilon = +1$ oder $= -1$, je nachdem p positiv oder negativ:

$$pq = \varepsilon p^2\, tg\, g, \quad \frac{d\,pq}{da} = 2\varepsilon p\, tg\, g \cos\alpha + \frac{\varepsilon p^2}{\cos^2 g}\,\frac{dg}{da},$$

oder, wenn R das von P auf die betreffende Polygonseite gefällte Perpendikel (d. h. in Fig. 1 die Linie PQ) bezeichnet:

$$\frac{d\,pq}{da} = 2\,q\cos\alpha + \varepsilon R^2\,\frac{dg}{da}.$$

Aber an derselben Kante liegt noch eine zweite Polyederfläche F', wodurch zu dem vorstehenden ein ähnlicher Ausdruck hinzukommt, in welchem R denselben Werth behält, während die übrigen Grössen andere Werthe annehmen. Die Summe der zweiten Bestandtheile ist: $R^2\left(\varepsilon\,\frac{dg}{da} + \varepsilon'\,\frac{dg'}{da}\right)$. Liegt nun z. B. der angezogene Punkt P innerhalb des Körpers, so dass $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, so ist offenbar $g + g'$ der Winkel, welchen die beiden von P auf F und F' gefällten Lothe mit einander bilden, also eine Grösse, die von der Lage des Punktes P im Innern des Körpers unabhängig ist. Auch bei jeder andern Lage von P überzeugt man sich leicht, dass $\varepsilon g + \varepsilon' g'$ eine constante (nur beim Durchgange des Punktes P durch F oder F' sich sprungweise ändernde) Grösse, und dass folglich $\varepsilon\,\frac{dg}{da} + \varepsilon'\,\frac{dg'}{da} = o$ ist. Man darf also, wenn man 5) nach a differentiirt, statt $\frac{d\,pq}{da}$ den Werth $2\,q\cos\alpha$ substituiren, indem ja die hierbei fortgelasssenen Glieder sich paarweise aufheben, und erhält:

$$\frac{dV}{da} = A + \tfrac{1}{2}\sum_F p\left[-p\,\frac{df}{da} + \sum_K q\,\frac{d}{da}\log\,(\cot \tfrac{1}{2}\varphi \cot \tfrac{1}{2}\psi)\right],$$

während A genau den in 6) befindlichen Werth bezeichnet. Da aber $\frac{dV}{da} = A$ ist, so muss die zu A addirte Summe identisch verschwinden. Man substituire nun z. B. statt des Polyeders eine Pyramide, welche ein beliebiges Polygon F zur Basis hat, und nehme an, dass der angezogene Punkt sich in deren Spitze befinde. Es verschwinden dann alle Lothe p mit Ausnahme des auf F gefällten, und da die in der grossen Klammer befindliche Grösse, wie nicht schwer zu zeigen, für $p = o$ nicht unendlich wird, so sieht man folglich ein, dass für jedes Polygon F für sich die Identität erfüllt sein muss:

$$7)\ p \frac{df}{da} = \sum_K q \frac{d}{da} \left[log\ (cot\ {}^1\!/\!_2\ \varphi\ cot\ {}^1\!/\!_2\ \psi). \right]$$

Die gewonnene Relation kann benutzt werden, um auch die Ausdrücke für die zweiten Differentialquotienten von V in ihrer einfachsten Form zu erhalten. Differentiirt man 6) nach a und bemerkt, dass $\frac{dq}{da} = cos\,\alpha' =$ dem Cosinus des Winkels, welchen die Richtung von q (von der Seite des Polygons nach dem Innern seiner Fläche hin genommen) mit der Axe der a bildet, so ergiebt sich mit Rücksicht auf 7):

$$\frac{d^2 V}{da^2} = \sum_F \left[- f\, cos^2\, \alpha + \sum_K cos\ \alpha\ cos\ \alpha'\ log\ (cot\ {}^1\!/\!_2\ \varphi\ cot\ {}^1\!/\!_2\ \psi) \right].$$

Die Werthe von $\frac{d^2 V}{db^2}$ und $\frac{d^2 V}{dc^2}$ gehen hieraus sofort hervor, indem man α, α' in β, β' und in γ, γ' verwandelt, und unter β, β' die Winkel versteht, welche p und q mit der Axe der b, und unter γ, γ' diejenigen, welche p und q mit der Axe der c bilden. Da aber die Coordinatenaxen als rechtwinklig angenommen sind und auch die Linien p und q auf einander senkrecht stehen, so hat man:

$$cos^2\, \alpha + cos^2\, \beta + cos^2\, \gamma = 1,$$
$$cos\ \alpha\ cos\ \alpha' + cos\ \beta\ cos\ \beta' + cos\ \gamma\ cos\ \gamma' = 0.$$

Daher ist:

$$\frac{d^2 V}{da^2} + \frac{d^2 V}{db^2} + \frac{d^2 V}{dc^2} = - \Sigma f,$$

oder nach der üblichen Bezeichnung: $\Delta^2 V = - \Sigma f$, d. h. gleich der scheinbaren Grösse $\mathfrak{F}$ der Gesammtoberfläche des Polyeders. Nun ist aber für einen innern Punkt $\mathfrak{F}$ gleich der ganzen Oberfläche der um P mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel, d. h. $= 4\pi$, und für einen äussern Punkt ist $\mathfrak{F} = o$, weil die scheinbare Grösse der dem P die äussere Seite zukehrenden Polygone gleich der der übrigen Grenzflächen, aber von entgegengesetztem Zeichen ist. Es ist also $\Delta^2 V = - 4\pi$ für einen innern und $= o$ für einen äusseren Punkt, und es hat sich auf diese Weise gezeigt, dass der in 5) gegebene Ausdruck des V einer der bekannten characteristischen Eigenschaften des Potentials Genüge leistet.

