Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die universellen Schwingungen von Systemen von Rotationskörpern.

Von **Siegfried Guggenheimer.**

(Eingelaufen 1. Juli.)

I. Die universellen Schwingungen eines Systems Kugel-Kreisring.

a) Kugel und Ring sind konzentrisch.

Nachdem in der vorhergehenden Arbeit[1]) die universelle Grundschwingung eines schwach kompressiblen Kreisringes in einem imkompressiblen Medium betrachtet wurde, soll nun die gleiche Betrachtung durchgeführt werden für ein konzentrisches System von Kugel und Kreisring. Wir wollen eine Einheitskugel und einen Einheitsring betrachten, die wir durch die Festsetzung definieren, daß sowohl der Kugelradius R als auch der Neumann'sche Ringparameter c (resp. λ) sehr klein seien gegenüber dem Radius a des Führungskreises des Ringes. Der Querschnittsradius des Ringes ergibt sich dann in genügender Annäherung gleich 2 ac.

Es gelten die Gleichungen:

1) $\qquad \Delta\Phi = 0$ im Aussenraum von Ring und Kugel.

2) $\qquad \Delta\Phi + k^2\Phi = 0$ im Innenraum von Ring und Kugel,

wo für den Ring in erster Annäherung

[1]) Guggenheimer, Sitzungsberichte der K. B. Akademie der Wissenschaften 34, 41, 1904. Diese Arbeit soll im folgenden mit I zitiert werden.

2a) $$\varDelta \Phi + \frac{k^2 a^2}{\eta^2} \Phi = 0,$$

da $\frac{a^2}{\eta^2}$ in erster Annäherung konstant $= 1$ ist.

Sowohl für die Kugel als für den Ring gelten an der Grenze:

3a) $$\Phi_a = \Phi_i$$

3b) $$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu},$$

wo ν die Richtung der positiv genommenen inneren bezw. äußeren Normalen bedeutet.

Für die Kugel allein haben, wenn wir die Grundschwingung betrachten, folgende Gleichungen Gültigkeit:[1])

4) $$\Phi_a = \frac{a}{r}$$

wo r die Zentraldistanz irgend eines äußeren Punktes bedeutet,

5) $$\Phi_i = \frac{a}{r} \sin \frac{\pi}{2} \frac{r}{R}$$

und

6) $$k = \frac{\pi}{2R}$$

Für den Ring allein gilt:[2])

7) $$\Phi_a = \frac{c_{20}}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}}$$

8) $$\Phi_i = c_{20} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{1 - 4a^2k^2}{4} \lambda^2\right)$$

und

---

[1]) Korn, Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen S. 143, Berlin 1901.

[2]) I. S. 51 und 55.

9) $$k = \frac{1}{a\,c}\,\frac{1}{\sqrt{2\,K_c}}$$

worin

9a) $$\mathrm{K}_c = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} \left(\varkappa^2 = 1 - \lambda^2;\ \sin\varphi = \cos\frac{\Theta}{2}\right)$$

Damit Ring und Kugel gleichzeitig pulsieren, oder anders ausgedrückt, damit die Grundschwingungen beider in Resonanz sind, ist es nötig, daß die Größen k für Kugel und für Ring gleich sind, d. h. daß die Beziehung besteht (in erster Annäherung):

10) $$\frac{\pi}{2\,R} = \frac{1}{a \cdot c}\,\frac{1}{\sqrt{2\,K_c}}$$

wo K_c die oben definierte Bedeutung hat. Physikalisch möglich sind allerdings folgende Fälle:

1. Beide Körper haben Eigenschwingungen mit gleicher Schwingungsdauer. Die k sind gleich, und gestatten eine Beziehung zwischen a, c und R abzuleiten.

2. Die Größen k sind nicht gleich; d. h. die Eigenschwingung der Kugel hat eine andere Schwingungsdauer als die Eigenschwingung des Ringes.

Wir wollen, mit Rücksicht auf die Beziehungen zur Gravitationstheorie, die Beziehungen zwischen Kugelradius und Ringquerschnitt so annehmen, daß Fall 1 erfüllt ist.

Es ergibt sich dann folgendes Problem:

Wir suchen eine Funktion φ des Aussenraumes von Kugel und Ring mit den Randwerten.

11) $$\Phi = c_{10} + c_{11} \cos\Theta + \cdots$$

an der Kugel (wobei die Entwicklung nach Kugelfunktionen zu geschehen hat);

12) $$\Phi = \frac{\sqrt{1 - c^2}}{\sqrt{\eta}}\left(c_{20}\,A_0^0(c) + c_{21}\,A_1^0(c)\cos\Theta + \cdots\right)$$

am Ring.

