Untersuchung des Mondes

Hinsichts seiner ellipsoidischen Gestalt

von

E. Kayser,

Astronom der naturforschenden Gesellschaft in Danzig und Mitglied
der astronomischen Gesellschaft.

Sehen wir vorläufig die Sonne, Erde und den Mond in einer Ebene befindlich an, und stellen uns den Mond als Ellipsoid, dessen Halbaxen a und b sind, mit der grossen Halbaxe a genau nach der Erde gerichtet vor, so erscheint er kreisförmig mit dem Radius b, sobald er von der Sonne vollständig beleuchtet ist. Findet die Beleuchtung unter dem Winkel ϱ' mit der grossen Axe statt, so wird die scheinbare grösste Sichelbreite erhalten, wenn man parallel dieser Richtung die Tangente an die Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, und die Tangente von der Erde aus zieht und die Projection berücksichtigt. Der Ausdruck für die Sichelbreite wird:

$$b \pm \frac{b \cos \varrho'}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \sin \varrho'^2 + \cos \varrho'^2}}$$

je nachdem die Sonne auf Seite der uns zugekehrten Axe a (+), oder hinter ihr (—) steht. Ist der Mond eine Kugel mit dem Radius b, also $a = b$, dann geht der angeführte Ausdruck über in:

$$b \pm b \cos \varrho'.$$

Fragt man, ob ein merklich messbarer Unterschied für die Dimensionen unseres Mondes zwischen jenem und diesem Werthe nachweisbar ist, so handelt es sich um die Differenz beider, also um die Quantität:

$$b \cos \varrho' - \frac{b \cos \varrho'}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \sin \varrho'^2 + \cos \varrho'^2}}$$

Setzen wir $a = b + q$ und vernachlässigen, da a und b um wenig von einander abweichen die höheren Potenzen von q, so ist für unseren letzten Ausdruck mit ziemlich genügender Näherung zu substituiren:

$$q \cos \varrho' \sin \varrho'^2.$$

Differentiirt man diese Grösse und setzt den Differentialquotienten $= 0$, so erhält man für den Fall des Maximalbetrages der Abweichung für Kugel und Ellipsoid:

$$tg\, \varrho' = \sqrt{2}$$

oder $\varrho' = 54^0\, 44'$.

Unser Unterschied wird also:

$$0{,}3849\ (a - b).$$

In No. 1266, pag. 286 der Astr. Nachr. steht die Angabe *Gussew*'s, dass die Erhebung der uns zugekehrten Mondhälfte 0,07 des Radius beträgt, während *Hansen*'s theoretische Untersuchungen unter Annahme einer homogenen Dichtigkeit den Werth der Erhebung auf 0,034 festsetzen. Die erst genannte Angabe rührt von Messungen her, die an zwei von *Warren de la Rue* bei sehr verschiedenen Librationen aber gleichen Phasen aufgenommenen Photographieen gemacht sind. Legt man diese Werthe zu Grunde, so würden für unseren Unterschied die Beobachtungen 25″ oder 12″ ergeben müssen, Grössen, die zu beträchtlich sind, als dass sie sich der Beobachtung entziehen sollten. Demgemäss würde sich zu Zeiten, da der Beleuchtungswinkel etwa 54° beträgt, die Nachmessung ganz besonders empfehlen. Allerdings entstehen durch die Terrainverschiedenheit auf der Mondoberfläche Schwierigkeiten. Nennen wir die Höhe eines Mondberges h, dann ist

$$\sin \varrho' \sqrt{(2b + h)h} \text{ oder auch genau genug}$$
$$\sin \varrho' \sqrt{2bh}$$

die Erweiterung der Lichtgrenze, welche beispielsweise für eine Erhebung von 1000 Fuss schon 14—15″ beträgt. Indessen lässt sich die Lichtgrenze in der Ebene scharf verfolgen, während bei unebenem Terrain die leicht zu erkennende Discontinuität auftritt. Es ist wohl schwer anzunehmen, dass auf der Oberfläche eine ganz gleichmässige Quantität zu viel oder zu wenig die Veranlassung zur Erscheinung einer scharf verlaufenden Linie im Sinne der Lichtgrenze sein sollte, ohne einzuräumen, dass man es mit der Mondoberfläche selbst zu thun hat. Der mit der Zeit gesetzlich sich ändernde Gang der Lichtgrenze und die Uebereinstimmung der Messungen bei verschiedenen Librationen und bei den vier in Betracht zu ziehenden Phasen, ein paar Tage vor dem ersten und nach dem letzten Viertel, sowie zu den Zeiten, wann der Mond vollständig bis auf diese Sicheln erleuchtet ist, werden über die Gültigkeit der Annahme, ob der Mond ein Ellipsoid ist, entscheiden.

Wir haben uns daher vorgesetzt, die betreffende Aufgabe mit Rücksicht auf die Aenderungen, welche die Libration hervorruft, näher zu untersuchen.