Wir wollen auch die Formel 4), welche das Potential einer auf der Fläche eines Polygons F gleichmässig vertheilten Massenschicht darstellt, partiell nach a differentiiren, und erhalten, indem wir wieder 7) berücksichtigen:

$$8)\ \frac{d\Omega}{da} = - f\, cos\ \alpha + \sum_K cos\ \alpha'\ log\ (cot\ {}^1\!/\!_2\ \varphi\ cot\ {}^1\!/\!_2\ \psi).$$

Nehmen wir insbesondere als Anfangspunkt der Coordinaten einen Punkt in F und als Axe der a die zu diesem Punkte gehörige Normale der Ebene, so wird $p = a$, f erhält beiläufig dasselbe Vorzeichen mit a, es wird $cos\ \alpha = 1$ und jedes $\alpha' = {}^1\!/\!_2\ \pi$, d. h. $cos\,\alpha' = 0$. Die Formel 8) vereinfacht sich also in diesem Falle zu

$$8')\ \frac{d\Omega}{da} = - f.$$

Dieses Resultat verliert natürlich seine Gültigkeit auch nicht, wenn die anziehende Fläche von einer krummen Linie begrenzt ist. Man hat also den folgenden Satz:

Die Anziehung, welche eine beliebige ebene Fläche nach einer zu ihr normalen Richtung auf einen ausserhalb gelegenen Punkt ausübt, ist proportional der scheinbaren Grösse der Fläche in Bezug auf den angezogenen Punkt.

Wird z. B. die ganze unendliche Ebene als anziehend betrachtet, so ist f für jede Lage des angezogenen Punktes gleich der Halbkugel $= \pm 2\pi$, und es ergiebt sich das bekannte Resultat*), dass eine unendliche Ebene einen materiellen Punkt in jeder (endlichen) Entfernung gleich stark anzieht, die Bewegung des Punktes also nach den gewöhnlichen Fallgesetzen vor sich geht.

§ 4.

Es mögen sich hieran einige kurze Bemerkungen, betreffend die Berechnung von f, anschliessen. Es stellte f den Flächeninhalt des sphärischen Polygons vor, welches auf der um P mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel durch die körperliche Ecke bestimmt wird, die ihren Scheitel in P hat, und deren Seitenebenen durch die Seiten des ebenen Polygons F hindurchgehen. Es ist also, wenn n die Seitenzahl von F, nach einem allgemein bekannten stereometrischen Satze f (dem absoluten Werthe nach) gleich der Summe aller Flächenwinkel der Ecke vermindert um $(n-2)\pi$, oder auch gleich 2π minus der Summe aller Kantenwinkel der Polarecke. Es lässt sich aber f auch leicht durch die in den Formeln vorkommenden Grössen p, q, φ, ψ ausdrücken, wenn man auf die Betrachtungen des § 2 zurückgeht. Dort wurde nämlich f aus einer Anzahl von Dreiecken zusammengesetzt, von denen eines, $O' S' T'$, genauer untersucht wurde. Sein Inhalt ist, wenn λ statt $\eta_1 + \eta_2$ geschrieben wird, $= \lambda + \mu + \nu - \pi$. Liegt nun O' ausserhalb der Fläche von f, so ist die algebraische Summe aller der an O liegenden Winkel gleich Null, und liegt O' innerhalb, so ist diese Summe, abgesehen vom Vorzeichen, $= 2\pi$. Nach den schon oben benutzten Formeln ist ferner:

$$\sin m = \cot \mu \, tg\, g, \quad \sin n = \cot \nu \, tg\, g, \text{ also:}$$

$$\mu = \tfrac{1}{2}\pi - arc\, tg\, (\sin m \cot g\, g), \quad \nu = \tfrac{1}{2}\pi - arc\, tg\, (\sin n \cot g\, g).$$

Drückt man noch m und n durch φ und ψ, sowie g durch p und q aus, so ergiebt sich leicht:

$$9)\quad f = 2\pi\varepsilon - \sum_K \left[arc\, tg \left(\frac{p \cos\varphi}{q}\right) + arc\, tg \left(\frac{p \cos\psi}{q}\right)\right],$$

worin $\varepsilon = o$ zu setzen, wenn der Punkt O ausserhalb F, dagegen $\varepsilon = \pm 1$, wenn O innerhalb fällt, und zwar $= + 1$ bei positivem, $= - 1$ bei negativem p. Man kann auch leicht einen andern Ausdruck für f herstellen, welcher vor dem vorhergehenden sich dadurch auszeichnet, dass er für alle Lagen des angezogenen Punktes in unveränderter Gestalt Geltung hat. Bezeichnet man nämlich die Flächen der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $O' Q' S'$ und $O' Q' T'$, aus welchen das Dreieck $O' S' T'$ $(\varDelta)$ besteht, durch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$, so ist nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$tg\, \tfrac{1}{2} \varDelta_1 = tg\, \tfrac{1}{2} g\; tg\, \tfrac{1}{2} m, \quad tg\, \tfrac{1}{2} \varDelta_2 = tg\, \tfrac{1}{2} g\; tg\, \tfrac{1}{2} n,$$

*) Man vergleiche z. B. Schellbach's „Neue Elemente der Mechanik“ p. 160.

und dadurch gelangt man sofort zu der folgenden Formel für f:

$$9') \quad f = 2 \sum_K \left[arc\,tg\,(tg\,\tfrac{1}{2}\,g\; tg\,\tfrac{1}{2}\,m) + arc\,tg\,(tg\,\tfrac{1}{2}\,g\; tg\,\tfrac{1}{2}\,n) \right].$$

Die $arc\,tg$ sind, wie auch in der vorher gegebenen Formel, zwischen $-\tfrac{1}{2}\pi$ und $+\tfrac{1}{2}\pi$ zu nehmen, der ebenfalls zwischen $-\tfrac{1}{2}\pi$ und $+\tfrac{1}{2}\pi$ zu wählende Bogen g hängt mit p und q durch die Gleichung $p\,tg\,g = q$ zusammen, und endlich ist $m = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi$, $n = \tfrac{1}{2}\pi - \psi$.

§ 5.