Nachdem die Funktion Φ mit Hilfe der Murphyschen Methode im Aussenraum berechnet ist, (und außerdem die Funktionen im Innenraum von Kugel und Ring berechnet sind), gerade als ob alle Konstanten in den beiden Formeln bekannt wären, werden dann die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}$$

an Kugel- und Ringfläche gebildet.

Man erhält dann Relationen, welche gerade zur Berechnung der Konstanten, bezw. ihrer Verhältnisse, und der Größe k ausreichen.

Bestimmung der Potentialfunktion Φ im Aussenraume von Kugel und Ring nach der Methode von Murphy.

Es ist die

Potentialfunktion des Aussenraumes der Kugel:

Φ_{11} mit d. Randw. $\Phi_{11} = c_{10} + c_{11} \cos \Theta + \cdots$

Φ_{12} " " " $\Phi_{12} = - \Phi_{21}$ an der Kugel

. . . .

. . . .

und die Potentialfunktion des Aussenraumes des Ringes:

Φ_{21} mit d. Randw. $\Phi_{21} = \sqrt{\dfrac{1-c^2}{\eta}}\,[c_{20} A_0^0(c) + c_{21} A_1^0(c) \cos\Theta + \cdot\cdot]$

Φ_{22} " " " $\Phi_{22} = - \Phi_{11}$ am Ring

. . . .

. . . .

zu bestimmen.

Dann ist die gesuchte Potentialfunktion Φ des Aussenraumes mit den Randwerten

$$\Phi = c_{10} + c_{11} \cos \Theta + \cdots \text{ an der Kugel}$$

und

$$\Phi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{\eta}}\,[c_{20} A_0^0(c) + c_{21} A_1^0(c) \cos \Theta + \cdots] \text{ am Ring}$$

gleich

13) $$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \cdots \Phi_{21} + \Phi_{22} + \cdots$$

für Kugel und Ring.

Zunächst ist

$$\Phi_{11} = c_{10} \frac{R}{r} + c_{11} \frac{R^2}{r^2} \cos \Theta + \cdots$$

wo r die Zentraldistanz des variabeln Punktes $(x\,y\,z)$ darstellt. Ferner ist

$$\Phi_{21} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \left[\frac{c_{20}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}} \right.$$

$$\left. + c_{21} \frac{\cdot \lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\Theta \; d\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}\Big)^{\frac{3}{2}}}} + \cdots \right]$$ [1])

wo $\eta = a \dfrac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$ ist, und λ, ω die Ringkoordinaten des variabeln Punktes $(x\,y\,z)$ darstellen. (Man vergleiche hiezu I., S. 45—47.)

---

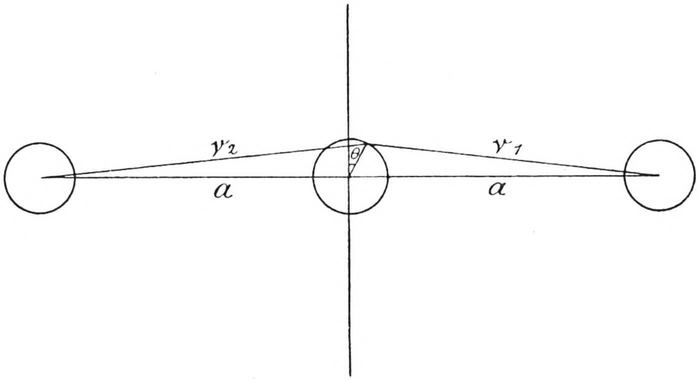
[1]) Die von Neumann in den Gleichungen 44 S. 32 seiner Abhandlung gegebenen Formeln sind nicht ganz richtig. Dieselben müssen lauten

$$J_p^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{(1 - 2\lambda\cos\Theta + \lambda^2)^{\frac{2q+1}{2}}}$$

$$+ \frac{(1-\lambda^2)^q}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Theta \; d\Theta}{(1 - 2\lambda\cos\Theta + \lambda^2)^{\frac{2q+1}{2}}}$$

da der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ nur dann vor das Integral auf der rechten Seite tritt, wenn $p = 0$. In allen übrigen Fällen $p = 1, 2, 3 \cdots$ ist nur mit $\frac{1}{\pi}$ zu multiplizieren. Dasselbe gilt für die $A_p^q(\lambda)$, für die zu setzen ist

Um nun Φ_{12} zu berechnen, entsprechend der Reflexion der Potentialfunktion Φ_{21} an der Kugel, wollen wir zunächst den Wert von λ für irgend einen Punkt der Kugel in den sphä-



rischen Polarkoordinaten r, Θ, Φ ausdrücken, wobei wir wieder die Symmetrieachse des Systems zur x-Achse wählen.