Wir nehmen an, dass die Aequatorebene des Mondes die XY Ebene vorstellt, die uns zugekehrte grosse Halbaxe mit der positiven X Axe zusammenfällt, die positive Y Axe nach links oder Osten, die positive Z Axe nach Norden gerichtet ist. Die Gleichung des Ellipsoides ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Der Kegel, der seine Spitze im Orte des Beobachters mit den Coordinaten α, β, γ hat, berührt die krumme Fläche in einer ebenen Curve; diese Ebene wird dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{x\,\alpha}{a^2} + \frac{y\,\beta}{b^2} + \frac{z\,\gamma}{b^2} = 1.$$

Wird die Entfernung vom Beobachtungsort zum Mondmittelpunkt e genannt und festgesetzt, dass die Richtung der Visirlinie mit der Aequatorebene den Winkel ϑ, nördlich von derselben $+$, und ihre Projection auf den Aequator mit der positiven X Axe den Winkel ϱ, $+$ für eine östliche Lage, bildet, dann ist:

$$\alpha = e \cos \vartheta \cos \varrho$$
$$\beta = e \cos \vartheta \sin \varrho$$
$$\gamma = e \sin \vartheta.$$

Suchen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes der berührenden Curve mit der Aequatorebene oder einer bestimmten durch den Mond ihr parallel gelegten Ebene (Parallel-Ellipse) so haben wir noch die Gleichung

$$z = b \sin \eta$$

zuzufügen, worin η den nördlich positiv gezählten Breitenwinkel in der durch die Axen Y und Z gelegten Ebene bedeutet, und die drei Gleichungen auflösen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x\, e \cos \vartheta \cos \varrho}{a^2} + \frac{y\, e \cos \vartheta \sin \varrho}{b^2} + \frac{z\, e \sin \vartheta}{b^2} = 1,$$
$$z = b \sin \eta.$$

Die Auflösung ergiebt die Werthe:

$$x = -\frac{b \sin \eta\, tg\, \vartheta\, a^2 \cos \varrho}{a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2} + \frac{a^2 b^2 \cos \varrho}{e \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)} \mp \frac{a^2 \sin \varrho}{\sqrt{a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2}}\, W$$
$$y = -\frac{b \sin \eta\, tg\, \vartheta\, a^2 \sin \varrho}{a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2} + \frac{a^2 b^2 \sin \varrho}{e \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)} \pm \frac{b^2 \cos \varrho}{\sqrt{a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2}}\, W$$
$$z = b \sin \eta$$

worin W die Bedeutung hat:

$$W = \sqrt{1 - \sin \eta^2 \left(1 + \frac{a^2 tg\, \vartheta^2}{a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2}\right) + \frac{2 b\, a^2 \sin \eta\, tg\, \vartheta}{e \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)} - \frac{a^2 b^2}{e^2 \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)}}$$

Die oberen Zeichen beziehen sich auf Coordinaten eines östlichen Durchschnittspunktes, die unteren auf Coordinaten eines westlichen.

Wir modificiren jetzt unsere Aufgabe, die grösste scheinbare Sichelbreite zu finden, dahin, in der Ebene, die durch die scheinbare Mondmitte und den im Aequator entstehenden Durchschnittspunkt der berührenden Curve oder äusseren Lichtgrenze gelegt wird, also in dieser scheinbar als gerade Linie auf dem Monde sich darstellenden Ebene, den Unterschied oder die Summe des scheinbaren Mondradius und des scheinbaren Radius der durch die Sonne veranlassten Beleuchtungsellipse zu suchen. In diesem Falle wird $\eta = o$ und wir erhalten die beiden Gleichungen:

$$\text{(I.)} \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a^2 b^2 \cos \varrho}{e \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)} \mp \frac{a^2 \sin \varrho}{\sqrt{a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{e^2 \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)}} \\ y &= \frac{a^2 b^2 \sin \varrho}{e \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)} \pm \frac{b^2 \cos \varrho}{\sqrt{a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{e^2 \cos \vartheta\, (a^2 \sin \varrho^2 + b^2 \cos \varrho^2)}} \end{aligned} \right.$$

Indem wir in der Entwickelung der Potenzen von $a = b + q$, die Quadrate von q mit Weglassung einzelner vollständig unbedeutender Glieder berücksichtigen, erhalten wir die folgenden Ausdrücke, welche noch mehr als den der Aufgabe entsprechenden Grad der Genauigkeit leisten:

$$x = \mp b \sin \varrho \mp q \sin \varrho\, (1 + \cos \varrho^2) + \frac{b^2 \cos \varrho}{e \cos \vartheta} + \frac{2\, b\, q \cos \varrho^3}{e \cos \vartheta} \mp \frac{q^2}{b} \sin \varrho$$

$$y = \pm b \cos \varrho \mp q \sin \varrho^2 \cos \varrho + \frac{b^2 \sin \varrho}{e \cos \vartheta} + \frac{2b\, q \sin \varrho \cos \varrho^2}{e \cos \vartheta} \mp \frac{q^2}{2b} \sin \varrho^2 \cos \varrho\, (\cos \varrho^2 - 2 \sin \varrho^2)$$

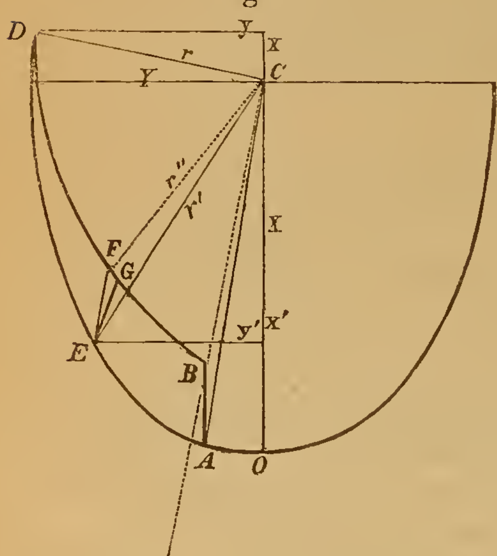
Der Ausdruck für den nach der Durchschnittsstelle gezogenen Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ wird:

$$r = b + q\, sin\, \varrho^2 + \frac{5}{2b} q^2\, sin\, \varrho^2\, cos\, \varrho^2 \mp \frac{2\, bq\, sin\, \varrho\, cos\, \varrho}{e\, cos\, \vartheta}$$

Die beiden nach Osten und Westen genommen Radien werden also nur dann gleich gross, wenn $\frac{1}{e}$ verschwindend klein angenommen werden kann.

