Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Der „gefährliche Ort" beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel.

Von **S. Finsterwalder.**

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

Wenn bei der Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden in der Ebene nach dem sogenannten Pothenot'schen Problem der Fall eintritt, daß der zu bestimmende Punkt mit den drei Festpunkten auf einem Kreise liegt, so wird das Ergebnis der Punktbestimmung insofern ungenügend, als jeder Punkt des Kreises den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Man spricht deshalb von dem „gefährlichen Kreis" durch die drei Festpunkte, den man bei der pothenotischen Bestimmung zu vermeiden hat. Bei der Erweiterung des pothenotischen Problems auf die Kugel[1]) ist die Frage naheliegend, ob dabei auch noch ein Gegenstück zum „gefährlichen Kreis" — wir wollen es „gefährlichen Ort" nennen — zu beachten ist. Ein „gefährlicher Ort" in dem Sinne, daß alle Punkte desselben den Bedingungen der Aufgabe genügen, ist nun von vornherein nicht zu erwarten; ein solcher pflegt in der Regel nur aufzutreten, wenn die Punktbestimmung wie beim Pothenot'schen Problem in der Ebene im allgemeinen eindeutig ist und im besonderen Falle dann unbestimmt wird. Wohl aber kann die Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden auf der Kugel, die im allgemeinen vierdeutig ist, dadurch unsicher

[1]) Vergl. S. Günther: Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche. Diese Berichte, Bd. 24, 1904, S. 115, wo auch die Geschichte des Problems berücksichtigt ist.

werden, daß für besondere Lagen des zu bestimmenden Punktes zwei von den vier Lösungen zusammenfallen, was dann die Wirkung hat, daß Abweichungen von den gegebenen Winkeln, die unendlichklein von der zweiten Ordnung sind, bereits eine Verschiebung des rückwärts eingeschnittenen Punktes um eine unendlichkleine Grösse erster Ordnung zur Folge haben. Der Ort der Punkte, für welche der genannte Fall eintritt, ist für die Praxis nicht weniger „gefährlich" als der Umkreis der drei Festpunkte in der Ebene und er möge deshalb im folgenden gekennzeichnet werden.

Der nächstliegende Weg, die Diskriminante der Gleichung vierten Grades,[1]) von der die Lösung des Problems abhängt, zu bilden, führt zu ganz unübersichtlichen Formeln, mit denen kaum etwas anzufangen ist; dagegen kommt man mit einer kinematischen Betrachtung — ähnlich wie beim Problem des Rückwärtseinschneidens im Raum[2]) — auf verhältnismäßig einfache Weise zum Ziel.

Es seien $A\,B\,C$ (Fig. 1) die drei Festpunkte auf der Kugel, P der zu bestimmende Punkt. Wenn P auf dem „gefährlichen Ort" liegt, so muß das als starr vorausgesetzte Büschel (aus den drei Großkreisen PA, PB, PC bestehend) noch eine unendlichkleine Bewegung um die Punkte $A\,B\,C$ zulassen. Das Momentanzentrum dieser Bewegung erhält man, indem man auf den Strahlen des Büschels in den Punkten A, B und C senkrechte Großkreise errichtet, die sich dann in einem Punkte Q (dem Momentanzentrum) schneiden müssen.

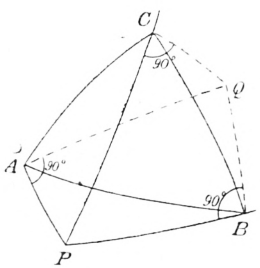

Fig. 1.

Ist umgekehrt ein solcher Schnittpunkt der drei Großkreise vorhanden, so ist eine unendlichkleine Drehung des Büschels der drei Großkreise durch P möglich, wobei sich diese nur um ein

[1]) Ebenda S. 122.

[2]) Vergl. S. Finsterwalder und W. Scheufele: Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Diese Berichte, Bd. 23, 1903, S. 597.

Unendlichkleines zweiter Ordnung von den Festpunkten A, B, C entfernen, während der Punkt P um ein Unendlichkleines erster Ordnung fortrückt. Offenbar ist dann aber auch der Punkt Q ein Punkt des gefährlichen Ortes, zu dem nun P als Momentanzentrum gehört.