Es ist

14) $$\lambda = \frac{r_2}{r_1},$$

wenn

15) $$r_1^2 = a^2 + R^2 + 2\,a\,R \sin\Theta$$

15a) $$r_2^2 = a^2 + R^2 - 2\,a\,R \sin\Theta$$

$$A_p^q(\lambda) = \frac{\lambda^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}} + \frac{\lambda^p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\;d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

Eine gleiche Bemerkung gilt auch für die Formeln Neumann 32. S. 28 und 37. S. 30, in denen auf der rechten Seite nur für Fall p resp. $q = 0$ mit 2π zu multiplizieren ist, während in allen übrigen Fällen der Multiplikator nur π ist.

somit

16) $$\lambda = \sqrt{\frac{a^2 + R^2 - 2\,a\,R \sin\Theta}{a^2 + R^2 + 2\,a\,R\cos\Theta}},$$

und

16a) $$1 - \lambda^2 = \frac{4\,a\,R\sin\Theta}{a^2 + R^2 + 2\,a\,R\sin\Theta}$$

(und in erster Annäherung $1 - \lambda^2 = 4\sin\Theta\frac{R}{a}$).

An der Kugel ist

17) $$\eta = R\sin\Theta.$$

Wir haben also an der Kugel

18) $$\begin{aligned}\Phi_{21} &= \sqrt{\frac{4\,a}{a^2 + 2\,a\,R\sin\Theta + R^2}}\,[c_{20}(1 + W_1) + c_{21}\,W_2 + \cdots]\\ &= \frac{2}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{R}{a}\sin\Theta\right)[c_{20}(1 + W_1) + c_{21}\,W_2 + \cdots]\end{aligned}$$

in erster Annäherung, wenn wir Größen von der Ordnung $\frac{R^2}{a^2}$ vernachlässigen, und wenn

19) $$\begin{aligned}W_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}} - 1\\ W_2 &= \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta\,d\,\Theta}{\left(\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Nun ist, immer in erster Annäherung

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - (1 - \lambda^2)\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\,\Theta - 1$$

19a) $$= \frac{1-\lambda^2}{4\pi}\int_0^{2}\cos^2\frac{\Theta}{2}\,d\,\Theta = \frac{1-\lambda^2}{8\pi}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\Theta)\,d\,\Theta = \tfrac{1}{4}(1 - \lambda^2)$$

$$= \frac{R}{a}\sin\Theta$$

Analog ergibt sich für W_2

$$W_2 = \frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-(1-\lambda^2)\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cos\Theta\, d\,\Theta$$

19b)

$$= \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\pi}(1-\lambda^2)\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\frac{\Theta}{2}\cos\Theta\, d\,\Theta$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\lambda}{\pi}(1-\lambda^2)\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\Theta\, d\,\Theta$$

$$= \frac{3}{4}\lambda(1-\lambda^2) = 3\frac{R}{a}\sin\Theta$$

und demzufolge

20) $$\Phi_{21} = \frac{2}{\sqrt{a}}\left[c_{20} + c_{21}\frac{3\,R}{a}\sin\Theta + \cdot\cdot\right]$$

Hier ist nun $\sin\Theta$ nach Kugelfunktionen zu entwickeln. Für die Entwickelung von $\sin\Theta$ nach Kugelfunktionen gilt die Formel:[1])

$$\sin\Theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}P_0\cos(\Theta) - 5\binom{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2\cos(\Theta) - 9\binom{3}{6}\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 P_4\cos\Theta + \cdots\right]$$

Wir haben also für Φ_{21}

$$\Phi_{21} = \frac{2}{\sqrt{a}}\left[c_{20} + \frac{3}{4}c_{21}\,\pi\left[\frac{1}{2}P_0\cos(\Theta) - \frac{5}{16}P_2\cos(\Theta) - \frac{27}{384}P_4\cos(O) + \cdots\right]\right]$$

Somit ist, wenn, unseren bisherigen Vernachlässigungen entsprechend, nur Glieder erster Ordnung beibehalten werden

21) $$\Phi_{12} = -\frac{2}{\sqrt{a}}\left[c_{20} + \frac{3}{4}\pi\, c_{21}\frac{R}{a}\right]\frac{R}{r}$$

---

[1]) Z. B. Byerly. An elementary Treatise on Fouriers etc. Series S. 184, Boston 1893.