Um unsere Vorstellung besser zu fixiren, stellen wir in den beiden Figuren die in Betracht zu ziehenden Linien vor, indem wir der östlichen Seite nähere Rücksicht zuwenden.

Fig. 1.

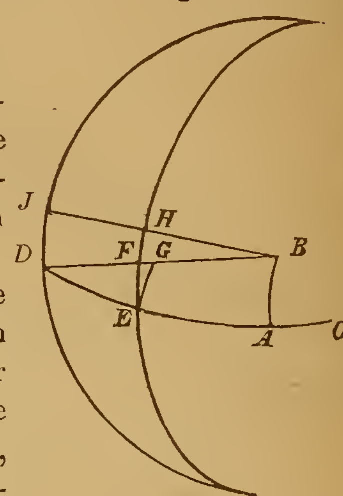


In Fig. 1 sei CO die nach der Erde hin gewandte grosse Halbaxe

$$a = b + q$$

in der durch O gelegten Ellipse, welche den Mondäquator vorstellt, CA die auf den Aequator projicirte Richtung der Visirlinie CB, so dass die Bogen AO und BA in der Sphäre gemessen die Winkel ϱ und ϑ sind, D der Durchschnittspunkt des Aequators

Fig. 2.



in der äusseren Lichtgrenze, CD also unser östliches r. Während Fig. 1 eine Ansicht des Mondes vorstellt, wenn man senkrecht über dem Aequator sich befindet, giebt Fig. 2 die scheinbare Ansicht in der Wirklichkeit. Wir haben daher den scheinbaren Radius DB zu suchen, oder r mit dem Sinus des Winkels DCB (oder Bogen DB) zu multipliciren.

Im sphärisch gefassten Dreieck DBA ist:

$$cos\, DB = cos\, DA\, cos\, \vartheta.$$

Wird $DB = \psi$ genannt, dann hängt ψ von DA ab, welches $= DO - \varrho$ ist, worin $cos\, DO = \frac{x}{r}$ und $sin\, DO = \frac{y}{r}$.

Aus dem Früheren folgt aber:

$$\frac{x}{r} = \mp sin\, \varrho \mp \frac{2q}{b} sin\, \varrho\, cos\, \varrho^2 + \frac{b\, cos\, \varrho}{e\, cos\, \vartheta} + \frac{2q\, cos\, \varrho\, cos\, 2\varrho}{e\, cos\, \vartheta} \mp \frac{q^2}{b^2} sin\, \varrho$$

$$\frac{y}{r} = \pm cos\, \varrho \mp \frac{2q}{b} sin\, \varrho^2\, cos\, \varrho + \frac{b\, sin\, \varrho}{e\, cos\, \vartheta} + \frac{2q\, cos\, \varrho\, sin\, 2\varrho}{e\, cos\, \vartheta} \mp \frac{3\, q^2}{b^2} sin\, \varrho^2\, cos\, \varrho^3 + \frac{5\, q^2\, sin\, \varrho\, cos\, \varrho^2}{e\, b\, cos\, \vartheta}.$$

Stellt nun EF die innere Beleuchtungsgrenze vor, so ist zweitens der Ausdruck für den scheinbaren Radius FB (Fig. 2) zu ermitteln.

Nennen wir analog den Winkel der Projection der Richtung Sonne—Mond auf den Aequator mit der grossen Axe ϱ', und den Neigungswinkel der Richtung ϑ', welche Grösse, eine Function der nach dem *Cassini*'schen Gesetze constanten Neigung des Mondäquators zur Ecliptik $i = 1^0 28' 47''$, höchstens diesen Betrag erreichen kann, so erhalten wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes E des Aequators und der inneren Beleuchtungsgrenze, wenn wir in den obigen Formeln (I.) für ϱ und ϑ die Grössen ϱ' und ϑ' einsetzen und unbedenklich das entsprechende $\frac{1}{E}$ (E die Entfernung der Sonne vom Monde) als verschwindend ansehen, nämlich:

$$x' = \mp \frac{a^2 \sin \varrho'}{\sqrt{a^2 \sin \varrho'^2 + b^2 \cos \varrho'^2}},$$

$$y' = \pm \frac{b^2 \cos \varrho'}{\sqrt{a^2 \sin \varrho'^2 + b^2 \cos \varrho'^2}}.$$

Für ein positives ϱ' oder eine westliche Beleuchtungsgrenze gelten die unteren Zeichen, für ein negatives ϱ' oder eine östliche Grenze die oberen. Da die Radien $CE = r'$ und $CF = r''$ gesetzt in der Lichtgrenze, einer Ellipse, deren grosse Halbaxe $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ist und deren kleine wegen der ganz geringen Neigung ϑ' gleich b angenommen werden kann, sich befinden, und der Radius r'' von r' um den Winkel FCE, den wir $= \varepsilon$ setzen, oder um den sphärischen Bogen FE absteht, so folgt aus der Gleichung dieser Ellipse:

$$\frac{r''^2 \sin \varepsilon^2}{b^2} + \frac{r''^2 \cos \varepsilon^2}{r'^2} = 1$$

$$r'' = r' \left(1 - \frac{q}{b} \sin \varrho'^2 \sin \varepsilon^2\right)$$

worin $r' = b + q \sin \varrho'^2 + \frac{5}{2b} q^2 \sin \varrho'^2 \cos \varrho'^2$.

