Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.
Verlag der k. Akademie.
1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber den einfachsten semidefiniten Fall in der eigentlichen Variationsrechnung.

Von **Arthur Korn.**

(Eingelaufen 1. März.)

Das einfachste Problem der eigentlichen Variationsrechnung besteht darin, eine Funktion

$$y\,(x)$$

so zu finden, dass das Integral zwischen zwei festen Grenzen x_1 und x_2:

$$1)\quad J = \int_{x_1}^{x_2} f\,(x, y, y')\,d\,x = M_a^i \text{ (d. h. Maximum oder Minimum)}$$

wird, wenn f eine gegebene Funktion von x, y und der Ableitung

$$2)\qquad y' = \frac{d\,y}{d\,x}$$

vorstellt.

Wir setzen fest, dass wir nur solche Funktionen y in betracht ziehen und nur mit solchen Funktionen $y + \delta\,y$ vergleichen wollen, die im Intervall $x_1\,x_2$ eindeutig und stetig sind und eindeutige und stetige erste und zweite Ableitungen nach x besitzen, für welche ferner die Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y'},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

im Intervall $x_1\,x_2$ eindeutig und stetig sind.

Das folgende Resultat ist durch die bisherigen Untersuchungen über den Gegenstand sichergestellt:

Ist:

$$3)\qquad y = y(x\, c_1\, c_2)$$

die Lösung der Differentialgleichung 2. O.:

$$4)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

und bezeichnen wir die Substitution 3) und die Substitution der Auflösungen der Gleichungen:

$$5)^{1)}\qquad \begin{cases} |\, y\,|_{x=x_1} = y_1, \\ |\, y\,|_{x=x_2} = y_2, \end{cases}$$

nach c_1 und c_2 durch Einschliessung in [ ], so wird $[y]$ eine Lösung des Problemes sein, wenn im ganzen Intervall $x_1\, x_2$

I) $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right]$ ein festes Zeichen hat und $\neq 0$ ist,

II) $\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} - \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1} \neq 0$ ist $(x_1 \gtrless x \gtrless x_2)$,

und zwar ist (für $x_1 < x_2$) ein Maximum vorliegend, wenn $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right]$ stets < 0, ein Minimum, wenn diese Grösse stets > 0 ist.

Ein M_a^i ist nicht vorhanden, wenn der Ausdruck I) positive und negative, von Null verschiedene Werte besitzt, oder wenn die oft mit

$$\Delta(x\, x_1)$$

bezeichnete Determinante II) für einen in strengem Sinne der Ungleichung

$$x_1 \gtrless x \gtrless x_2$$

genügenden Wert von x verschwindet.

Eine weitere Untersuchung durch Betrachtung höherer Variationen als der zweiten ist notwendig, wenn

(1. semidefiniter Fall) der Ausdruck I) ein festes Zeichen hat und $\neq 0$ ist, und wenn der Ausdruck II) zwar in dem Intervall

---

1) $y_1\, y_2$ gegebene Konstanten.

$$x_1 \gtrless x \gtrless x_2$$

$\ddagger$ 0 ist, aber für $x = x_2$ verschwindet.

(2. semidefiniter Fall) der Ausdruck II) im ganzen Intervall

$$x_1 \gtrless x \underline{\gtrless} x_2$$

$\ddagger$ 0 ist, der Ausdruck I) ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann.[1])

Die vorliegende Abhandlung wird sich mit dem 1. semidefiniten Falle, dem einfachsten semidefiniten Fall der eigentlichen Variationsrechnung beschäftigen und für diesen Fall die nächsten Kriterien des M_a^i geben.

§ 1.