Bestimmung von Φ_{22}.

Es ist die Potentialfunktion Φ_{22} des Aussenraumes des Ringes zu bestimmen mit den Randwerten

$$\Phi_{22} = -\Phi_{21} \tag{22}$$

am Ringe.

Um Φ_{22} zu bestimmen, haben wir zunächst

$$\Phi_{11} = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots$$

am Ring nach Ringfunktion zu entwickeln.

Nach Neumann gilt:[1])

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\sqrt{1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2} \\ &\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_1)\cos p(\omega - \omega_1)\cos q(\varphi - \varphi_1)\end{aligned} \tag{23}$$

wobei $\omega_1 = \pi$, $\lambda_1 = 1$ zu setzen ist.

Da (nach Neumann S. 34) für $\lambda_1 = 1$ jedes $A_p^0(\lambda_1) = 1$ wird, so ist

$$\frac{1}{r} = 2\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\sum_p C_p^0 J_p^0(\lambda)\cos p(\pi - \omega) \tag{23a}$$

worin (nach Neumann S. 26)

$$C_p^0 = \frac{1}{2a}$$

Φ_{22} ist also zu berechnen als eine Potentialfunktion des Aussenraumes des Ringes mit dem Randwerten.

$$\Phi_{22} = -c_{10}\, 2\sqrt{1 - 2\cos\omega + c^2}\sum_p C_p^0 J_p^0(c)\cos p(\pi - \omega) \tag{24}$$

Wir können hierauf Φ_{22} sofort hinschreiben,

$$\Phi_{22} = -2c_{10}R\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\sum_p C_p^0\frac{J_p^0(c)}{A_p^0(c)}A_p^0(\lambda)\cos p(\pi - \omega) \tag{24a}$$

---

[1]) Neumann, Theorie der Elektrizitäts- etc. Verteilung in einem Ringe; Halle 1864, S. 17 und Gl. 29, S. 26.

Nun ist in erster Annäherung

25) $$J_0^0(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2}} = 1$$

$$J_1^0(c) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta\, d\Theta}{\sqrt{1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2}}$$

26) $$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\Theta\,(1-\lambda e^{i\Theta})^{-\frac{1}{2}}(1-\lambda e^{-i\Theta})^{-\frac{1}{2}}\, d\Theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\Theta\,(1+\lambda\cos\Theta)\, d\Theta$$

$$= \lambda = c$$

Ausserdem ist für den Aussenraum des Ringes immer

$$\frac{A_p^0(\lambda)}{A_p^0(c)} < 1$$

Φ_{22} wird also in der von uns gewünschten Annäherung

27) $$\Phi_{22} = -c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} + c_{10}\frac{R}{a}\frac{c}{2}\cos\omega\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} + \cdots$$

Die Potentialfunktion des Aussenraumes von Kugel und Ring, die an der Kugel die Randwerte

$$\Phi_a = c_{10} + c_{11}\cos\Theta + \cdots$$

und am Ringe die Randwerte

$$\Phi_a = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{\eta}}\,[c_{20}A_0^0(c) + c_{21}A_1^0(c)\cos\omega + \cdots]$$

besitzt, ergibt sich also aus

$$\Phi_a = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \cdots \Phi_{21} + \Phi_{22} + \cdots$$

zu

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots - \frac{2}{\sqrt{a}}\left(c_{20} + \frac{3}{4}\pi c_{21}\frac{R}{a}\right)\frac{R}{r}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,[c_{20}A_0^0(\lambda)+c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega+\cdots]+\cdots$$

$$28)\qquad - c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}$$

$$+ c_{10}\frac{R}{a}c\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\cos\omega\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}+\cdots$$

Bestimmung der Potentialfunktion für den Innenraum von Kugel und Ring.