Wiewohl die Aufgabe, die Anziehung eines homogenen Polyeders zu bestimmen, in § 2 bereits in voller Allgemeinheit gelöst ist, so bedarf doch ein specieller Fall noch einer besonderen Erörterung, weil in ihm die Formeln unter der unbestimmten Form $\infty - \infty$ erscheinen und die Ermittelung ihres wahren Werthes einige Aufmerksamkeit erfordert; ich meine den Fall eines nach einer oder auch nach beiden Seiten hin unendlichen Prismas. Wir halten uns nicht bei dem Potentiale des Prismas auf, weil es einen unendlich grossen Werth annimmt, und in Betreff der Attractionscomponenten beschränken wir uns auf die Betrachtung der Wirkung eines geraden Prismas auf einen in der Ebene der Basis gelegenen Punkt, weil der Fall eines schief abgestumpften Prismas und eines beliebig gelegenen Punktes sich auf den eben genannten Fall und auf den eines Prismas von durchweg endlichen Dimensionen zurückführen lässt. In Fig. 3 ist als Beispiel ein dreiseitiges Prisma genommen, in dessen Basis DEF sich der angezogene Punkt P befindet. Die der Basis parallele Fläche $D'E'F'$ hat man sich schliesslich als ins Unendliche rückend, d. h. die Seitenkanten h unendlich lang vorzustellen. Wir bestimmen zuerst die Componente der Anziehung nach einer den Seitenkanten (oder der nach Innen gehenden Normalen zur Basis) parallelen Richtung. Es verschwinden dann alle sich auf die Seitenflächen des Prismas beziehenden Glieder, weil der Factor $cos\,\alpha$ für diese $= o$ wird; die von $D'E'F'$ herrührenden Glieder stellen das Oberflächenpotential dieser Fläche in Bezug auf den Punkt P dar, und dieses wird offenbar unendlich klein, wenn h unendlich zunimmt. Bemerkt man noch, dass für die Basis $p = o$ und $\alpha = o$, so findet man:

$$10) \quad A = \sum_K q\,log\,(cot\,\tfrac{1}{2}\,\varphi\; cot\,\tfrac{1}{2}\,\psi).$$

Hierin bezeichnet q das von P auf eine Seite (z. B. EF) der Basis gefällte Loth, φ und ψ stellen für EF den Winkel PEF und PFE vor, und die Summe erstreckt sich über alle Seiten der Basis. Wir gehen jetzt über zur Bestimmung der Attractionscomponente B nach einer beliebigen der Basis angehörigen Richtung. Hier kommen nur die auf die Seitenflächen sich beziehenden Glieder der Formel 6) in Betracht. Bezeichnet β den Winkel jener Richtung mit der auf einer Seitenfläche nach innen errichteten Normalen (q), und sind φ' und ψ' die Winkel, welche z. B. der Kante $E'F'$ in dem Dreiecke $PE'F'$ anliegen, so geben die der Basis parallelen Kanten ($E'F'$, $F'D'$ u. s. w.) den Beitrag

$$\sum cos\,\beta\,.\,h\,log\,(cot\,\tfrac{1}{2}\,\varphi'\; cot\,\tfrac{1}{2}\,\psi').$$

Setzt man aber $E'F' = s$, $PE' = r_1$ $PF' = r_2$, so ist aus der Trigonometrie bekannt, dass

$$cot\,\tfrac{1}{2}\,\varphi'\; cot\,\tfrac{1}{2}\,\psi' = \frac{r_1 + r_2 + s}{r_1 + r_2 - s}.$$

Wird nun h unendlich gross, so unterscheiden sich r_1 und r_2 unendlich wenig von h, und der Logarithmus des letzten Ausdruckes reducirt sich, wenn die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden, auf $\frac{s}{h}$, also die obige Summe auf $\Sigma\, s \cos\beta$, d. h. auf den Werth Null, wie aus einem bekannten geometrischen Satze oder auch leicht daraus geschlossen werden kann, dass $\Sigma\, s \cos\beta$ gleich dem Differentialquotienten von $\Sigma\, s\, q$ genommen nach der oben betrachteten Richtung, und dass $\Sigma\, s\, q$ für jede Lage von P constant ist, nämlich gleich dem Flächeninhalte der Basis des Prismas.

Von den logarithmischen Gliedern, welche sich auf die in der Basis liegenden Kanten der Seitenflächen beziehen, verschwindet jedes für sich, weil der Factor q für jedes derselben $= o$ wird; dagegen liefern die unendlich langen Seitenkanten:

$$\Sigma \cos\beta\, [s_1 \log(\cot {}^1\!/_4\, \pi \cot {}^1\!/_2\, \psi_1) + s_2 \log(\cot {}^1\!/_4\, \pi \cot {}^1\!/_2\, \psi_2)],$$

wenn s_1 und s_2 die Segmente bezeichnen, in welche EF (s) durch das von P gefällte Loth PQ getheilt wird, und $\psi_1 = \angle PE'E$, $\psi_2 = \angle PF'F$. Nun ist $\cot {}^1\!/_4\, \pi = 1$, und wenn $PE = \varrho_1$, $PF = \varrho_2$ gesetzt wird:

$$\cot\psi_1 = \frac{h}{\varrho_1},\ \cot\psi_2 = \frac{h}{\varrho_2},$$

woraus für $h = \infty$ folgt:

$$\cot {}^1\!/_2\, \psi_1 = \frac{2h}{\varrho_1}(1 + \varepsilon_1),\ \cot {}^1\!/_2\, \psi_2 = \frac{2h}{\varrho_2}(1 + \varepsilon_2),$$

während ε_1 und ε_2 unendlich kleine Grössen vorstellen. Die Summe nimmt also den Werth an:

$$\Sigma \cos\beta \left(s_1 \log\frac{2h}{\varrho_1} + s_2 \log\frac{2h}{\varrho_2}\right) = \log 2h\, \Sigma\, s \cos\beta - \Sigma \cos\beta\, (s_1 \log\varrho_1 + s_2 \log\varrho_2).$$

Aber der Factor von $\log 2h$ verschwindet, wie schon oben erwähnt, und es bleibt nur der zweite Bestandtheil auf der rechten Seite bestehen. Es sind endlich noch die von der scheinbaren Grösse (f) der Seitenflächen abhängenden Glieder zu berücksichtigen. Für $h = \infty$ geht aber z. B. das auf die Seitenfläche $EFF'E'$ sich beziehende f in ein sphärisches Dreieck über, dessen Ecken auf den Geraden PE, PF und der durch P parallel mit FF' gezogenen Geraden liegen. Zwei Winkel dieses Dreiecks sind rechte, der dritte ist $= \angle FPE = \chi$; also ist $f = \chi$. Wir erhalten also:

$$11)\ B = -\Sigma \cos\beta\, (q\chi + s_1 \log\varrho_1 + s_2 \log\varrho_2).$$

Diese Formel giebt die Stärke der Anziehung, welche das nach einer Seite unendliche Prisma auf einen Punkt in der Ebene der Basis nach einer beliebigen in dieser liegenden Richtung ausübt. Durch die Gleichung (10), welche auch in der Form

$$10')\ A = \Sigma\, q \log\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2 + s}{\varrho_1 + \varrho_2 - s}\right)$$

geschrieben werden kann, wurde oben die zur Basis senkrechte Attractionscomponente bestimmt.