Wir machen zur Vereinfachung der Ausdrucksweise etwas weitere Stetigkeitsvoraussetzungen über y und f, als eigentlich für das Endresultat erforderlich wäre, indem wir nicht nur alle Ableitungen von f, soweit dieselben in betracht kommen, als eindeutig und stetig (im Intervalle $x_1\, x_2$) annehmen, sondern auch δJ als der Taylor'schen Entwickelung fähig annehmen:[2])

$$\delta J = \delta^1 J + \delta^2 J + \delta^3 J + \delta^4 J + \ldots$$

oder bei Substitution der Funktion $[y]$

6) $$[\delta J] = [\delta^2 J] + [\delta^3 J] + [\delta^4 J] + \ldots$$

Hier ist:

7a) $$[\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\delta y^2}\right]\delta y^2 + 2\left[\frac{\partial^2 f}{\delta y\, \delta y'}\right]\delta y\, \delta y' + \left[\frac{\partial^2 f}{\delta y'^2}\right]\delta y'^2\right\} dx;$$

oder:

7b) $$[\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(f_{11}\, \delta y^2 + 2 f_{12}\, \delta y\, \delta y' + f_{22}\, \delta y'^2)\, dx,$$

---

[1]) Der allgemeine semidefinite Fall ist eine Mischung der beiden genannten Fälle.

[2]) Sobald

$$\text{abs. } \delta y \overline{\overline{<}}\, \varepsilon, \quad \text{abs. } \delta y' \overline{\overline{<}}\, \varepsilon,$$

wo ε eine positive, im übrigen beliebig kleine Konstante ist.

wenn wir:

$$8)\qquad \begin{cases} f_{11} = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right], \\ f_{12} = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'}\right], \\ f_{22} = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right] \end{cases}$$

setzen; wir werden in ähnlicher Weise auch die höheren Ableitungen von f abkürzen, so dass z. B.

$$f_{122} = \left[\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial y'^2}\right].$$

Wir führen jetzt — geleitet durch die Jacobi'schen und Lipschitz'schen Transformationen der 2. Variation — an Stelle von $\delta y'$ die Grösse δZ durch die Substitution:

$$9)\qquad \delta y' = \delta Z + \frac{z'}{z}\, \delta y$$

ein, wobei wir z und z' durch die Gleichungen:

$$10)\qquad \begin{cases} z = \left[\dfrac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} \left[\dfrac{\delta y}{\partial c_1}\right] - \left[\dfrac{\delta y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1} \left[\dfrac{\delta y}{\partial c_2}\right], \\ z' = \dfrac{dz}{dx} \end{cases}$$

definieren.

z verschwindet nach Voraussetzung nirgends im Intervalle

$$x_1 \gtrless x \gtrless x_2,$$

wohl aber für $x = x_1$ und $x = x_2$; da aber gleichzeitig auch δy an diesen Grenzen verschwindet und z' wegen der leicht aus 4) folgenden Identität

$$11)\qquad f_{11} z + f_{12} z' \equiv \frac{d}{dx}(f_{12} z + f_{22} z'),\ (x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2)$$

für $x = x_1$ und $x = x_2$ von null verschieden sein muss, so ist δZ im ganzen Intervall $x_1 x_2$ eindeutig und stetig und kann durch genügende Verkleinerung von ε von der Art

endl. Konst. ε

unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden.

Durch die Substitution 9) wird:[1])

$$[\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}\,\delta Z^2\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left[\delta y^2\,\frac{f_{12}z + f_{22}z'}{z}\right] dx,$$

oder:

12) $$[\delta^2 J] = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}\,\delta Z^2\,dx.$$

Es wird ferner:

13) $$\left\{\begin{aligned} [\delta J] = {} & \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}(1+E)\,\delta Z^2\,dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} D(f)\,dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta Z\,dx, \end{aligned}\right.$$

wenn wir unter $D(f)$ und $D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ die Ausdrücke $[\delta f]$ und $\left[\delta\frac{\partial f}{\partial y'}\right]$ nach Substitution von

$$\delta y' = \frac{z'}{z}\,\delta y$$

verstehen, so dass:

14*) $$\left\{\begin{aligned} D(f) &= D^3(f)\,\delta y^3 + D^4(f)\,\delta y^4 + \ldots, \\ D^3(f) &= \tfrac{1}{6}\left\{f_{111} + 3f_{112}\frac{z'}{z} + 3f_{122}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + f_{222}\left(\frac{z'}{z}\right)^3\right\}, \\ D^4(f) &= \tfrac{1}{24}\left\{f_{1111} + 4f_{1112}\frac{z'}{z} + 6f_{1122}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + 4f_{1222}\left(\frac{z'}{z}\right)^3 + f_{2222}\left(\frac{z'}{z}\right)^4\right\}, \end{aligned}\right.$$

— — — — — — — — — — —

---

[1]) Da:

$$-f_{22}\frac{z'}{z} + \frac{f_{12}z + f_{22}z'}{z} = f_{12},$$

und

$$f_{22}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left[\frac{f_{12}z + f_{22}z'}{z}\right] = f_{22}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + \frac{z(f_{11}z + f_{12}z') - z'(f_{12}z + f_{22}z')}{z^2},$$

$$= f_{11}.$$

$$
14^{b})\left\{\begin{aligned}
&D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y^2 + D^3\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\partial y^3 + \ldots,\\
&D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \tfrac{1}{2}\left\{f_{112} + 2f_{122}\frac{z'}{z} + f_{222}\left(\frac{z'}{z}\right)^2\right\},\\
&D^3\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \tfrac{1}{6}\left\{f_{1112} + 3f_{1122}\frac{z'}{z} + 3f_{1222}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + f_{2222}\left(\frac{z'}{z}\right)^3\right\},\\
&- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -,
\end{aligned}\right.
$$

und wo ferner E eine Grösse vorstellt, die ihrem absoluten Werte nach

$$\leqq \text{endl. Konst. } \varepsilon.$$

§ 2.

Wir können die Formel 13) auch folgendermassen schreiben:

$$
15)\left\{\begin{aligned}
&[\delta J] = \int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{1+E}\left\{\tfrac{1}{2}f_{22}\left[\delta Z(1+E) + \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{f_{22}}\right]^2\right.\\
&\qquad\qquad \left. + (1+E)\,D(f) - \tfrac{1}{2}\frac{\left\{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}^2}{f_{22}}\right\}dx.
\end{aligned}\right.
$$

Nennen wir ε_1 den absolut grössten Wert von δZ, ε_2 den absolut grössten Wert von δy, so werden offenbar die beiden Fälle

$$\text{I.}\quad \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1,$$
$$\text{II.}\quad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2,$$

alle möglichen Fälle umfassen. In dem Falle I. muss nach 13) $[\delta J]$ das Zeichen von f_{22} haben, so dass wir nur den Fall II. noch zu untersuchen haben, in dem wir

16) $$\text{abs. } E < \text{endl. Konst. } \varepsilon_2$$

haben.

Die Gleichung 15) zeigt, dass jedenfalls $[\delta J]$ nur dann ein anderes Zeichen als f_{22} haben kann, wenn:

17ᵃ) $$\delta Z(1+E) = -\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{f_{22}} + \sigma,$$

wo:

$$\sigma^2 \leqq \text{endl. Konst.} \left\{ (1+E)\, D(f) - \frac{1}{2}\, \frac{\left\{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}^2}{f_{22}} \right\},$$

also mit Rücksicht auf 14ᵃ), 14ᵇ):

17ᵇ) $$\text{abs.}\,\sigma \leqq \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Es kann nach 17ᵃ) und 17ᵇ) mit Rücksicht auf den Wert 14ᵇ) von $D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ dieser Fall jedenfalls nur eintreten, wenn:

18ᵃ) $$\delta Z = \gamma \cdot z\,^{1)}$$

und:

18ᵇ) $$\text{abs. } \gamma \leqq \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Aus 18ᵃ) folgt nun weiter:[2])

