Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Beweis eines Satzes über das Vorhandensein des komplexen Integrals.

Von **Otto Stolz.**

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

1. Bezeichnet $g(\tau)$ eine komplexe Funktion der reellen Veränderlichen τ, welche für jeden Wert des endlichen Intervalles (α, β) mit Einschluß von $\tau = \alpha$ und $\tau = \beta$ stetig ist, so stellt die Gleichung

$$x = g(\tau) \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \tag{1}$$

in der x-Ebene eine ganz im Endlichen liegende, stetige Linie $\mathfrak{w}$ dar, welche die Punkte $a = g(\alpha)$ und $b = g(\beta)$ verbindet. Ferner sei für jeden Punkt x in $\mathfrak{w}$ eine Funktion $f(x)$ eindeutig erklärt und zwar sei sie in $\mathfrak{w}$ endlich d. h. es gebe eine positive Konstante Γ derart, daß der absolute Betrag von $f(x)$ für jedes solche x kleiner als Γ ist. Alsdann versteht man unter dem I n t e g r a l d e r F u n k t i o n $f(x)$ l ä n g s d e s W e g e s $\mathfrak{w}$

$$\int_{a\,(\mathfrak{w})}^{b} f(x)\,dx \tag{2}$$

die der nachstehenden Bedingung genügende Zahl J. Wir teilen das Intervall $\beta - \alpha$ in beliebig viele (n) Teile $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_n$, so daß

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = \beta - \alpha$$

ist, und setzen

$$\alpha = \alpha_0 \qquad \alpha + \delta_1 = \alpha_1 \quad \alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, \alpha_{n-1} + \delta_n = \alpha_n = \beta$$

$$g(\alpha_0) = a_0 = a \quad g(\alpha_1) = a_1 \quad g(\alpha_2) = a_2 \quad g(\alpha_{n-1}) = a_{n-1} \quad g(\alpha_n) = a_n = b.$$

Endlich sei τ_r ein im Intervalle $(\alpha_{n-1}, \alpha_r) \cdot (r = 1, 2 \ldots n)$ beliebig gewählter Wert von τ und $x_r = g(\tau_r)$. Dann soll jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ so entsprechen, daß, wenn nur jeden der Teile $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_n$, deren Summe $\beta - \alpha$ ist, kleiner als δ ist, stets

$$\left| \sum_1^n{}^r f(x_r)(a_r - a_{r-1}) - J \right| < \varepsilon \tag{3}$$

ist. Darin besteht die arithmetische Bedeutung der Formel

$$J = \lim_{\delta_r = 0} \sum_1^n{}^r f(x_r)(a_r - a_{r-1}). \tag{4}$$

Nun besteht bekanntlich der Satz: „Wenn der Weg $\mathfrak{w}$ regulär ist (d. h. wenn entweder der Differentialquotient $g'(\tau)$ im Intervalle (α, β) überall d. i. für $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ stetig ist oder das Intervall (α, β) sich so in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegen lässt, daß $g'(\tau)$ in jedem Teil-Intervalle überall stetig ist) und wenn das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(g(\tau))\, g'(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

einen Sinn hat, so ist das komplexe Integral (2) vorhanden und zwar ist es dem soeben erwähnten Integral (5) gleich.“

Diesen Satz habe ich für den Fall, daß $g'(\tau)$ im Intervalle (α, β) durchaus stetig ist, in meinen „Grundzügen der Differential- und Integralrechnung“ II, S. 174 bewiesen. Im zweiten der hinsichtlich des Verhaltens von $g'(\tau)$ soeben unterschiedenen Falle wurde der Satz a. a. O. nicht sichergestellt.[1])

[1]) Vergl. Monatshefte für Mathematik und Physik, XI, S. 64. Der Beweis, welcher an dieser Stelle von mir für den i. J. angeführten Satz in dem in Nr. 2 behandelten Falle gegeben ist, kann nicht völlig befriedigen, wie ich im 3. Bande der Transactions of the American math. Soc. S. 33 bemerkt habe. Daselbst habe ich den genannten Satz zurückgeführt auf den von C. Jordan (Cours d'Analyse 2, éd. I, Nr. 193) aufgestellten Satz, daß eine in allen Punkten des Weges $\mathfrak{w}$ eindeutige und stetige Funktion $f(x)$ auf ihm integrierbar ist, wenn dieser Weg rektifizierbar ist.

Ich gebe daher hier einen einfachen Beweis desselben für den genannten Fall. Er stützt sich darauf, daß der Satz für den ersten Fall bereits erwiesen ist.