Gestützt auf diese Eigenschaft läßt sich die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte P und Q leicht ableiten. Die Richtungkosinus der Kugelradien nach den Festpunkten $A\,B\,C$ seien mit $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$, $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$, $\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$, jene nach P und Q mit $\alpha\,\beta\,\gamma$, $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ bezeichnet. Die Richtungskosinus der Ebene durch den Kugelmittelpunkt und $A\,P$ verhalten sich wie die Determinanten der Matrix $\left\|\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{matrix}\right\|$, jene der Ebene durch den Kugelmittelpunkt und $A\,Q$ verhalten sich wie die Determinanten der Matrix $\left\|\begin{matrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{matrix}\right\|$. Die Bedingung des Senkrechtstehens beider Ebenen, welche jene für das Senkrechtstehen der Großkreise durch $A\,P$ und $A\,Q$ nach sich zieht, lautet nach $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ geordnet:

$$\alpha'\left[\alpha\left(\beta_1^2+\gamma_1^2\right)-\alpha_1\left(\beta\beta_1+\gamma\gamma_1\right)\right]+\beta'\left[\beta\left(\gamma_1^2+\alpha_1^2\right)-\beta_1\left(\gamma\gamma_1+\alpha\alpha_1\right)\right] \\ +\gamma'\left[\gamma\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\right)-\gamma_1\left(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1\right)\right]=0$$

Dieser Gleichung schließen sich zwei weitere an, bei welchen an Stelle des Zeigers 1 der Zeiger 2 bezw. 3 tritt.

Aus diesen drei Gleichungen eliminiert man $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ und erhält die gewünschte Gleichung des geometrischen Ortes in Determinantenform, wie folgt:

$$\begin{vmatrix} \alpha(\beta_1^2+\gamma_1^2)-\alpha_1(\beta\beta_1+\gamma\gamma_1), & \beta(\gamma_1^2+\alpha_1^2)-\beta_1(\gamma\gamma_1+\alpha\alpha_1), & \gamma(\alpha_1^2+\beta_1^2)-\gamma_1(\beta\beta_1+\gamma\gamma_1) \\ \alpha(\beta_2^2+\gamma_2^2)-\alpha_2(\beta\beta_2+\gamma\gamma_2), & \beta(\gamma_2^2+\alpha_2^2)-\beta_2(\gamma\gamma_2+\alpha\alpha_2), & \gamma(\alpha_2^2+\beta_2^2)-\gamma_2(\beta\beta_2+\gamma\gamma_2) \\ \alpha(\beta_3^2+\gamma_3^2)-\alpha_3(\beta\beta_3+\gamma\gamma_3), & \beta(\gamma_3^2+\alpha_3^2)-\beta_3(\gamma\gamma_3+\alpha\alpha_3), & \gamma(\alpha_3^2+\beta_3^2)-\gamma_3(\beta\beta_3+\gamma\gamma_3) \end{vmatrix}=0 \qquad 1)$$

Aus dieser homogenen Gleichung dritten Grades in $\alpha\,\beta\,\gamma$ geht hervor, daß der gesuchte „gefährliche Ort“ durch einen Kegel dritter Ordnung, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, ausgeschnitten wird, selber also eine Linie sechster Ordnung ist.

Ehe die Gleichung des Ortes auf eine einfachere Form gebracht wird, sollen auf kinematischem Wege noch einzelne Punkte desselben bestimmt werden. Fällt der Punkt P mit einem der Festpunkte, z. B. A zusammen, so besteht unendlichkleine Beweglichkeit des Strahlenbüschels und das zugehörige Momentanzentrum A' ist der Schnitt der auf den Seiten AB und AC in B und C errichteten senkrechten Großkreise. Auch dieser Punkt liegt auf der Kurve. Bezeichnen wir den Pol der Seite AB des Dreiecks ABC mit C_1, jenen von BC mit A_1 und jenen von CA mit B_1, so ist A' der Schnitt der Großkreise durch BC_1 und CB_1. Ähnlich liegen B' als Schnitt von AC_1 und CA_1, sowie C' als Schnitt von BA_1 und AB_1 auf der Kurve. Aber auch die Punkte $A_1\,B_1\,C_1$ liegen auf dem gefährlichen Ort. Fällt P mit A_1 zusammen, so decken sich die zu PB und PC in B und C errichteten senkrechten Großkreise längs der Seite BC und als Momentanzentrum A_1' tritt dann der Schnitt des in A zu $A_1 A$ errichteten senkrechten Großkreises mit AB auf. $A_1 A$ ist die von A auf BC gefällte Höhe im sphärischen Dreieck und A_1' deren Pol. Der Umstand, daß sich die drei Höhen des sphärischen Dreiecks in einem Punkt schneiden, hat zur Folge, daß die ihnen entsprechenden Pole A_1', B_1', C_1', die als Punkte des gefährlichen Ortes erkannt wurden, auf einem Großkreise liegen. Wir wissen also von folgenden 12 Punkten, daß sie auf dem gefährlichen Ort liegen:

1. die Ecken des Dreiecks der drei Festpunkte A, B, C;
2. die Ecken des Polardreiecks hiezu A_1, B_1, C_1;
3. die Pole A_1', B_1', C_1' der Höhen des Dreiecks ABC, die gleichzeitig Höhen des Polardreiecks sind;
4. die Schnittpunkte A', B', C' der kreuzweisen Verbindungslinien der Ecken beider Dreiecke.

Die Punkte liegen ganz gleichartig zu beiden Dreiecken ABC und $A_1\,B_1\,C_1$.

Durch diese 12 Punkte ist der Kegel dritter Ordnung, welcher den gefährlichen Ort ausschneidet, mehr als bestimmt.

Er bleibt demnach ungeändert, wenn an Stelle des Dreiecks ABC das Polardreieck $A_1 B_1 C_1$ tritt. Es soll nun der Kegel mit einer passenden Ebene geschnitten und die Gleichung der Schnittkurve in Dreieckskoordinaten bestimmt werden. Als Schnittebene empfiehlt sich eine Parallele zur Polarebene des Höhenschnittpunktes im Dreieck der Festpunkte. Diese Schnittebene schneidet das Dreikant ABC und dessen Polardreikant $A_1 B_1 C_1$ nach ähnlichen Dreiecken, für welche der Höhenschnitt Ähnlichkeitszentrum ist. In Fig. 2 ist die Durchschnittsfigur mit der genannten Ebene dargestellt und zwar tragen die Punkte dieselbe Bezeichnung, wie jene auf der Kugel. Das ebene Dreieck ABC soll als Koordinatendreieck und der Höhenschnittpunkt H als Einheitspunkt gelten. Die Winkel dieses Dreiecks sind ebensogroß wie jene, welche die Höhen des sphärischen Dreiecks der Festpunkte im Höhenschnitt miteinander einschließen und können aus den sphärischen Dreieckswinkeln leicht berechnet werden; ihre Tangenten werden mit u, v, w bezeichnet. Die Gleichung der unendlichfernen Geraden, auf welcher die Punkte A_1' B_1' C_1' der Kurve liegen, ist dann $u\,x_1 + v\,x_2 + w\,x_3 = 0$. Da die Kurve außerdem durch die Ecken des Koordinatendreiecks geht, wird ihre Gleichung von der Form

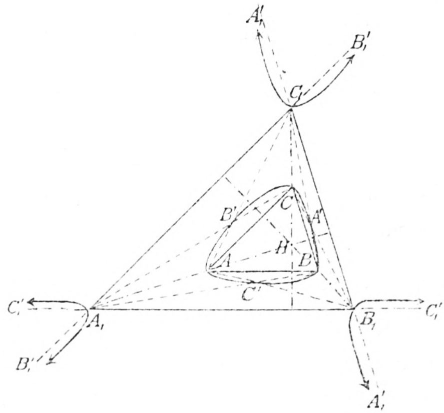

Fig. 2.

$$x_1 x_2 x_3 + (u\,x_1 + v\,x_2 + w\,x_3)(\varkappa_1 x_2 x_3 + \varkappa_2 x_3 x_1 + \varkappa_3 x_1 x_2) = 0.$$

Wählt man die Gleichung der Linie $A_1 B_1$, die durch den Schnitt von $u\,x_1 + v\,x_2 + w\,x_3 = 0$ und $x_3 = 0$ geht, zu

$u x_1 + v x_2 + (w + \lambda) x_3 = 0$, so werden jene der Linien $B_1 C_1$ und $C_1 A_1$:

$(u + \lambda) x_1 + v x_2 + w x_3 = 0$ und $u x_1 + (v + \lambda) x_2 + w x_3 = 0$.