19ᵃ) $$\delta y = a \cdot z \cdot \varepsilon_2 + \Gamma,$$

wo a eine bestimmte endliche Konstante ist und

19ᵇ) $$\text{abs. } \Gamma \leqq \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Da wir uns nur mit Funktionen y (resp. $y + \delta y$) beschäftigen, welche mit ihren ersten und zweiten Ableitungen eindeutig und stetig ist, so folgt aus 19ᵃ) auch:

20ᵃ) $$\delta y' = a \cdot z' \varepsilon_2 + \Gamma',$$

wo auch:

20ᵇ) $$\text{abs. } \Gamma' \leqq \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{\frac{3}{2}}.$$

Nur diese Fälle 19), 20) bedürfen einer besonderen Untersuchung.

---

[1]) Man kann δZ mit z proportional setzen, da beide an den Grenzen verschwinden und im Intervall $x_1\, x_2$ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig vorausgesetzt werden.

[2]) Da nach 18ᵃ) und 9):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{z}\right) = \gamma,$$

somit:

$$\delta y = \text{const. } z + \Gamma.$$

§ 3.

Bevor wir zu dieser Untersuchung übergehen, füge[i] in der Formel 13) zu der rechten Seite noch den Aus

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{F_3 \delta y^3}{z^3}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{F_3}{z^3}\right)\delta y^3 + 3\frac{F_3}{z^3}\delta y^2 \left(\delta Z + \frac{z'}{z}\delta y\right.\right.$$

hinzu und subtrahieren denselben Ausdruck:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{F_3 \delta y^3}{z^3}\right) dx = \left| \frac{F_3 \delta y^3}{z^3} \right|_{x=x_1}^{x=x_2} = \left[\frac{F_3 \delta y'^3}{z'^3}\right]_{x=x_1}^{x=x_2},$$

wo F_3 eine eindeutige und stetige Funktion von Intervall

$$x_1 \gtreqless x \gtreqless x_2$$

sein soll, über die wir uns noch eine weitere Bestimmung behalten.

Es folgt dann:

$$21)\left\{\begin{aligned}
[\delta J] = &- \left|\frac{F_3 \delta y'^3}{z'^3}\right|_{x=x_1}^{x=x_2} + \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} f_{22}(1+E)\,\delta Z^2\,dx \\
&+ \int_{x_1}^{x_2}\left[D(f) + \delta y^3\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{F_3}{z^3}\right) + 3\,\frac{F_3 z'}{z^4}\right\}\right] d \\
&+ \int_{x_1}^{x_2}\left[D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2\right]\delta Z\,dx.
\end{aligned}\right.$$

Wir wählen jetzt F_3 so, dass:

$$D^3(f) + \frac{d}{dx}\left(\frac{F_3}{z^3}\right) + 3\,\frac{F_3 z'}{z^4} = 0,$$

also:

$$\frac{dF_3}{dx} = -z^3 D^3(f)$$

oder:

$$22)\quad \frac{dF_3}{dx} = -\tfrac{1}{6}\{f_{111} z^3 + 3 f_{112} z^2 z' + 3 f_{122} z z'^2 + f_{222}$$

dann können wir 21) auch so schreiben (man vergl Formel 15)):

$$
23)\left\{\begin{aligned}
[\delta J] = &-\left|\frac{F_3\,\delta y'^3}{z'^3}\right|_{x=x_1}^{x=x_2}\\
&+\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{1+E}\left\{\tfrac{1}{2}f_{22}\left[(1+E)\,\delta Z+\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{3F_3}{z^3}\delta y^2}{f_{22}}\right]^2\right.\\
&\left.+(1+E)(D^4(f)\,\delta y^4+..)^{1})-\tfrac{1}{2}\frac{\left\{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{3F_3}{z^3}\delta y^2\right\}^2}{f_{22}}\right\}dx.
\end{aligned}\right.
$$

An der Hand dieser Formel werden wir jetzt die Fälle 19) 20) diskutieren.

§ 4.