2. Durch Einschaltung von h steigenden Werten $\gamma_1\,\gamma_2 \ldots \gamma_h$ zwischen α und β werde das Intervall (α, β) in die $h+1$ Teile (α, γ_1), $(\gamma_1, \gamma_2) \ldots (\gamma_h, \beta)$ zerlegt, in deren jedem $g'(\tau)$ ausnahmslos d. i. mit Einschluß der Grenzen desselben stetig sei. Setzen wir $g(\gamma_s) = c_s$ $(s = 1 \ldots h)$ und bezeichnen die den soeben erwähnten Teil-Intervallen (α, γ_1) u. s. w. entsprechenden Stücke von $\mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{w}_0 \cdots \mathfrak{w}_h$, so erhalten wir durch Anwendung des obigen Satzes für den ersten Fall die $(h+1)$ Formeln

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{a(\mathfrak{w}_0)}^{c_1} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma_1} f(g(\tau))\,g'(\tau)\,d\tau \qquad \int_{c_h(\mathfrak{w}_h)}^{b} f(x)\,dx = \int_{\gamma_h}^{\beta} f(g(\tau))\,g'(\tau)\,d\tau \\ \displaystyle\int_{c_s(\mathfrak{w}_s)}^{c_{s+1}} f(x)\,dx = \int_{\gamma_s}^{\gamma_{s+1}} f\{g(\tau)\}\,g'(\tau)\,d\tau \cdot (s = 1, 2 \ldots h-1). \end{array}\right\} \quad (6)$$

Mit Hilfe derselben werde ich zeigen, daß die Summe der rechten Seiten der Gleichungen (6) d. i. das Integral (5) für J in die Ungleichung (3) eintreten darf. Der Beweis dafür wird indirekt geführt.

Angenommen, es gebe zu ε kein solches δ, daß, wenn nur ein jedes $\delta_r < \delta$ ist, die Ungleichung (3) Gültigkeit besitzt, so müßte zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl δ mindestens eine Schar von Teilen $\delta_1 \ldots \delta_n$, jeder kleiner als δ, die zusammen $\beta - \alpha$ ausmachen, und zu den einzelnen Teilen mindestens je eine Zahl τ_r so gehören, daß

$$\left| \sum_1^n{}^r f(x_r)\,(a_r - a_{r-1}) - J \right| \geqq \varepsilon \qquad (7)$$

ist. Ich bezeichne also im folgenden mit $\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_n$ bestimmte Teile von $\beta - \alpha$ und ebenso mit τ_r $(r = 1, 2 \ldots n)$ eine bestimmte Zahl im Intervalle (α_{r-1}, α_r).

Die Zahl γ_s falle in das Intervall $(\alpha_{i_s-1}, \alpha_{i_s})$ von der Länge δ_{i_s} und zwar sei

$$\gamma_s - \alpha_{i_s-1} = \varepsilon_s, \quad \alpha_{i_s} - \gamma_s = \zeta_s, \quad \text{mithin } \delta_{i_s} = \varepsilon_s + \zeta_s.$$

Ist eine der Zahlen $\varepsilon_s\,\zeta_s$ Null, so ist die andere gleich δ_{i_s} selbst. Dies soll gelten für alle Werte $s = 1, 2 \ldots h$. Ist dann χ_s ein willkürlicher Wert des Intervalles (a_{i_s-1}, γ_s), w_s ein solcher des Intervalles (γ_s, a_{i_s}) und ist $g(\chi_s) = y_s$ $g(w_s) = z_s$, so setze man

$$f(z_s)(a_{i_s} - c_s) + \sum_{i_s+1}^{i_{s+1}-1}{}^{r} f(x_r)(a_r - a_{r-1}) + f(y_{s+1})(c_{s+1} - a_{i_{s+1}-1}) = S_s. \quad (8)$$

Hier soll s außer den Werten $1 \ldots h$ auch den Wert 0 annehmen. Dabei sei $i_0 = 0$ $i_{h+1} = n+1$, $c_0 = a$ $c_{h+1} = b$. Ferner sei

$$f(x_{i_s})(a_{i_s} - a_{i_s-1}) - f(y_s)(c_s - a_{i_s-1}) - f(x_s)(a_{i_s} - c_s) = d_s (s = 1, 2 \ldots h). \quad (9)$$

Schreiben wir für die rechten Seiten der Gleichungen (6) nacheinander $J_0\, J_h$, $J_1 \ldots J_{h-1}$ und lassen

$$J_0 + J_1 + \cdots + J_{h-1} + J_h = \int_\alpha^\beta f\{g(\tau)\}\, g'(\tau)\, d\tau = J$$

sein, so finden wir

$$\sum_1^n{}^r f(x_r)(a_r - a_{r-1}) - J = \sum_0^h{}^s (S_s - J_s) + \sum_1^h{}^s d_s. \quad (10)$$

Da

$$\sum_0^h{}^s |S_s - J_s| + \sum_1^h{}^s |d_s| > \left| \sum_0^h{}^s (S_s - J_s) + \sum_1^h{}^s d_s \right|$$

ist, so ergibt sich aus der Gleichung (10) und der Beziehung (7), daß

$$\sum_0^h{}^s |S_s - J_s| + \sum_1^h{}^s |d_s| \geqq \varepsilon$$

sein müßte. Bezeichnen wir mit $|d_\iota|$ die größte unter den h Zahlen $|d_s|$, so müßte demnach

$$h\,|d_\iota| \geqq \varepsilon - \sum_0^h{}^s |S_s - J_s| \quad (11)$$

sein.