Ist das Prisma nach beiden Seiten unendlich lang, so ist, bei beliebiger Lage des angezogenen Punktes, $A = o$ zu setzen, dagegen der Werth von B zu verdoppeln.

Ich wiederhole noch kurz die Bedeutung der in 10') und 11) vorkommenden Grössen und füge die nöthigen Bemerkungen über die Vorzeichen hinzu.

Es ist q das von dem angezogenen Punkte P auf eine Seitenfläche (oder Seite der Basis) gefällte Loth, positiv oder negativ genommen, je nachdem es die innere oder äussere Seite trifft;

s_1 und s_2 sind die Segmente, in welche eine Seite s der Basis durch dieses Loth getheilt wird. Das Vorzeichen eines Segments ist negativ, wenn es ganz in die Verlängerung der Seite über die Ecke, an der es liegt, hineinfällt, sonst positiv; es ist also $s_1 + s_2$ stets gleich der positiven Grösse s.

ϱ_1 und ϱ_2 sind die Abstände des Punktes P von den Ecken der Seite s, und χ ist der von diesen beiden Geraden eingeschlossene Winkel oder die scheinbare Grösse von s in Bezug auf P; ϱ_1 und ϱ_2 sind stets positiv zu nehmen, χ muss dasselbe Zeichen wie q erhalten.

β ist der Winkel der auf einer Seitenfläche (oder Seite der Basis) nach innen errichteten Normalen mit der Richtung, auf welche sich die Attractionscomponente B bezieht. Die Summen erstrecken sich über alle Seiten der Basis.

Es ist zu bemerken, dass, wenn der angezogene Punkt in einer Ecke der Basis liegt, zwar das auf diese Ecke bezügliche $\varrho_1 = o$, also $log\, \varrho_1 = \infty$ wird, dass aber gleichwohl das Glied $s_1\, log\, \varrho_1$ nicht unendlich wird, sondern vielmehr verschwindet, weil $s_1 = \varrho_1 \cos\varphi$ und $\varrho_1\, log\, \varrho_1$ für $\varrho_1 = o$ ebenfalls $= o$ wird.

§ 6.

Es liegt in dem Character der allgemeinen Formeln, dass sie auf besondere Polyeder, z. B. das Tetraeder, Parellelepipedon u. s. w., angewendet, so lange die Lage des angezogenen Punktes beliebig bleibt, sich nicht wesentlich vereinfachen lassen. Es mögen daher nur einige Beispiele für besondere Lagen des angezogenen Punktes folgen.

1) Es sei die Anziehung zu bestimmen, welche eine Pyramide auf einen materiellen Punkt in ihrer Spitze nach einer zur Basis senkrechten Richtung ausübt.

In der Formel 6) verschwinden hier alle von den Seitenflächen herrührenden Glieder mit Ausnahme der logarithmischen, welche sich auf die auch der Basis angehörigen Kanten beziehen. Aber für jede der letzteren liefert die Basis ein logarithmisches Glied, welches dem entsprechenden der anliegenden Seitenfläche, wie leicht zu sehen, gleich aber von entgegengesetztem Vorzeichen ist. Es bleibt also nur das Glied pf oder, wenn h die Höhe der Pyramide, hf übrig und die gesuchte Attractionscomponente ist also gleich dem Producte der Höhe in die scheinbare Grösse der Basis. Ist die Basis ein reguläres n-Eck und fällt der Mittelpunkt des diesem eingeschriebenen Kreises mit dem Fusspunkte der Höhe der Pyramide zusammen, so ist die Gesammtanziehung A, unter Anwendung von 9) in § 4:

$$A = h\left(2\pi - 2\, n\, arc\, tg\left(\frac{h \cos\varphi}{\varrho}\right)\right),$$

wobei ϱ den Radius des eingeschriebenen Kreises und φ den Winkel bezeichnet, den eine Seitenlinie s mit der anstossenden Seite der Basis bildet. Es ist aber $\cos\varphi = \frac{\varrho}{s}\, tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$, also:

$$A = 2\, h\left(\pi - n\, arc\, tg\left(\frac{h}{s}\, tg\, \frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Wird n unendlich gross, also die Pyramide ein gerader Kegel, so wird

$$A = 2\pi h \left(1 - \frac{h}{s}\right),$$

wie auch daraus leicht geschlossen werden konnte, dass die scheinbare Grösse f in diesem Falle durch eine Kugelcalotte gemessen wird. — Bei constantem s wird A ein Maximum für $h = \frac{1}{2} s$, oder wenn φ den Winkel zwischen h und s bezeichnet, für $\varphi = 60^0$. Fragt man, welcher von allen Kegeln über demselben Grundkreise, oder von constantem Volumen, auf die Spitze die stärkste Anziehungskraft ausübe, so ergiebt sich, dass im ersten Falle

$$\cos\varphi^2 + \cos\varphi = 1,\ \varphi = 51^0\ 49'\ 38''$$

und im zweiten

$$\cos\varphi^2 + \cos\varphi = \tfrac{2}{3},\ \varphi = 62^0\ 46'\ 44''.$$

2) Für die Anziehung, welche ein nach einer Seite unendliches Prisma, dessen Basis ein reguläres n-Eck, auf den Mittelpunkt des der Basis eingeschriebenen Kreises ausübt, erhält man, wenn ϱ der Radius dieses Kreises, vermöge 10) sogleich den Ausdruck:

$$A = 2n\varrho \log \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right);$$

wird $n = \infty$, also das Prisma ein gerader Cylinder, so entsteht hieraus:

$$A = 2n\varrho \log\left(1 + \frac{\pi}{n}\right) = 2\varrho \log\left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^n, \text{ d. h. } A = 2\pi\varrho.$$

Die Anziehung des unendlichen Cylinders auf den Mittelpunkt der Basis ist also nur um die Hälfte grösser, als die einer Kugel vom Halbmesser ϱ auf einen Punkt ihrer Oberfläche.

§ 7.