Da nun die Kurve durch die Punkte A_1, B_1, C_1 gehen soll, müssen die Werte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ entsprechend gewählt werden und die Gleichung erhält schließlich die folgende Form:

$$\lambda(u + v + w + 2\lambda) x_1 x_2 x_3 + (u x_1 + v x_2 + w x_3)[(u + v + \lambda) x_1 x_2 + (v + w + \lambda) x_2 x_3 + (w + u + \lambda) x_3 x_1] = 0. \qquad 2)$$

Man überzeugt sich nun leicht, daß auch die Punkte A', B', C' auf der Kurve liegen.

A' hat z. B. die Koordinaten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = -1 : \frac{u + w + \lambda}{v} : \frac{u + v + \lambda}{w} \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung des imaginären Kegelschnitts, in welchem die mit der gegebenen Kugel konzentrische vom Radius Null die Schnittebene trifft, lautet:

$$(u x_1 + v x_2 + w x_3)^2 + \lambda (u x_1^2 + v x_2^2 + w x_3^2) = 0 \qquad 3)$$

Mit Zugrundelegung dieses Kegelschnitts als Absolutem einer Maßbestimmung hätte sich die Gleichung der Kurve dritter Ordnung auch unmittelbar aus der Definition des gefährlichen Ortes ableiten lassen.

Von bemerkenswerten Einzelfällen sei zunächst jener erwähnt, bei welchem das sphärische Dreieck unendlichklein wird oder die Kugel in eine Ebene übergeht. Er entspricht dem Fall $\lambda = 0$, für den die Gleichung des geometrischen Ortes in die unendlichferne Gerade: $u x_1 + v x_2 + w x_3 = 0$ und in den Kegelschnitt: $(u + v) x_1 x_2 + (v + w) x_2 x_3 + (w + u) x_3 x_1 = 0$ zerfällt. Letzterer ist aber der Umkreis des Koordinatendreiecks, denn seine Gleichung kann auf die Form

$$(u x_1^2 + v x_2^2 + w x_3^2) - (u x_1 + v x_2 + w x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

gebracht werden. Hieraus geht hervor, daß der Kegelschnitt die unendlichferne Gerade $(u x_1 + v x_2 + w x_3) = 0$ in denselben

Punkten (den imaginären Kreispunkten) schneidet, wie der durch Gleichung 3 dargestellte Kreis. Man erhält also hier den „gefährlichen Kreis“ des Pothenot'schen Problems der Ebene. Bei dieser Gelegenheit sei noch auf den eigentümlichen Unterschied hingewiesen, der zwischen den verwandten Örtern auf der Kugel und der Ebene besteht. Bei dem gefährlichen Ort auf der Kugel sind die Richtungen, in welchen eine Beweglichkeit des rückwärtsbestimmten Punktes besteht, verschieden von den Tangentenrichtungen an den gefährlichen Ort; bei dem gefährlichen Kreise der Ebene fallen sie zusammen.

Fällt im Dreieck der Festpunkte auf der Kugel eine Ecke auf den Pol der gegenüberliegenden Seite, was zur Folge hat, daß die anliegenden Seiten einem Rechten gleich werden, so spaltet sich von der Kurve dritter Ordnung jene Seite ab und der Rest wird ein Kegelschnitt.

In einem sphärischen Dreieck mit drei rechten Winkeln als Seiten zerfällt der gefährliche Ort in die drei Seiten des Dreiecks.

Liegen die Ecken des sphärischen Dreiecks auf einem Großkreise, so zerfällt der gefährliche Ort in jenen Großkreis und in einen Kreis vom Radius Null durch den Pol des Großkreises.

Die drei letztgenannten Einzelfälle werden am leichtesten aus Gleichung 1 entnommen; ebenso der Fall eines rechtwinkligen Festpunktdreiecks, der übrigens keine Besonderheit in Bezug auf den Verlauf des gefährlichen Ortes aufweist.

Zum Schlusse sei noch einer eigentümlichen Beziehung der untersuchten Kurve zur J. Steiner'schen ebenen Kurve dritter Klasse[1]) Erwähnung getan. Mit der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens auf der Kugel ist aufs engste die dualistische Aufgabe verwandt, welche verlangt, die Seiten eines

---

[1]) Jakob Steiner: Über eine besondere Kurve dritter Klasse (und vierten Grades). Journal für reine und angew. Math., Bd. 53, S. 231; auch: Gesammelte Werke, 2. Bd., S. 641.