Wählen wir nun die positive Zahl λ kleiner als ε und ferner die positive Zahl $\varkappa$ so, daß

$$\varepsilon - (h + 1)\varkappa > \lambda \text{ ist, also } \varkappa < (\varepsilon - \lambda) : (h + 1). \qquad (12)$$

Zufolge des obigen Satzes (S. 22) für den ersten Fall entspricht der Zahl $\varkappa$ eine positive Zahl Δ_s in der Art, daß, wenn wir den Unterschied $\gamma_{s+1} - \gamma_s$ in Teile $\delta_{s,r}$ $(r = 1, 2 \ldots n_s)$ zerlegen und einen jeden von ihnen kleiner als Δ_s nehmen, alsdann

$$\left| \sum_1^{n_s} {}_r f(x_{s,r})(a_{s,r} - a_{s,r-1}) - J_s \right| < \varkappa \qquad (13)$$

ist. Hierbei ist mithin

$$\gamma_{s+1} - \gamma_s = \delta_{s,1} + \delta_{s,2} + \ldots + \delta_{s,n_s}$$

$$\left.\begin{array}{r} a_{s,r} = a_{s,r-1} + \delta_{s,r} \\ a_{s,r-1} < \tau_{s,r} < a_{s,r} \\ g(a_{s,r}) = a_{s,r},\ g(\tau_{s,r}) = x_{s,r} \end{array}\right\} (r = 1, 2 \ldots n_s)$$

$$a_{s0} = \gamma_{s-1} \quad a_{s,n_s} = \gamma_s, \quad a_{s0} = c_{s-1} \quad a_{s,n_s} = c_s.$$

s selbst durchläuft die ganzen Zahlen von 0 bis h, wobei $\gamma_0 = \alpha$ $\gamma_{h+1} = \beta$ zu denken ist. Unter den Zahlen $\Delta_0 \ldots \Delta_h$ sei Δ die kleinste.

Stellen wir uns unter dem bisher willkürlichen δ irgend eine bestimmte Zahl, welche kleiner als Δ ist, vor, so könnte jedes der ihr entsprechenden $(h + 1)$ Systeme von Zahlen ζ_s, $\delta_{i_s+1} \ldots \delta_{i_{s+1}-1}$, ε_{s+1} an die Stelle des mit dem nämlichen Zeiger s versehenen Systemes $\delta_{s,1} \ldots \delta_{s,n_s}$ treten. Daher hätten wir vermöge der Ungleichung (13) die $(h + 1)$ Ungleichungen

$$|S_s - J_s| < \varkappa \qquad (s = 0, 1 \ldots h).$$

Somit wäre nach den Formeln (11) und (12)

$$h\,|d_\iota| > \varepsilon - (h + 1)\varkappa > \lambda \text{ d. i. } |d_\iota| > \lambda : h. \qquad (13^*)$$

Bringen wir den Ausdruck (9) auf die Form

$$d_s = [f(x_{i_s}) - f(z_s)](a_{i_s} - c_s) + [f(x_{i_s}) - f(y_s)](c_s - a_{i_s-1})$$

und bemerken wir, daß für jeden Punkt x des Weges $\mathfrak{w}$ $|f(x)| < \Gamma$, somit für irgend zwei Punkte $x\,x'$ desselben $|f(x') - f(x)| < 2\,\Gamma$ ist, so finden wir, daß

$$|d_s| < 2\,\Gamma \{ |a_{i_s} - c_s| + |c_s - a_{i_s - 1}| \}$$

ist. Nehmen wir hier $s = \iota$ und beachten dann die Ungleichung (13*), so erkennen wir, daß

$$\lambda : h < 2\,\Gamma \{ |a_{i_\iota} - c_\iota| + |c_\iota - a_{i_\iota - 1}| \},$$

folglich

$$\lambda : 2\,h\,\Gamma < |a_{i_\iota} - c_\iota| + |c_\iota - a_{i_\iota - 1}|$$

sein müßte. Demnach soll mindestens eine der Zahlen

$$|a_{i_\iota} - c_\iota|, \quad |c_\iota - a_{i_\iota - 1}|$$

größer als $\lambda : 4\,h\,\Gamma$ sein. Das Ergebnis dieser Erörterung besteht also darin, daß w i e k l e i n man sich die Z a h l δ a u c h d e n k e n m a g, es mindestens ein vom Werte $\tau = \gamma_\iota$ ausgehendes Intervall, dessen Länge (ε_ι oder ζ_ι) kleiner als δ ist, geben würde, wofür die Differenz