An den eben behandelten sehr einfachen Beispielen hat es sich gezeigt, wie die Formeln für die Pyramide und das Prisma einen Uebergang auf den Kegel und Cylinder gestatten. Es lässt sich aber aus den für die Polyeder gewonnenen Resultaten ein viel allgemeinerer und wichtigerer Schluss ziehen. Wenn nämlich ein Körper nur abwickelbare Flächen (wozu auch die ebenen selbst gezählt werden mögen) zu Grenzflächen hat, so ist es immer möglich ihn in ebenflächig begrenzte und nur nach Einer Dimension unendlich kleine Elemente zu zerschneiden; einen Cylinder z. B. vermittelst Ebenen, die den Seitenlinien parallel sind, einen Kegel durch Ebenen, die durch seinen Scheitel gehen u. s. w. Das Potential und die Anziehung eines solchen Elementes wird vermöge 5) und 6) durch Ausdrücke von endlicher Gliederzahl bestimmt, und die Summe dieser Ausdrücke, für alle Elemente genommen, ist offenbar nichts Anderes als ein einfaches Integral. Man hat also den folgenden Satz:

Das Potential und die Attractionscomponenten eines homogenen von abwickelbaren Flächen vollständig begrenzten Körpers sind stets durch einfache Integrale darstellbar.

Es unterliegt keiner wesentlichen Schwierigkeit, diese Integrale aus den für die Polyeder gegebenen Formeln herzuleiten, aber man gelangt wohl noch einfacher durch eine mehr directe Behandlung des Problems, wie ich sie im Folgenden andeuten werde, zum Ziele.

Ich wähle als Beispiel einen geraden Cylinder, der eine beliebig gestaltete ebene Figur zur Basis hat und am anderen Ende durch eine damit parallele, in der

Höhe $2h$ geführte Ebene geschlossen ist. Wir nehmen eine der Höhe parallele, durch den Körper hindurchgehende Gerade zur Axe der X und die die Höhe halbirende und darauf senkrechte Ebene zur Ebene der YZ, bezeichnen durch x, y, z die Coordinaten eines Punktes im Körper und durch a, b, c diejenigen des angezogenen Punktes P. Nach 2) hat die Stärke der Anziehung nach einer beliebigen Richtung den Werth:

$$2^*)\ A = \int \frac{\cos\alpha\, d\omega}{r}.$$

Fragen wir zuerst nach der der positiven X-Axe parallelen Componente, so haben wir $\cos\alpha = o$ zu setzen für alle Elemente $d\omega$ des Mantels, $\cos\alpha = 1$ für die Grundfläche, deren Gleichung $x = -h$ ist, und $\cos\alpha = -1$ für die Grundfläche $x = +h$. Man hat also:

$$A = \iint \left(\frac{1}{\sqrt{(a+h)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a-h)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} \right) dy\, dz,$$

das Doppelintegral über die ganze Fläche der Basis oder auch der Mittelfigur genommen. Setzt man nun

$$y = b + \varrho\cos\vartheta,\ z = c + \varrho\sin\vartheta, \text{ so wird:}$$

$$A = \iint \left(\frac{1}{\sqrt{(a+h)^2 + \varrho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a-h)^2 + \varrho^2}} \right) \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Projection des Punktes P auf die YZ-Ebene in die Mittelfigur hinein falle, oder mit anderen Worten, dass P innerhalb des Raumes liege, der von dem unendlich erweitert gedachten Cylindermantel umschlossen wird. Dann ist nach ϱ von $\varrho = o$ bis $\varrho = \varrho_1$ (d. h. bis zur Peripherie der Basis) und darauf nach ϑ über den ganzen Umfang der Basis in der Richtung von der positiven Y-Axe nach der positiven Z-Axe hin zu integriren. Die Integration nach ϱ ist allgemein ausführbar, und man findet:

$$\text{(I)}\ A = \int \left(\sqrt{(a+h)^2 + \varrho_1^2} - \sqrt{(a-h)^2 + \varrho_1^2} - \varepsilon \right) d\vartheta,$$

wenn:

$$\varepsilon = \sqrt{(a+h)^2} - \sqrt{(a-h)^2},$$

und wenn die Quadratwurzeln sämmtlich positiv genommen werden. Die Coordinaten y_1, z_1 eines Punktes auf der Peripherie der Basis kann man sich als Functionen einer unabhängigen Variablen u gegeben denken vermöge der Gleichungen

$$y_1 = \psi(u),\ z_1 = \chi(u), \text{ dann ist:}$$

$$\psi(u) = b + \varrho_1 \cos\vartheta,\ \chi(u) = c + \varrho_1 \sin\vartheta,\ tg\,\vartheta = \frac{\chi(u) - c}{\psi(u) - b},$$

also, wenn man die Differentialquotienten nach u durch Accente bezeichnet:

$$d\vartheta = \frac{(\psi(u) - b)\,\chi'(u) - (\chi(u) - c)\,\psi'(u)}{(\psi(u) - b)^2 + (\chi(u) - c)^2}\, du;$$

ferner:

$$\varrho_1^2 = (\psi(u) - b)^2 + (\chi(u) - c)^2.$$

Diese Werthe für $d\vartheta$ und ϱ_1^2 hat man in (I) zu substituiren und die Grenzen nach u so zu bestimmen, als wenn es sich um die Rectification der Basiscurve handelte. Wie man sich leicht überzeugen wird, gilt die Formel (I) auch dann unverändert fort, wenn P ausserhalb des Cylindermantels liegt; aber man darf hierbei nicht übersehen, dass der Bestandtheil $\int \varepsilon\, d\vartheta$ jederzeit vollständig ermittelt werden kann und je nach der Lage des angezogenen Punktes einen verschiedenen analytischen Ausdruck hat. Es ist nämlich:

$\int \varepsilon \, d\vartheta = o$, wenn P ausserhalb des Mantels,

$\int \varepsilon \, d\vartheta = 2\pi\varepsilon$, wenn P innerhalb liegt.

Ferner beachte man, im letzteren Falle, dass

für $\infty > a > h : \varepsilon = (a + h) - (a - h) = 2h$

für $h > a > -h : \varepsilon = (a + h) - (h - a) = 2a$

für $-h > a > -\infty : \varepsilon = -(a + h) - (h - a) = -2h.$

Es hat hiernach den Anschein, als ob A beim Durchgange durch den Mantel eine Stetigkeitsunterbrechung erlitte, während man doch weiss, dass die Attractionscomponenten im ganzen Raume stetige Functionen sind. Allein man wird auch aus (I) die Stetigkeit von A sofort erkennen, wenn man diese Formel, nachdem man den darunter befindlichen Werth von ε eingesetzt, in folgender Weise schreibt:

$$A = \int \left(\frac{1}{\sqrt{(a+h)^2 + \varrho_1^2} + \sqrt{(a+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a-h)^2 + \varrho_1^2} + \sqrt{(a-h)^2}} \right) \varrho_1^2 \, d\vartheta,$$

und für $\varrho_1^2 \, d\vartheta$ seinen Werth als Function von u substituirt.