Es ist ferner:

$$y' = \pm b \cos \varrho' \mp q \sin \varrho'^2 \cos \varrho' \pm \frac{q^2}{2b} \sin \varrho'^2 \cos \varrho' (2 \sin \varrho'^2 - \cos \varrho'^2)$$

$$\frac{y'}{r'} = \sin EO.$$

Errichtet man in E auf EO senkrecht den Bogen EG, so ist der Winkel $FEG = \vartheta'$, EG mit $EF = \varepsilon$ zu verwechseln, die Neigung der Bogen DG und $DE = \vartheta$ zu setzen, da der Bogen DA äusserst wenig von 90^0 verschieden ist, und es finden noch folgende Gleichungen statt:

$$tg\, \varepsilon = tg\, \vartheta \sin (DO - EO)$$

$$FG = w \text{ gesetzt } = \vartheta' \, tg\, \varepsilon$$

$$ctg\, DG = ctg\, (DO - EO) \cos \vartheta$$

$$FB = DB - DG + w = \psi - DG + w = \psi' \text{ gesetzt.}$$

Da die Ableitung vorhin des Ausdruckes $r \sin \psi$ und jetzt von $r'' \sin \psi'$, welche Grössen in Fig. 2 die Linien DB und FB vorstellen, bekannt sind, so wird damit ihre Differenz, welche der Sichelbreite in der ausgewählten Ebene gleichkommt, gefunden werden können.

Es ist nun unsere eigentliche Aufgabe, aus der Summe oder Differenz der Grössen $r \sin \psi$ und $r'' \sin \psi'$, durch die Beobachtung als Grösse G ermittelt, einen Ausdruck für die Unbekannte q abzuleiten. Da die Grösse q so oft implicite in den Radien und Winkelgrössen vorkommt, so wird der Schlussausdruck für G, woraus q zu suchen, ziemlich verwickelt sein. Indess wird man, wenn man eine bestimmte äusserste Grenze in der Benutzung der kleinen Glieder einhält, die in unserer Untersuchung dahin festgesetzt ist, die Zehntel der Secunden noch richtig zu haben, auf eine quadratische Gleichung für die Unbekannte q kommen; anstatt jedoch diese aufzulösen, haben wir einfacher die schliessliche Gleichung bloss nach q in der ersten Potenz aufgelöst, indem wir die unerheblichen quadratischen Glieder mit einem genäherten Werth berechnet, als bekannte Grössen uns vorstellten, oder auch vorläufig ganz ausliessen und die Rechnung mit dem ohne sie gefundenen q noch einmal wiederholten. In dem folgenden Endausdruck für q sind bereits Grössen eingeführt, welche unmittelbar aus den Ephemeriden entnommen werden, nicht also die Grösse ϱ', sondern der Unterschied der Mond- und Sonnenlänge. Die Formel gilt für alle vier Fälle, die in Betracht kommen können. Der vorhin gezeichnete Weg, G abzuleiten, kann aber, wenn mit dem aus unserer Formel resultirenden Werthe von q gerechnet wird, prüfungsweise entscheiden, ob die durch die Formel gefundene Grösse q richtig ist. Die Endformel lautet:

$$q = \frac{b - G - b\cos\lambda\cos\vartheta - \frac{b}{2}\cos\lambda^3\sin\vartheta^2\cos\vartheta + b\sin\vartheta'\sin\lambda^2\,tg\,\vartheta + m + n}{-\sin\varrho^2 + \sin(\lambda+\varrho)\cos\vartheta\left\{2\sin\varrho - \cos\lambda\sin(\lambda+\varrho)\right\} + \frac{\cos\lambda^2}{2}\sin(\lambda+\varrho)\sin\vartheta^2\cos\vartheta\left\{6\sin\varrho - 5\cos\lambda\sin(\lambda+\varrho)\right\}}$$

worin die Grössen m und n folgenden Werth haben:

$$m = \frac{q^2}{b}\sin(\lambda+\varrho)\cos\vartheta\left\{2\sin(\lambda+\varrho)^2\sin\varrho - \sin\varrho - \frac{\cos\lambda}{2}\sin(\lambda+\varrho)\left(2\sin(\lambda+\varrho)^2 - \cos(\lambda+\varrho)^2\right)\right\}$$

$$n = \frac{5\,q^2}{2b}\sin\varrho^2\cos\varrho^2.$$

Ueber die Bedeutung und Anwendung der in der Formel vorkommenden Grössen ist Folgendes zu sagen. b bezeichnet den vom Beobachtungsort aus gesehenen Radius des Mondes, G den Betrag der mit Berücksichtigung der Refraction hervorgehenden Messung, beide Grössen in demselben Maasse, z. B. in Secunden zu verstehen, daher auch q in Secunden ausgedrückt wird. Ferner ist:

$$\lambda = M - S + \frac{e}{E}\sin(M - S)$$

in welcher Gleichung M die Länge des Mondes für den Beobachtungsort, S die Länge der Sonne, e die Entfernung des Mondmittelpunktes vom Beobachter, E die Entfernung der Sonne von der Erde bedeuten. Da der Betrag der Neigung des Mondäquators zur Ecliptik klein ist, und da von der Sonne aus gesehen der Mond von der Ebene der Ecliptik sich um höchstens 50″ entfernt, so ist die Projection von der Ecliptik auf den Mondäquator und den Einfluss der Breite auf $M - S$ zu berücksichtigen unnöthig. $\frac{e}{E}$ als Mittelwerth zu fassen, beträgt höchstens 9′, daher kann für E immer ein mittlerer Betrag genommen werden. Die zur Berechnung der Libration gehörigen Tafeln enthalten die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn ☊ und in diesen Punkt schneidet auch der niedersteigende Knoten des Mondäquators. Da nun der letztere zur Ecliptik unter dem Winkel $i = 1^\circ 28' 47''$ geneigt ist, so hat man, um die Grösse ϑ', die Neigung der Linie Sonne—Mond zum Mondäquator zu erhalten, die der Neigung i