$$a_{i_\iota} - c_\iota = g(a_{i_\iota}) - g(\gamma_\iota) \text{ bezw. } a_{i_\iota - 1} - c_\iota = g(a_{i_\iota - 1}) - g(\gamma_\iota)$$

dem Betrage nach größer als $\lambda : 4\,h\,\Gamma$ ist. Das ist unmöglich. Denn aus der Stetigkeit der Funktion $g(\tau)$ bei $\tau = \gamma_\iota$ folgt, daß der Zahl $\lambda : 4\,h\,\Gamma$ eine positive Zahl μ so entspricht, daß, wenn nur

$$|\tau - \gamma_\iota| < \mu \text{ ist, dann } |g(\tau) - g(\gamma_\iota)| < \lambda : 4\,h\,\Gamma$$

ist.

Da sich mithin die S. 23 gemachte Annahme als unhaltbar erwiesen hat, so muß ihr Gegenteil zutreffen. Demnach läßt sich jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so zuordnen, daß die Ungleichung (3) besteht, wenn für J die Summe $J_0 + J_1 + \ldots + J_h$ gesetzt wird und jeder der Teile $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, welche zusammen $\beta - \alpha$ geben, kleiner als δ genommen wird.

3. Das Verfahren, durch welches in Nr. 2 ein indirekter Beweis zustande gebracht wurde, läßt sich auch bei anderen ähnlichen Anlässen verwenden z. B. um nachzuweisen, daß

eine jede reguläre Kurve (S. 22) rektifizierbar sei. Als solche möge eine Kurve

$$\xi = \varphi(\tau) \qquad \eta = \psi(\tau) \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \tag{14}$$

bezeichnet werden, wenn die Funktionen $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ für jeden Wert des Intervalles (α, β) stetig sind nnd wenn entweder das Nämliche für die beiden Differentialquotienten $\varphi'(\tau)\,\psi'(\tau)$ gilt oder das Intervall (α, β) so in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt werden kann, daß in jedem von ihnen $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$ überall d. i. mit Einschluß der Grenzen desselben stetig sind. Setzt man

$$\xi + \eta i = x \qquad \varphi(\tau) + \psi(\tau) i = g(\tau),$$

so tritt an Stelle der zwei Gleichungen (14) die eine Gleichung (1).

Unter der Länge des durch die Gleichungen (14) dargestellten Bogens $a\,b$ versteht man die positive Zahl λ, welche die Forderung erfüllt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ in der Art gehört, daß stets

$$0 < \lambda - \sum_{1}^{n}{}_{r} \left| a_{r-1}\, a_r \right| < \varepsilon \tag{15}$$

ist, wenn nur ein jeder der zusammen $\beta - \alpha$ ausmachenden Teile $\delta_1 \ldots \delta_n$ kleiner als δ ist. Dabei bedeutet a_r $(r = 0, 1 \ldots n)$ wie S. 21 den zum Werte $\tau = \alpha_r$ gehörigen Punkt der Kurve (14).

Daß im Falle, daß $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$ für jeden Wert von τ im Intervalle (α, β) stetig sind,

$$\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\, d\tau \tag{16}$$

habe ich a. a. O. B. II, S. 314 gezeigt.[1])

Liegt der zweite Fall vor, daß $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$ nicht bei jedem Werte von τ im Intervalle (α, β) beide stetig sind, dieses Intervall jedoch so in $h + 1$ Teile (α, γ_1), $(\gamma_1, \gamma_2) \cdots (\gamma_h, \beta)$

[1]) Der dort vorgeführte Beweis läßt sich mit Hilfe einer von C. Jordan a. a. O. Nr. 111 gegebenen Formel etwas vereinfachen.

zerlegt werden kann, daß in jedem die beiden Funktionen $\varphi'(\tau)\,\psi'(\tau)$ ausnahmslos stetig sind, so darf man

$$\lambda = \sum_{0}^{h} {}_s \int_{\gamma_s}^{\gamma_{s+1}} \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\, d\tau \tag{17}$$

setzen. Und zwar weist man durch einen dem in Nr. 2 vorgeführten indirekten Beweise ganz ähnlichen nach, daß die soeben erwähnte Zahl λ die oben bei Ungleichung (15) aufgestellte Forderung erfüllt.[1]) Zufolge der Formel (17) besteht also auch in diesem Falle die Gleichung (16).

---

[1]) Auf eine andere Art habe ich die Formel (17) in den Transact. of the American math. Soc. III, S. 33 bewiesen und a. a. O. S. 303 auch aus der C. Jordan'schen Darstellung der Rektifikation der Kurven abgeleitet.