Bei der Bestimmung der der Y-Axe parallelen Componente $B = \int \frac{\cos\beta \, d\omega}{r}$ beachte man zuvörderst, dass $\cos\beta = o$ für die beiden Grundflächen, dass also das Integral nur über den Mantel auszudehnen ist. Es sei s der Bogen der Basiscurve, von der positiven Y-Axe nach der positiven Z-Axe hin wachsend, so ist $\cos\beta = -\frac{dz_1}{ds}$ und $d\omega = ds \, dx$, also $\cos\beta \, d\omega = -dz_1 \, dx = -\chi'(u) \, du \, dx$ und

$$B = -\iint \frac{\chi'(u) \, du \, dx}{\sqrt{(a-x)^2 + (b - \psi(u))^2 + (c - \chi(u))^2}} = -\iint \frac{\chi'(u) \, du \, dx}{\sqrt{(a-x)^2 + \varrho_1^2}}.$$

Man könnte jetzt die Integration nach x vermöge einer bekannten, auf einen Logarithmus führenden Formel berechnen; allein diese logarithmische Form lässt sich vermeiden, wenn man zuvor auf das Integral nach u das Verfahren der theilweisen Integration anwendet. Das hierbei auftretende vom Integralzeichen freie Glied verschwindet beim Uebergange zu dem bestimmten Integrale, weil das Integral sich über den ganzen Umfang einer geschlossenen Kurve erstreckt, also χ, so wie ψ und ϱ_1, an den Grenzen dieselben Werthe annehmen; man erhält folglich:

$$B = -\iint \frac{\chi(u) \, \varrho_1 \, d\varrho_1 \, dx}{[(a-x)^2 + \varrho_1^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\int \frac{dx}{[(a-x)^2 + \varrho_1^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a - x}{\varrho_1^2 \sqrt{(a-x)^2 + \varrho_1^2}} + Const.$$

und da dies Integral zwischen den Grenzen $-h$ und $+h$ genommen werden muss, so wird:

$$\text{(II)} \quad B = -\int \left(\frac{a+h}{\sqrt{(a+h)^2 + \varrho_1^2}} - \frac{a-h}{\sqrt{(a-h)^2 + \varrho_1^2}} \right) \chi(u) \frac{d\varrho_1}{\varrho_1}$$

Der Kürze wegen sind die Zeichen ϱ_1^2 und $\frac{d\varrho_1}{\varrho_1}$ statt der Ausdrücke

$$\varrho_1^2 = (\psi - b)^2 + (\chi - c)^2$$

$$\frac{d\varrho_1}{\varrho_1} = \frac{(\psi - b)\psi' + (\chi - c)\chi'}{(\psi - b)^2 + (\chi - c)^2} \, du$$

beibehalten worden. — Die dritte Attractionscomponente C

$$\left(= \int \frac{\cos\gamma \, d\omega}{r} = + \iint \frac{\psi'(u) \, du \, dx}{r} \right)$$

lässt sich augenscheinlich auf dieselbe Weise wie B behandeln, und man erkennt auch ohne neue Rechnung sofort, dass

$$\text{(III)}\quad C = \int \left(\frac{a+h}{\sqrt{(a+h)^2+\varrho_1^2}} - \frac{a-h}{\sqrt{(a-h)^2+\varrho_1^2}} \right) \psi(u)\,\frac{d\varrho_1}{\varrho_1},$$

wobei das Integral wieder über den ganzen Umfang der die Basis begrenzenden Kurve zu nehmen ist und man diese Kurve sich in derselben Richtung wie bei B durchlaufen denken muss. — Ich setze noch die Formel für A aus (I), in etwas anderer Gestalt, hinzu, nämlich:

$$(\mathrm{I^a})\quad A = A_1 - A_2,\ \text{worin}\ A_1 = \int \left(\sqrt{(a+h)^2+\varrho_1^2} - \sqrt{(a+h)^2} \right) d\vartheta$$

und A_2 aus A_1 durch Verwandlung von h in $-h$ hervorgeht.

Um das Potential V, das nach (1) gleich dem Doppelintegrale $\frac{1}{2}\int\frac{p\,d\omega}{r}$ ist, auf Quadraturen zurückzuführen, bemerke man, dass für die Grundflächen ($x = -h$ und $x = h$) das Loth p resp. $= a + h$ und $= -(a - h)$, $d\omega$ aber $= dy\,dz$ ist, und dass ferner für den Mantel $d\omega = ds\,dx$ und p gleich dem auf die Tangentialebene gefällten Lothe, d. h.

$$p = \Big[(\psi - b)\,\chi' - (\chi - c)\,\psi' \Big] \frac{du}{ds}.$$

Dadurch ergiebt sich sofort, dass:

$$\text{(IV)}\quad 2V = (a+h)\,A_1 - (a-h)\,A_2 + b\,B + c\,C$$
$$+ \int (\psi\,\chi' - \chi\,\psi')\,\log\left(\frac{\sqrt{(a+h)^2+\varrho_1^2}+a+h}{\sqrt{(a-h)^2+\varrho_1^2}+a-h} \right) du.$$

Will man die gewonnenen Formeln auf den Fall eines elliptischen Cylinders anwenden, so hat man, wenn $2g$ und $2k$ die grösste und kleinste Axe des elliptischen Querschnittes bezeichnen, nur nöthig überall in den Formeln $\psi(u) = g\cos u$, $\chi(u) = k\sin u$ zu setzen und die Integrale zwischen den Grenzen o und 2π (oder auch $-\pi$ und π) zu nehmen. Aber ich will hierbei nicht verweilen, weil dieses specielle Problem in anderer Weise schon früher von Herrn Dr. Röthig im Programm der Gewerbeschule vom Jahre 1861 und im 61. Bande des Borchardt'schen Journals behandelt ist, und wie ich aus diesen Arbeiten ersehe, die Attractionscomponenten nach einer anderen Methode auch von Herrn Grube (De cylindri et coni attractione. Diss. inaug. Göttingae 1859) auf elliptische Integrale zurückgeführt sind. Dagegen will ich nicht unterlassen, die Vereinfachungen anzugeben, welche die allgemeinen Formeln erfahren, wenn der Cylinder unendlich hoch und der angezogene Punkt in der Ebene der Basis befindlich ist. Der Uebergang auf diesen Fall geschieht einfach dadurch, dass man zuerst $a = -h$ und sodann $h = +\infty$ setzt, wodurch sich ergiebt:

$$A = \int \varrho_1\,d\vartheta = \int \frac{(\psi-b)\,\chi' - (\chi-c)\,\psi'}{\sqrt{(\psi-b)^2+(\chi-c)^2}}\,du$$

$$\text{(V)}\quad B = -\int \chi(u)\,\frac{d\varrho_1}{\varrho_1} = -\int \frac{(\psi-b)\,\psi' + (\chi-c)\,\chi'}{(\psi-b)^2+(\chi-c)^2}\,\chi\,du$$

$$C = \int \psi(u)\,\frac{d\varrho_1}{\varrho_1} = \int \frac{(\psi-b)\,\psi' + (\chi-c)\,\chi'}{(\psi-b)^2+(\chi-c)^2}\,\psi\,du.$$

In den allgemeinen Formeln (II) und (III) konnte man, bei Gelegenheit der theilweisen Integration, statt der Factoren $\chi(u)$ und $\psi(u)$ unter den Integralzeichen auch $\chi - c$ und $\psi - b$ erhalten, und diese Veränderung ist in dem Falle sogar nothwendig, wenn der angezogene Punkt auf der Peripherie der Basis liegt, weil dann innerhalb der Integrationsgrenzen $\varrho_1 = o$, also z. B. $\chi(u) : \varrho_1$ unendlich wird, während $(\chi - c) : \varrho_1$ endlich bleibt. Aendert man dem entsprechend auch die beiden letzten der Formeln (V), so bildet man leicht:

$$B - Ci = \int \frac{(\psi - b)\,\psi' + (\chi - c)\,\chi'}{-(\chi - c) + i\,(\psi - b)}\,d\,u,\ (i = \sqrt{-1}),$$

und addirt man hierzu die identische Gleichung $o = \int (\chi' + i\,\psi')\,d\,u$, so folgt:

$$\text{(VI)}\ B - Ci = \int \frac{(\psi - b)\,\chi' - (\chi - c)\,\psi'}{\psi - b + i\,(\chi - c)}\,d\,u.$$

Hat man das Integral auf der rechten Seite ermittelt, so giebt die Sonderung des reellen und imaginären Theiles gleichzeitig B und C.

Für den elliptischen Cylinder ($\psi = g\cos u$, $\chi = k\sin u$) lässt sich die Integration ausführen, während der Ausdruck für A im Allgemeinen auf elliptische Integrale führt. Beiläufig sei erwähnt, dass auch A auf Elementarfunctionen zurückführbar ist, wenn der angezogene Punkt sich in einem Brennpunkte oder auf der Peripherie der Ellipse befindet.

Ist der Cylinder nach beiden Seiten hin unendlich, so ist statt B und C das Doppelte der in (V) befindlichen Werthe zu setzen, während $A = o$ wird.

§ 8.

Zum Schlusse will ich noch zeigen, dass das Potential und die Attractionscomponenten eines Körpers, der von beliebig vielen durch Bewegung gerader Linien erzeugten Flächen begrenzt ist, selbst dann sich auf einfache Integrale zurückführen lassen, wenn diese Flächen keine abwickelbaren sind.

Wir haben die schon mehrfach benutzten, wohl zuerst von Gauss aufgestellten Formeln
$$A = \int \cos\alpha\,\frac{d\,\omega}{r},\quad B = \int \cos\beta\,\frac{d\,\omega}{r},\quad C = \int \cos\gamma\,\frac{d\,\omega}{r},$$
$$2\,V = \int p\,\frac{d\,\omega}{r} = \int \Big[(a - x)\cos\alpha + (b - y)\cos\beta + (c - z)\cos\gamma\Big]\frac{d\,\omega}{r}.$$

Die Integrale erstrecken sich über die Oberfläche aller Grenzflächen; wir werden den eben aufgestellten Satz bewiesen haben, wenn wir zeigen, dass für irgend eine derselben in den betreffenden Doppelintegralen die eine Integration sich ausführen lässt. Die rechtwinkligen Coordinaten jeder Regelfläche können als Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen t und u dargestellt werden in der Form:

$$x = \varphi(u) + t\,\psi(u),\ y = \varphi_1(u) + t\,\psi_1(u),\ z = \varphi_2(u) + t\,\psi_2(u).$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{dy}{dt}\frac{dz}{du} - \frac{dz}{dt}\frac{dy}{du} & & \cos\alpha = \frac{\varepsilon\,\Delta}{Q}\\
\Delta_1 &= \frac{dz}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dx}{dt}\frac{dz}{du} & \text{so ist:}\quad & \cos\beta = \frac{\varepsilon\,\Delta_1}{Q}\\
\Delta_2 &= \frac{dx}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{du} & & \cos\gamma = \frac{\varepsilon\,\Delta_2}{Q}\\
Q &= \sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2} & & d\omega = Q\,d\,u\,d\,t,
\end{aligned}$$

wobei ε überall entweder $= + 1$ oder überall $= - 1$ ist und durch die Bedingung bestimmt werden muss, dass α, β, γ sich auf die nach Innen, und nicht auf die nach Aussen gerichtete Normale beziehen. Durch Einführung dieser Werthe erhält man:

$$A = \int \frac{\varepsilon \Delta}{r} \, du \, dt, \quad B = \int \frac{\varepsilon \Delta_1}{r} \, du \, dt, \quad C = \int \frac{\varepsilon \Delta_2}{r} \, du \, dt,$$

$$2V = aA + bB + cC - \int \frac{\varepsilon (x \Delta + y \Delta_1 + z \Delta_2)}{r} \, du \, dt,$$

$$r = \sqrt{(a - \varphi - t\psi)^2 + (b - \varphi_1 - t\psi_1)^2 + (c - \varphi_2 - t\psi_2)^2}$$

Nun ist aber:

$$\frac{dy}{dt} = \psi_1, \; \frac{dz}{du} = \varphi'_2 + t\psi'_2, \text{ u. s. w., also}$$

$$\Delta = \psi_1 \varphi'_2 - \psi_2 \varphi'_1 + (\psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1) t$$

$$\Delta_1 = \psi_2 \varphi' - \psi \varphi'_2 + (\psi_2 \psi' - \psi \psi'_2) t$$

$$\Delta_2 = \psi \varphi'_1 - \psi_1 \varphi' + (\psi \psi'_1 - \psi_1 \psi') t,$$

und, wegen $\psi \Delta + \psi_1 \Delta_1 + \psi_2 \Delta_2 = o$:

$$x \Delta + y \Delta_1 + z \Delta_2 = \varphi \Delta + \varphi_1 \Delta_1 + \varphi_2 \Delta_2.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Formeln für A, B, C, $2V$ einsetzt, so nimmt das Integral nach t in allen vieren die Form

$$\int \frac{(gt + h)\, dt}{\sqrt{kt^2 + lt + m}}$$

an, während g, h, k, l, m Funktionen von u allein vorstellen, also bei der Integration nach t constant sind.