gegenüberliegende Cathete in dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse $S - \Omega$ ist, zu suchen oder die Gleichung aufzulösen:

$$\sin \vartheta' = \sin i \sin (S - \Omega).$$

Das Vorzeichen von ϑ' richtet sich nach dem Zeichen von $\sin (S - \Omega)$. Die Vorzeichen von ϱ und ϑ sind in unserer Formel, wie schon oben erörtert, so gefasst, dass ϱ positiv wird, wenn die scheinbare Mondmitte östlich (links) vom ersten Meridian liegt, und ϑ positiv wird, wenn dieselbe nördlich vom Aequator sich befindet.

Die Formeln zur Berechnung von ϱ und ϑ nach *Encke* aus den Werken: „Topographie der sichtbaren Mondoberfläche von *Lohrmann*“ und „*Beer* und *Mädler*, der Mond“ zu entnehmen, sind kurz zusammengestellt diese:

α = wahre AR ☾
δ = wahre Decl. ☾
π = Aeq. Horiz. Parall. ☾
R = wahrer ☾ Radius in Secunden.
t = Sternzeit der Beobachtung in Bogen.
ϱ_1 = Erdradius für den Beobachtungsort.
φ_1 = verbesserte Polhöhe.

Man sucht damit die scheinbaren AR $= \alpha'$, Decl. $= \delta'$, ☾ Radius $= R'$ und die Entfernung des Mondcentrums vom Beobachtungort e' durch die Formeln:

$$tg (\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{\varrho_1 \cos \varphi_1 \sin \pi}{\cos \delta} \sin (\alpha - t)}{1 - \frac{\varrho_1 \cos \varphi_1 \sin \pi}{\cos \delta} \cos (\alpha - t)}$$

$$tg\, \delta' = \frac{tg\, \delta - \frac{\varrho_1 \sin \varphi_1 \sin \pi}{\cos \delta}}{1 - \frac{\varrho_1 \cos \varphi_1 \sin \pi}{\cos \delta} \cos (\alpha - t)} \cos (\alpha' - \alpha)$$

$$R' = \frac{\cos (\alpha' - \alpha) \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} R}{1 - \frac{\varrho_1 \cos \varphi_1 \sin \pi}{\cos \delta} \cos (\alpha - t)} \quad [\text{unser } b]$$

$$e' = \frac{R}{R' \sin \pi}$$

$\alpha' - \alpha$ bekommt das Zeichen von $\alpha - t$, folglich + vor und — nach dem Meridiandurchgang des Mondes, $\delta' - \delta$ ist stets —.

Ω = Länge des aufsteigenden Knotens ☾
l = mittlere Länge ☾
i' = Neigung des Mondäquators gegen den Erdäquator.
$\triangle$ = Bogen des Mondäquators von seinem aufsteigenden Knoten im Erdäquator bis zu seinem aufsteigenden Knoten in der Ecliptik.
Ω' = AR des aufsteigenden Knotens des Mondäquators im Erdäquator.
p = Abstand der scheinbaren Mondmitte vom Erdnordpol $= 90 - \delta'$.
A = Neigung der beiden Bogen i' und p gegeneinander $= 270^0 + \Omega' - \alpha'$ oder $= 90^0 - \Omega' + \alpha'$.

Diejenige Formel ist zu nehmen, die $A < 180^0$ macht.

$$tg\frac{1}{2}(B-C)=\frac{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(p-i')}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(p+i')}$$

$$tg\frac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(p-i')}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(p+i')}$$

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(p+i')}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(p+i')}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}$$

$C =$ Neigung des Declinationskreises gegen den Mondmeridian der scheinbaren Mitte ist für die erste Formel als $+$, für die zweite als $-$ zu setzen. $B =$ Winkel am Mondpole zwischen i' und a hat mit C dasselbe Zeichen.

Die selenocentrische Länge der scheinbaren Mondmitte wird nun:

$$L = 270^0 + B - \triangle.$$

Die Länge L' des durch die wahre Mondmitte gehenden Mondmeridians ist aber wegen der gleichförmigen Rotation:

$$L' = l - \Omega, \text{ folglich}$$

die Libration der Länge $l' = L - L'$

„ „ „ Breite $b' = a - 90^0$, worin a immer $+$ ist. Da l' und b' für westliche und nördliche Lagen positiv sind, so ist unser $\varrho = -l'$, während $b' = \vartheta$ bleibt.

Auch könnte man der im Berliner Jahrbuch von 1843 und im Nautical Almanac über Libration beigegebenen Tafeln sich bedienen, ϱ und ϑ zu berechnen. Den ersteren liegt nach *Nicollet* der Werth $i = 1^0 28' 47''$ zu Grunde, den letzteren *Wichmann*'s Angabe $1^0 32' 9''$ in den Astr. Nachr. No. 631.

In Bezug auf das von uns eingeführte Zeichen λ ist zu bemerken, dass die darin steckende Mondslänge für den Beobachtungsort, welche wir oben durch M bezeichneten, zweckmässig aus den durch die Parallaxe verbesserten α' und δ' nach den Hülfstafeln des Berliner Jahrbuchs von 1831 abgeleitet werden kann.