Wir folgern zunächst aus 23) die für ein festes Zeichen von $[\delta J]$ notwendige Bedingung, es muss

$$|F_3|_{x=x_1}^{x=x_2} = 0$$

sein, also:

$$24)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\{f_{111}\,z^3+3f_{112}\,z^2z'+3f_{122}\,z\,z'^2+f_{222}\,z'^3\}\,dx = 0;$$

denn wäre dieser Ausdruck $\gtrless 0$, so folgte aus 23) nach den Substitutionen 19) 20):

$$[\delta J] = c\cdot\varepsilon_2^3+\delta,$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante und

$$\text{abs. }\delta \overline{<} \text{ endl. Konst. } \varepsilon_2^{3+\frac{1}{2}},$$

wenn wir nur Γ und Γ' so einrichten, dass

$$\text{abs.}\left[(1+E)\,\delta Z+\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2}{f_{22}}\right] \overline{<} \text{ endl. Konst } \varepsilon_2^2,$$

was ja stets möglich ist.

Wir können sogleich aus 23) eine weitere notwendige Bedingung ableiten. F_3 ist nach 22) noch mit einer willkürlichen Konstanten behaftet, wir wählen dieselbe so, dass:

---

1) Das ist $D(f)$ abgesehen von den Gliedern 3. Ordnung $D^3(f)\,\delta y^3$.

25[a]) $$|F_3|_{x=x_1} = 0,$$

somit nach 24) auch:

25[b]) $$|F_3|_{x=x_2} = 0,$$

dann folgt aus 23), dass $[\delta J]$ ein festes Zeichen nur dann haben kann, wenn der Ausdruck:

26) $$\int_{x_1}^{x_2} \left[D^4(f) - \frac{1}{2} \frac{\left\{ D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + 3\frac{F_3}{z^3} \right\}^2}{f_{22}} \right] z^4\, dx$$

das Zeichen von f_{22} besitzt, denn nennen wir C den Wert dieses Ausdruckes, so folgt aus 23) nach den Substitutionen 19), 20):

$$[\delta J] = C \cdot a^4 \cdot \varepsilon_2^4 + \varDelta,$$

wo

$$\text{abs. } \varDelta \mathrel{\overline{\overline{<}}} \text{endl. Konst. } \varepsilon_2^{4+\frac{1}{2}},$$

wenn wir nur Γ und Γ' so einrichten, dass:

$$\left[(1+E)\,\delta Z + \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2}{f_{22}}\right]^2 \mathrel{\overline{\overline{<}}} \varepsilon_2^{4+\frac{1}{2}},$$

was ja stets möglich ist.

Die Bedingung, dass der Ausdruck 26) das Zeichen von f_{22} hat und von Null verschieden ist, ergiebt sich auch sofort als eine hinreichende Bedingung für das Eintreten eines M_a^i, da nach den Substitutionen 19) und 20) dann der Ausdruck

$$\left\{ \int_{x_1}^{x_2} (1+E)(D^4(f)\,\delta y^4 + \ldots) - \frac{1}{2} \frac{\left\{ D\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3F_3}{z^3}\,\delta y^2 \right\}^2}{f_{22}} \right\} dx$$

das Zeichen von f_{22} besitzt und somit auch der Ausdruck $[\delta J]$.

Wir erhalten so das folgende Endresultat:

In dem semidefiniten Falle, in welchem f_{22} im Intervalle $x_1 x_2$ stets dasselbe Zeichen besitzt und nirgends verschwindet, und in dem

27) $$z = \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} - \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1}$$

nirgends **innerhalb** des Intervalles $x_1 x_2$ verschwindet, wohl aber an den **beiden** Grenzen $x = x_1$ und $x = x_2$, erhält man die folgenden nächsten Kriterien für das Auftreten eines M_a^i:

Es muss für ein M_a^i

$$28)\quad \int_{x_1}^{x_2} \{f_{111} z^3 + 3 f_{112} z^2 z' + 3 f_{122} z z'^2 + f_{222} z'^3\} \, dx = 0$$

sein. Es wird dann thatsächlich ein M_a^i stattfinden, wenn der Ausdruck

$$29)\quad \int_{x_1}^{x_2} z^4 \left\{ D^4(f) - \tfrac{1}{2} \frac{\left\{ D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3 F_3}{z^3} \right\}^2}{f_{22}} \right\} dx,$$

in dem

$$30)\quad F_3 = -\tfrac{1}{6} \int_{x_1}^{x} \{f_{111} z^3 + 3 f_{112} z^2 z' + 3 f_{122} z z'^2 + f_{222} z'^3\} \, dx,$$

$$31)\quad D^4(f) = \tfrac{1}{24} \left\{ f_{1111} + 4 f_{1112} \frac{z'}{z} + 6 f_{1122} \left(\frac{z'}{z}\right)^2 + 4 f_{1222} \left(\frac{z'}{z}\right)^3 + f_{2222} \left(\frac{z'}{z}\right)^4 \right\},$$

$$32)\quad D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \tfrac{1}{2} \left\{ f_{112} + 2 f_{122} \frac{z'}{z} + f_{222} \left(\frac{z'}{z}\right)^2 \right\},$$

das Zeichen von f_{22} besitzt und von Null verschieden ist; hat der Ausdruck ein von f_{22} verschiedenes Zeichen, ohne zu verschwinden, so wird ein M_a^i nicht vorhanden sein; verschwindet der Ausdruck, so ist eine weitere Untersuchung erforderlich (semidefiniter Fall höherer Ordnung).

§ 5.

Vor längerer Zeit hat bereits G. Erdmann[1]) Kriterien für den hier behandelten semidefiniten Fall aufgestellt, und

[1]) G. Erdmann, Untersuchung der höheren Variationen einfacher Integrale (Z.-S. f. Math. u. Phys. XXII, 1877, p. 324); ich verdanke einer freundlichen, brieflichen Mitteilung von Herrn A. Mayer den Hinweis auf diese Arbeit.

ich möchte hier zeigen, dass die Erdmann'schen Kriter aus den obigen Kriterien einwandsfrei folgen, während ı der von Erdmann gegebene Beweis nur für die notwendig Bedingungen streng erscheint. Zu diesem Zwecke werden die Bezeichnungen von Erdmann einführen, durch welche Kriterien in einer wesentlich eleganteren Form dargest werden können.

Wir definieren die Operation $\frac{d(-)}{dc}$ durch die Forn

33) $$\frac{d(-)}{dc} = \frac{\partial(-)}{\partial c_1} \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial c_2}\right|_{x=x_1} - \frac{\partial(-)}{\partial c_2} \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial c_1}\right|_{x=x_2}$$

und setzen:

34) $$\begin{cases} u = \dfrac{dy}{dc}, \\ v = \dfrac{d^2 y}{dc^2}, \\ w = \dfrac{d^3 y}{dc^3}, \end{cases}$$

dann verschwinden offenbar u, v, w für $x = x_1$, und es

35) $$z = \left[\frac{dy}{dc}\right] = [u],$$

so dass $[u]$ auch für $x = x_2$ bei unseren Voraussetzungen v schwindet:

Wir setzen ferner:

36) $$a_{mn} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial y'^n}, \quad \begin{matrix} m = 0, 1, 2 \ldots \\ n = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

und:

37) $$\begin{cases} \Omega_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} (a_{20} u^2 + 2 a_{11} u u' + a_{02} u'^2)\, dx,^{1)} \\ \Omega_3 = \int\limits_{x_1}^{x_2} (a_{30} u^3 + 3 a_{21} u^2 u' + 3 a_{12} u u'^2 + a_{03} u'^3)\, dx, \\ \Omega_4 = \int\limits_{x_1}^{x_2} (a_{40} u^4 + 4 a_{31} u^3 u' + 6 a_{22} u^2 u'^2 + 4 a_{13} u u'^3 + a_{04} u'^4) \end{cases}$$

[1]) Bei der Festsetzung $u' = \frac{du}{dx}$, analog $v' = \frac{dv}{dx}$.