Dieses Integral gehört, wie allgemein bekannt, zu denjenigen, deren Werth sich durch algebraische Grössen und Logarithmen angeben lässt, die Integrationsgrenzen sind Funktionen von u, die in jedem gegebenen Falle besonders bestimmt werden können, und es bleibt also in der That nur Eine Integration, die nach u zu vollziehen übrig.

In dem 60. Bande von Borchardt's Journal habe ich die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades irgend welcher Art begrenzten Schale nach einer auf Anwendung des Dirichlet'schen Discontinuitätsfactors beruhenden Methode berechnet. Unter den Flächen zweiten Grades befinden sich aber zwei nicht abwickelbare Regelflächen, das einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Durch den in diesem Paragraphen bewiesenen Satz ist somit eine andere, von der eben berührten gänzlich verschiedene Methode gewonnen, die Anziehung der einfach-hyperboloidischen und hyperbolisch-paraboloidischen Schalen zu ermitteln. Man sieht ferner ohne Weiteres ein, dass z. B. auch die Attractionscomponenten eines Körpers, der von einem einfachen Hyperboloide und zwei dasselbe schneidenden Ebenen begrenzt ist, sich mit Hülfe einfacher Integrale ausdrücken lassen.

Fig. 1.

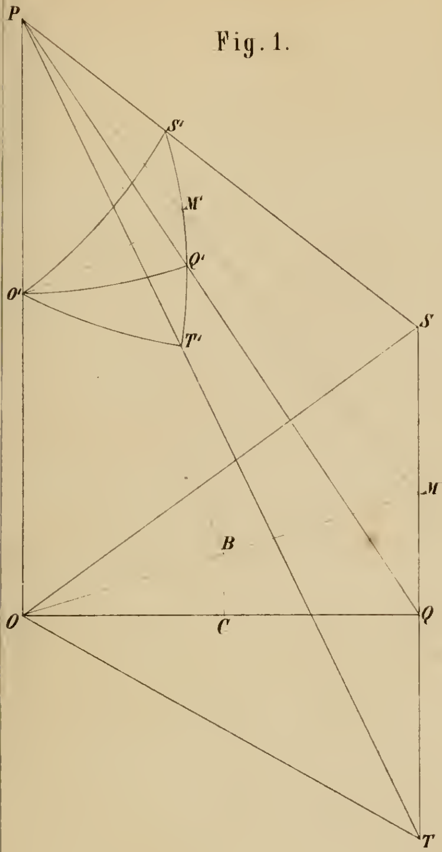

Fig. 3.

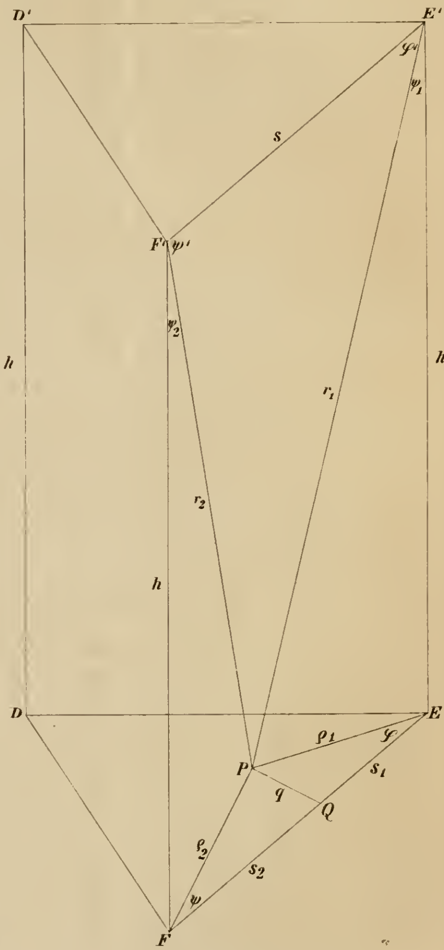

Fig. 2.

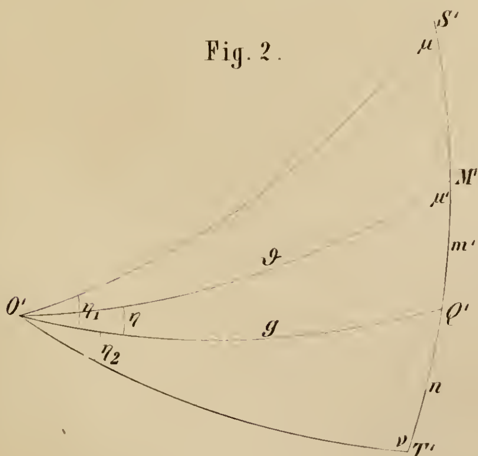

Fig. 1.

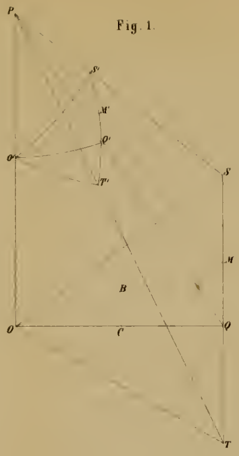

Fig. 3

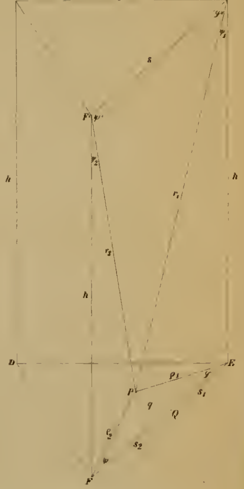

Fig 2