Der Betrag der an die beobachtete Grösse G anzubringenden Refraction wird meistens äusserst klein sein; denn wenngleich die zu messende Breite G in den beiden Fällen vor und hinter Vollmond nur wenig von dem Monddurchmesser sich unterscheidet, so kann man immerhin die Zeit der Beobachtung so wählen, dass G möglichst nahe in der Horizontalen liegt, andrerseits wird in den Sichelfällen, wobei zur Auswahl nicht viel Zeit ist, die zu messende Linie an und für sich klein sein. Am bequemsten ist es wohl, durch den Positionskreis die Richtung dieser Linie zur scheinbaren Bewegung der Gestirne bei der Beobachtung festzustellen. Ohne Nachtheil kann für die scheinbare Bewegung die des Mondes selbst gewählt werden. Da aus der Berechnung des Dreieckes Zenith, Pol und Mondort die Bekanntschaft des parallactischen Winkels hervorgeht, so hat man nur nöthig den beobachteten Winkel der genannten Richtungen je nach der Lage zum parallactischen zu addiren oder von ihm zu subtrahiren, um den Winkel zu erhalten, unter welchem die gemessene Linie zum Horizonte geneigt ist. Aus der Tabelle für die mittleren Refractionen lässt sich in der betreffenden Höhe für eine bestimmte Höhendifferenz z. B. für 10′ der Unterschied der Refractionen ersehen. Nennen wir den Neigungswinkel der gemessenen Richtung G in Minuten ausgedrückt zum Horizont N, die Refractionsänderung für 10′ ξ Secunden, dann ist

$$\frac{\xi\, G}{10}\, sin\, N^2$$

der Betrag in Secunden, um welchen die gemessene Grösse G vergrössert werden muss.

1868 Juli 15, $15^h\, 9^m$ mittl. Danziger Zeit mass ich auf der Sternwarte der naturforschenden Gesellschaft mit dem Fadenmicrometer des *Steinheil*'schen Tubus von 6½ Fuss Länge die in Betracht zu ziehende Sichelbreite im Oceanus procellarum über den nördlichen Theil der Wallebene Hevel und südlich vom Ringgebirge Reiner unter sehr günstigen Umständen, und erhielt nach Berücksichtigung der Refraction von kaum 0″2 das zur Berechnung zu benutzende $G = 391''3$. Für den Beobachtungsort, der $21^m\, 3^s 5$ östlich von Berlin und unter der Polhöhe $54^0\, 21'\, 2''$ liegt, ist:

$$\log \varrho_1\, cos\, \varphi_1 = 9{,}76645$$
$$\log \varrho_1\, sin\, \varphi_1 = 9{,}90795$$

und aus dem Berliner Jahrbuche für die genannte Zeit interpolirt:

$$\alpha = 4^h\, 0^m\, 37^s\, 1 = 60^0\, 9'\, 16''$$
$$\delta = 15^0\, 19'\, 15''$$
$$\log sin\, \pi = 8{,}23164$$
$$R = 15'\, 59''\, 8.$$

Mit diesen Werthen berechnet, wird:

$$\alpha - t = 78^0\, 43'\, 7''$$
$$\alpha' - \alpha = 34'\, 53''$$
$$\delta' = 14^0\, 35'\, 0''$$
$$b = R' = 963''\, 26$$
$$\log e' = 1{,}76600$$
$$e = 50148 \text{ geogr. Meilen.}$$

Aus dem Berliner Jahrbuche erhält man ferner:

$$l = 68^0\ 6'\ 10''$$
$$\Omega = 147\ 38\ 41$$
$$i' = 24\ 42\ 59$$
$$\triangle = 329\ 22\ 30$$
$$\Omega' = 358\ 6\ 22$$
$$\text{folglich } A = 152\ 37\ 47$$
$$\frac{1}{2}(B - C) = 7\ 44\ 34$$
$$\frac{1}{2}(B + C) = 18\ 55\ 22$$
$$\frac{1}{2}\, a = 48\ 45\ 14$$
$$L = -86\ 2\ 26$$
$$L' = -79\ 32\ 31$$
$$l' = -6\ 29\ 55\ (-\varrho)$$
$$b' = 7\ 30\ 28\ (+\vartheta)$$

Den für den Beobachtungsort geltenden AR und Decl. ☾ entsprechen folgende Länge und Breite:

$$M = 61^{0}\,35'5, \text{ Breite } = -6^{0}\,1'9.$$

Die Länge der Sonne wird:

$$S = 113^{0}\,44'7.$$

Da nun $\frac{e}{E} \sin(M - S) = -6'5$, so ist

$$\lambda = -52^{0}\,15'7$$
$$\vartheta' = -\;\;0\;\;49,5.$$

Dazu kommen

$$\varrho = +\;\;6\;\;29,9$$
$$\vartheta = +\;\;7\;\;30,5.$$

Mit diesen Werthen berechnet, ergiebt unsere Formel für q:

$$\begin{aligned}
b &= \;\;963''3 \\
-G &= -391,3 \\
-b \cos\lambda \cos\vartheta &= -584,5 \\
-\frac{b}{2} \cos\lambda^3 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta &= -\;\;\;\;1,9 \\
b \sin\vartheta' \sin\lambda^2 \, tg\,\vartheta &= -\;\;\;\;1,2 \\
\hline
&-\;\;\;15,6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\sin\varrho^2 &= -0,01281 \\
\sin(\lambda + \varrho)\cos\vartheta \left\{2 \sin\varrho - \cos\lambda \sin(\lambda + \varrho)\right\} &= -0,47227 \\
\frac{\cos\lambda^2}{2} \sin(\lambda + \varrho) \sin\vartheta^2 \cos\vartheta \left\{6 \sin\varrho - 5 \cos\lambda \sin(\lambda + \varrho)\right\} &= -0,00650 \\
\hline
&-0,49158
\end{aligned}$$

$$q = \frac{-15''6}{-0,49158} = 31''\,73.$$

Die Erhebung der uns zugekehrten Mondhälfte wird also $\frac{31,73}{963,3}$ oder 0,0329.