Dann ist wegen der (aus 4) analog der Gleichung 11) folgenden Relation:

38) $$a_{20} u + a_{11} u' = \frac{d}{dx} (a_{11} u + a_{02} u')$$

zunächst:

$$\Omega_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \{u (a_{11} u + a_{02} u')\} \, dx,$$

oder:

39) $$\Omega_2 = | u (a_{11} u + a_{02} u') |_{x = x_2}.$$

Es ist weiter nach der zweiten und ersten Formel 37):

$$\Omega_3 = \frac{d\,\Omega_2}{dc} - \int_{x_1}^{x_2} (2a_{20} uv + 2a_{11}(uv' + vu') + 2a_{02} u'v') \, dx,$$

$$= \frac{d\,\Omega_2}{dc} - 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \{v (a_{11} u + a_{02} u')\} \, dx,$$

oder mit Rücksicht auf 39):

$$\Omega_3 = |v(a_{11}u + a_{02}u') + u(a_{11}v + a_{02}v') - 2v(a_{11}u + a_{02}u')|_{x = x_2},$$

oder schliesslich:

40) $$\Omega_3 = |a_{02}(uv' - vu')|_{x = x_2} + |u(a_{21}u^2 + 2a_{12}uu' + a_{03}u'^2)|_{x = x_2}.$$

Wegen der Identität:

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_{111} z^3 + 3f_{112} z^2 z' + 3f_{122} z z'^2 + f_{222} z'^3) \, dx = [\Omega_3]$$

und der Relation 40) können wir jetzt die für ein M_a^i notwendige Bedingung 28) in der Form schreiben:

41) $$[v]_{x = x_2} = \left[\frac{d^2 y}{dc^2}\right]_{x = x_2} = 0.$$

Wir können ferner — analog der Ableitung von 40) — die durch 30) definierte Funktion F_3 in der Form darstellen:

42) $$F_3 = -\tfrac{1}{6} f_{22} [uv' - vu'] - \tfrac{1}{6} [u(a_{21} u^2 + 2a_{12} uu' + a_{03} v'^2)],$$

und wir gehen nun zur Vereinfachung des Ausdruckes 29) über.

Wir bedenken hier zunächst, dass nach der dritten zweiten Formel 37):

$$\Omega_4 = \frac{d\,\Omega_3}{d\,c} - 3\int\limits_{x_1}^{x_2}(a_{30}\,u^2\,v + a_{21}\,u\,(2\,u'\,v + u\,v') + a_{12}\,u'\,(u\,v + 2\,u'\,v') + a_{03}\,u'^2\,v')$$

$$= \frac{d\,\Omega_3}{d\,c} - 3\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\,x}\{v\,(a_{11}\,v + a_{02}\,v' + a_{21}\,u^2 + 2a_{12}\,u\,u' + a_{03}\,u'^2)\}\,d\,x$$

$$+ 3\int\limits_{x_1}^{x_2}(a_{20}\,v^2 + 2a_{11}\,v\,v' + a_{02}\,v'^2)\,d\,x,[1]$$

somit mit Rücksicht auf 40) und 41):

$$[\Omega_4] = -\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2} + 3\int\limits_{x_1}^{x_2}\{f_{11}\,[v^2] + 2f_{12}\,[v\,v'] + f_{22}\,[v'^2]\}\,d\,x,$$

und da nach 31) und 37)

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} z^4\,D^4\,(f)\,d\,x = \tfrac{1}{24}\,[\Omega_4]:$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} z^4\,D^4\,(f)\,d\,x = -\,\tfrac{1}{24}\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2} + \tfrac{1}{8}\int\limits_{x_1}^{x_2}\{f_{11}\,[v^2] + 2f_{12}\,[v\,v'] + f_{22}\,[v'^2]\}\,d\,x. \tag{43}$$