Dreiecks durch einen Großkreis so zu schneiden, daß die sphärischen Abstände der Schnittpunkte vorgegebene seien. Auch die Lösung dieser Aufgabe kann unsicher werden. Es ist unter Umständen eine unendlichkleine Verschiebung des schneidenden Großkreises möglich, welche keine vergleichbare Veränderung der Abstände der Schnittpunkte nach sich zieht. Die Lagen der Großkreise, die eine solche Verschiebung zulassen, umhüllen den gefährlichen Ort. Diese Lagen lassen sich ebenfalls durch kinematische Betrachtungen auffinden. (Fig. 3.) Sind A_1, B_1, C_1 die Ecken des Dreiecks, A, B, C die Pole seiner Seiten und schneide ein Großkreis die Seite $A_1 B_1$ in N, $B_1 C_1$ in L, $C_1 A_1$ in M, so erhält man das Momentanzentrum Q für die mögliche Bewegung des Großkreises im Schnitt der Lote in L, M, N auf die Seiten $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$. Schneiden sich die drei Lote in einem Punkt Q, so ist Großkreis in der gefährlichen Lage. Der Ort der Momentanzentra Q hat die Eigenschaft, daß die von ihm auf die Seiten des Dreiecks gefällten Lote Fußpunkte haben, die auf einem Großkreise liegen.

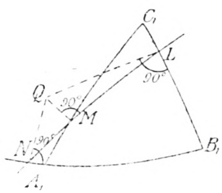

Fig. 3.

So haben wir im Umhüllungsgebilde der ausgezeichneten Großkreise das sphärische Gegenstück zur J. Steiner'schen Kurve dritter Klasse und im Ort der Momentanzentra P das Gegenstück zum Umkreise des Dreiecks bei der Steiner'schen Konstruktion derselben, die bekanntermassen lautet: Von den Punkten des Umkreises eines ebenen Dreiecks werden Lote auf die Seiten desselben gefällt. Ihre Fußpunkte liegen auf Geraden, die eine Kurve dritter Klasse umhüllen, von welcher die Dreiecksseiten und Höhen Tangenten sind. Das Momentanzentrum Q kann auch dadurch gefunden werden, daß man die Punkte $L\,M\,N$ mit den Ecken A, B, C des Polardreiecks durch Großkreise verbindet. Errichtet man in den Punkten A, B, C Lote zu jenen Verbindungslinien, so schneiden sich dieselben in einem Punkte P, dem Pole des Großkreises durch $L\,M\,N$. Bei der unendlichkleinen Drehung um Q, bei welcher sich die

Abstände der Punkte LMN vergleichsweise nicht ändern, geschieht dasselbe auch mit den Winkeln der Großkreise des Büschels PA, PB, PC und P ist demnach ebenso wie Q ein Punkt des gefährlichen Ortes für das Rückwärtseinschneiden nach dem sphärischen Dreieck ABC. Letzterer ist aber von dem gefährlichen Ort für das Rückwärtseinschneiden nach dem Polardreieck $A_1 B_1 C_1$ nicht verschieden.

Zusammenfassend kann man sagen: Der „gefährliche Ort“ beim Rückwärtseinschneiden nach einem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck ist eine durch die Ecken beider Dreiecke gehende Kurve, die von einem Kegel dritter Ordnung mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ausgeschnitten wird. Fällt man von einem Punkte dieser Kurve Lote auf die Seiten des Dreiecks oder seines Polardreiecks, so liegen die Fußpunkte auf je einem Großkreise und die Ebenen der letzteren umhüllen einen Kegel dritter Klasse, der die Seiten beider Dreiecke sowie ihre gemeinsamen Höhen berührt und polarreziprok zum Kegel dritter Ordnung liegt.

Von der großen Zahl metrischer Eigenschaften der J. Steiner'schen ebenen Kurve dritter Klasse überträgt sich keine auf das sphärische Gegenstück; sie sind nämlich wesentlich dadurch bedingt, daß die Steiner'sche Kurve eine Doppeltangente mit den imaginären Kreispunkten als Berührungspunkten besitzt, während der Kegel dritter Klasse beim sphärischen Gegenstück allgemeiner Art ist.