Wenn wir mit dem Werthe $q = 31''\,73$ nachträglich die Glieder m und n berücksichtigen, finden wir, dass m fast $-\frac{9''}{100}$, $n + \frac{3''}{100}$, eine Wiederholung der Rechnung also unnütz ist.

Sehen wir zu, welchen Werth wir für G bekommen, wenn wir mit dem gefundenen Werthe von q in unsere oben gegebene Entwickelung eingehen, und für den hier zu betrachtenden Fall berechnen:

$$r \sin\psi - r'' \sin\psi'.$$

Die Zusammenstellung der dahin gehörigen Zahlenausdrücke folgt hier:

$$\begin{aligned}
b &= \;\;963''26 \\
q \sin\varrho^2 &= \;\;\;\;\;\;0,41 \\
\frac{5}{2b} q^2 \sin\varrho^2 \cos\varrho^2 &= \;\;\;\;\;\;0,03 \\
-\frac{2\,b\,q \sin\varrho \cos\varrho}{e \cos\vartheta} &= -0,03 \\
\hline
r &= \;\;963,67
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\sin\varrho &= -0{,}113174\\
-\frac{2q}{b}\sin\varrho\cos\varrho^2 &= -0{,}007351\\
\frac{b\cos\varrho}{e\cos\vartheta} &= 0{,}004688\\
\frac{2q\cos\varrho\cos 2\varrho}{e\cos\vartheta} &= 0{,}000301\\
-\frac{q^2}{b^2}\sin\varrho &= -0{,}000123\\
\hline
\cos DO &= -0{,}115659
\end{aligned}
$$

Da $\cos DO$ negativ, so ist:

$$
\begin{aligned}
DO &= 96^0\,38',5\\
\varrho &= 6\;\;29,9\\
\hline
DA &= 90\;\;\;8,6\\
DB &= 90\;\;\;8,5 = \psi\\
r\sin\psi &= 963''66\\
\varrho' + \varrho &= -52^0\,15'7\\
\varrho' &= -45\;45,8\\
b &= 963''26\\
q\sin\varrho'^2 &= 16,29\\
\frac{5}{2b}q^2\sin\varrho'^2\cos\varrho'^2 &= 0,65\\
\hline
r' &= 980,20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b\cos\varrho' &= 671''99\\
-q\sin\varrho'^2\cos\varrho' &= -11,36\\
\frac{q^2}{2b}\sin\varrho'^2\cos\varrho'(2\sin\varrho'^2-\cos\varrho'^2) &= 0,10\\
\hline
y' &= 660,73
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{r'} = \sin EO \quad EO &= 42^0 23'0\\
\varepsilon &= 6^0\;6'3\\
w &= 5,3\\
DG &= 54\;29,2\\
FB &= 35\;44,3 = \psi'\\
r'' &= 980''01\\
r''\sin\psi' &= 572,40\\
r\sin\psi - r''\sin\psi' &= 963''66 - 572''40 = 391''26 = G
\end{aligned}
$$

also vollständig genügend mit dem obigen Werthe 391″3 übereinstimmend.

Es ist unerörtert geblieben, wie die Richtung der bezüglichen Linie, in welcher die Messung anzustellen, vorherberechnet wird. Wenn man ϱ und ϑ ermittelt hat, also den Ort des scheinbaren Mittelpunktes in Bezug auf den Mond-Aequator und ersten Meridian, und λ kennt, dann hat man zu suchen:

$$\sin EO = \cos(\lambda+\varrho)\left(1-2\sin(\lambda+\varrho)^2\frac{q}{b}\right).$$

Dieser Ausdruck $\left(\text{eigentlich für } \frac{y'}{r'}\right)$ genügt vollkommen, wenn man für $\frac{q}{b}$ einen approximativen Werth, etwa 0,03, setzt. Wird ferner das rechtwinkelig sphärische Dreieck DGE anstatt des eigentlich zu wählenden Dreiecks DFE näher ins Auge gefasst, so ergiebt sich aus der Kenntniss des Neigungswinkels von Bogen DG zu $DE = \vartheta$ und der Cathete $DE = 90^0 + \varrho - EO$ anzunehmen, die selenographische Breite ε des in der Lichtgrenze liegenden Punktes F durch die Gleichung:

$$tg\,\varepsilon = tg\,\vartheta \cos (EO - \varrho)$$

und überhaupt eine zum Verlauf der Linie G gehörige Breite, wenn man eine beliebige andere selenographische Länge für EO in die Formel einführt.

So wird für unsern Fall die Lage der Linie auf der Mondkarte bestimmt werden durch die Coordinaten:

Selenogr. Länge östl.	Breite nördl.
42°20′	6°1
50 0	5,6
60 0	4,5
70 0	3,4
80 0	2,2