Wir brauchen jetzt noch diesen Ausdruck und den Ausdruck:

$$z^4\left\{D^2\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{3\,F_3}{z^3}\right\}^2 = +\,\tfrac{1}{4}\,f_{22}^2\,\frac{[u\,v' - v\,u']^2}{[u]^2} \tag{44}$$

in 29) einzusetzen, um für 29) den folgenden Wert zu erhalten:

---

[1]) Mit Rücksicht auf die aus 38) folgende Relation:

$$a_{20}\,v + a_{11}\,v' + a_{30}\,u^2 + 2\,a_{21}\,u\,u' + a_{12}\,u'^2 = \frac{d}{d\,x}\,(a_{11}\,v + a_{02}\,v' + a_{21}\,u^2 + 2\,a_{12}\,u\,u' + a_{03}\,u'^2).$$

$$45)\quad -\tfrac{1}{24}\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2}+\tfrac{1}{8}\int_{x_1}^{x_2}\Big\{f_{11}\,[v^2]+2f_{12}\,[v\,v'] + f_{22}\,[v'^2]-f_{22}\,\frac{[u\,v'-v\,u']^2}{[u]^2}\Big\}\,d\,x.$$

Nun ist leicht zu zeigen, dass das Integral in diesem Ausdruck verschwindet, denn es ist:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{22}\left\{\frac{u\,v'-v\,u'}{u}\right\}^2 d\,x \equiv \int_{x_1}^{x_2} f_{22}\,u^2\left\{\frac{d}{d\,x}\left(\frac{v}{u}\right)\right\}^2 d\,x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\Big\{f_{11}\,v^2+2f_{12}\,v\,v'+f_{22}\,v'^2 -\frac{d}{d\,x}\Big\{f_{12}\,v^2+f_{22}\,\frac{v^2\,u'}{u}\Big\}\Big\}\,d\,x,$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\{f_{11}\,v^2+2f_{12}\,v\,v'+f_{22}\,v'^2\}\,d\,x,$$

sobald $v=0$ für $x=x_1$ und $x=x_2$.

Der Ausdruck 29) reduciert sich somit auf

$$46)\qquad -\tfrac{1}{24}\,|f_{22}\,z'\,[w]\,|_{x=x_2}.$$

Wir können hiernach jetzt den Kriterien S. 10 die elegante Form der Erdmann'schen Kriterien geben:

Definiert man die Operation $\dfrac{d\,(-)}{d\,c}$ durch die Formel:

$$47)\quad \frac{d\,(-)}{d\,c}=\frac{\partial\,(-)}{\partial\,c_1}\cdot\left|\frac{\partial\,y}{\partial\,c_2}\right|_{x=x_1}-\frac{\partial\,(-)}{\partial\,c_2}\cdot\left|\frac{\partial\,y}{\partial\,c_1}\right|_{x=x_1},$$

so ist in dem betrachteten semidefiniten Falle für ein M_a^i notwendig, dass:

$$48)\qquad \left[\frac{d^2\,y}{d\,c^2}\right]_{x=x_2}=0;$$

es wird dann thatsächlich ein M_a^i stattfinden, wenn

$$49)\qquad \left[\frac{d\,y'}{d\,c}\cdot\frac{d^3\,y}{d\,c^3}\right]_{x=x_2}\ \text{negativ}$$

und von Null verschieden ist; ist der Ausdruck 4
positiv und von Null verschieden, so wird ein 1
nicht vorhanden sein; ist

$$\left[\frac{d^3 y}{d c^3}\right]_{x=x_2} = 0,$$

so ist eine weitere Untersuchung erforderlich (sen
definiter Fall höherer Ordnung).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1902

Band/Volume: 1902

Autor(en)/Author(s): Korn Arthur

Artikel/Article: Ueber den einfachsten semidefiniten Fall in der eigentlichen Variationsrechnung 75-90