Die der Beobachtung vorangehende Orientirung ist nothwendig, eine kleine Aenderung der Linie G indess ohne Einfluss auf das Resultat, daher es grosser Genauigkeit in der Vorrechnung nicht bedarf, zumal man in der Construction der bisherigen Mondkarten die Auffassung des Mondes als Kugel noch nicht verlassen hat. Die Vorausberechnung wird überhaupt unnöthig werden, wenn die Messung in folgender Weise arrangirt wird, wobei die kleine Aenderung im Werthe von G später in Rechnung zu bringen ist. Man stelle den Faden des Mikrometers als Tangente an eine der Hörnerspitzen, da dasselbe zur Deckung der Verbindungslinie der Hörnerspitzen gewöhnlich nicht ausreicht, verschiebe den parallel beweglichen Faden um den Betrag des Mondhalbmessers, merke sich diese Richtung auf der Mondoberfläche, drehe alsdann das Micrometer um 90° herum und messe in der auf der Oberfläche gewonnenen Orientirungslinie die Sichelbreite. Auf diese Weise erhält man die Grösse der in Fig. 2 dargestellten Linie JH, welche in der von B aus auf die innere Beleuchtungsellipse gezogenen Senkrechten liegt, so dass JH auch mit der grössten Breite zu identificiren zulässlich ist. Durch Auflösung des sphärisch zu fassenden Dreiecks FHB, in welchem Winkel HFB so gross wie der im Dreieck DFE vorkommende Winkel F ist, wird die scheinbar gerade Linie HB, und durch Abzug derselben von JB, welches mit DB gleichgesetzt werden kann, die fragliche Grösse JH gefunden. Um zweckmässig die kleine Quantität zu erhalten, die von der auf dem letzt gezeichneten Wege gemessenen Linie G in Abzug gebracht werden muss, bestehend aus der Differenz der resp. Radien und der Aenderung im Sinus des Winkels ψ', können zur Berechnung der Grösse G, die unsere Formel für q beansprucht, die folgenden mit nur wenigen Decimalen zu berechnenden Gleichungen benutzt werden:

$$\sin OE = \cos (\lambda + \varrho) \left(1 - \frac{2q}{b} \sin (\lambda + \varrho)^2\right)$$

$$OE - \varrho = AE$$

$$\sin f = \frac{\sin AE \cos AE \sin \vartheta^2}{2} \quad [f \text{ in der Figur } DG - DE]$$

$$tg\,\varepsilon = tg\,\vartheta \cos AE$$

$$s = (f + \vartheta'\, tg\,\varepsilon)\, tg\, AE^2 \quad [f + \vartheta'\, tg\,\varepsilon = DF - DE]$$

$$tg\,x = \sqrt{2 \sin s\, tg\, AE} \quad [\quad x \quad = FH \quad]$$

Der Wurzelausdruck hat dasselbe Zeichen wie ε. Da nun die Radien nach E, F und H folgende Werthe haben:

$$r' = b + q \sin(\lambda + \varrho)^2$$
$$r'' = r' \left(1 - \frac{q}{b} \sin(\lambda + \varrho)^2 \sin \varepsilon^2\right)$$
$$r''' = r' \left(1 - \frac{q}{b} \sin(\lambda + \varrho)^2 \sin(\varepsilon + \varkappa)^2\right)$$

so ist der Unterschied von r'' und r''', den wir mit v bezeichnen:

$$v = r'' - r''' = q \sin(\lambda + \varrho)^2 \sin \varkappa \sin(2\varepsilon + \varkappa) \quad \text{[immer +]}$$

Endlich werde die zweite abzuziehende Quantität mit v' benannt, und also:

$$v' = (b + q \sin(\lambda + \varrho)^2) \cos AE \sin s, \quad \text{[immer +]}$$

alsdann ist von dem beobachteten G zu subtrahiren:

$$v + v'.$$

Um zu zeigen, wie sich der Werth der in Anwendung kommenden Grössen gestaltet, setzen wie dieselben beispielsweise für den Fall, dass unsere Beobachtung nach der letzt besprochenen Methode angestellt wäre, hierher:

$$\begin{aligned}
OE &= 42^\circ 23' \\
AE &= 35\ 53 \\
f &= 13'9 \\
\varepsilon &= 6^\circ 6' \\
f + \vartheta' tg\, \varepsilon &= 8'6 \quad [\vartheta' \text{ war bekanntlich gegeben} \\
s &= 4{,}5 \qquad\qquad = -0^\circ 49'5] \\
k &= 2^\circ 30' \\
\hline
v &= 0''18 \\
v' &= 1{,}03 \\
\hline
v + v' &= 1{,}21.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Formel für q wäre also die nach der letzt beschriebenen Beobachtungsart erhaltene Messung der grössten Sichelbreite, um die Grösse 1'',21 vermindert, zu verwenden.

Ich bin leider durch Ungunst der Verhältnisse ausser Stande, mehr als die hier mitgetheilte Beobachtung zu bringen. Nur einmal noch hätte ich fast eine günstige Messung vor dem ersten Viertel erlangt, wenn nicht Wolken die Beobachtung vereitelt hätten, ein andermal gebot die Discontinuität der Beleuchtungsgrenze von der Messung Abstand zu nehmen. Es ist bemerkenswerth, dass diese erste Beobachtung mit der von Hansen aus der Theorie entwickelten Bestimmung so nahe übereinstimmt. Wenngleich ich auf meine Beobachtung an dem Apparate unserer Sternwarte, woran kein Uhrwerk ist, daher er seine Schwierigkeit hat durch Nachbewegung der Schlüssel genau die Linie G einzuhalten, keinen hohen Werth lege, so glaube ich doch aus der Uebereinstimmung der einzelnen Beobachtungen, die auf einen wahrscheinlichen Fehler des Resultates von allerhöchstens 2'' schliessen lassen, folgern zu können, dass die gefundene Erhebung von

0,0329

bis auf weniger als 0,005 verbürgt werden kann. Indessen müssen die Beobachtungen, die ich fernerhin vorhabe, weiter entscheiden. Ich wende mich zugleich an die besser ausgerüsteten Sternwarten mit der Bitte, dem hier vorbereiteten Gegenstand einige Aufmerksamkeit zu schenken.