1. Die Potentialfunktion für den Innenraum der Kugel.

Diese ist bereits gegeben, durch die Untersuchungen von Korn.[1] Sie ist

$$29)\quad \Phi_i = c_{10}\frac{\sin kr}{\sin kR}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{\sin kr - kr\cos kr}{\sin kR - kR\cos kR}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots$$

mit den Randwerten

$$30)\qquad \Phi = c_{10} + c_{11}\cos\Theta + \cdots$$

2. Die Potentialfunktion für den Innenraum des Ringes.

Die Randwerte dieser Funktion sind gegeben durch

$$31)\qquad \Phi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{\eta}}\,[c_{20}A_0^0(c) + c_{21}A_1^0(c)\cos\omega + \cdots]$$

worin wieder

$$A_0^0(c) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},\quad \left(\varkappa^2 = 1-\lambda^2;\ \sin\varphi = \cos\frac{\Theta}{2}\right)$$

Für den Innenraum selbst können wir die Werte benutzen, die in der vorhergehenden Arbeit gefunden wurden.[2] Wir fanden für den Innenraum des Ringes

[1] Korn, loc. cit. S. 149. [2] I. S. 49.

$$\Phi_i = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \sum_p \sum_q C_p^q I_p^q(\lambda) \cos p\,\omega \cos q\,\psi \tag{32}$$

Da alles um die Rotationsachse symmetrisch angeordnet ist, so vereinfacht sich Φ_i zu

$$\Phi_i = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \sum_p C_p^0 I_p^0(\lambda) \cos p\,\omega \tag{33}$$

In etwas anderer Form und unter Anwendung der hier adoptierten Konstantenbezeichnung erhalten wir

$$\Phi_i = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \left[c_{20} \frac{A_0^0(c)}{A_0^0(\lambda)} I_0^0(\lambda) + c_{21} \frac{A_1^0(c)}{A_1^0(\lambda)} I_1^0(\lambda) \cos\omega + \cdots \right] \tag{34}$$

Um die Kräfte kennen zu lernen, die die einzelnen Glieder des Systems aufeinander ausüben, wobei es uns hauptsächlich auf die Kenntnis der Wirkung der Kugel auf den Ring ankommt, ist es nötig, zunächst die $c_{10}, c_{11}, c_{20}, c_{21}$ u. s. w. sowie die Konstante k zu berechnen.

Die Mittel hierzu bieten uns die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$$

an der Kugel,

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$$

am Ringe, wo in beiden Fällen ν die Richtung der inneren oder äusseren Normalen bedeutet.

Berechnung der normalen Ableitungen am Ring.

Es genügt, $\frac{\partial \Phi_{a(i)}}{\partial \lambda}$ zu kennen, da der Faktor, mit dem sowohl $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda}$ wie $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ multipliziert wird, für $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}$ und $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$ derselbe ist, und beim Gleichsetzen der beiden Ableitungen sich heraushebt.

a) Berechnung von $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}$ resp. $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda}$

Der für Φ_a gefundene Ausdruck lautete

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots \frac{2}{\sqrt{a}}\left(c_{20} + \frac{3}{4}\pi c_{21}\frac{R}{a}\right)\frac{R}{r} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,[c_{20}A_0^0(\lambda) + c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega + \cdot\cdot]$$

$$- c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

$$+ c_{10}\frac{R}{r}\frac{c}{2}\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\cos\omega\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

Bevor zur Differenziation nach λ geschritten werden kann, ist r durch λ auszudrücken. Wir fanden (Gl. 23[a]) in erster Annäherung:

$$\frac{1}{r} = 2\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\left[\frac{1}{2a}J_0^0(\lambda) - \frac{1}{2a}J_1^0(\lambda)\cos\omega\right]$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,[1 - \lambda\cos\omega]$$

$$= \frac{1}{a}(1 - 2\lambda\cos\omega)$$

Diesen Wert für $\frac{1}{r}$ in Φ_a eingesetzt, gibt:

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{a}(1 - 2\lambda\cos\omega) + \text{Konst.} + \text{zu vernachl. Glieder}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{a}}c_{20}\frac{R}{a}(1 - 2\lambda\cos\omega) + \cdots$$

$$35) + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,[c_{20}A_0^0(\lambda) + c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega + \cdots]$$

$$- c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

$$+ c_{10}\frac{R}{a}\frac{c}{2}\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\cos\omega$$

Hieraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda} &= -2\,c_{10}\frac{R}{a}\cos\omega - \frac{4}{\sqrt{a}}\,c_{20}\frac{R}{a}\cos\omega \\
&+ \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,(c_{20}A_0^0(\lambda)+c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega+\cdots)\right] \\
\text{36)}\quad & - c_{10}\frac{R}{a}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\right. \\
&\left. - \frac{c}{2}\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\cos\omega\right]
\end{aligned}
$$

Für Φ_i wurde gefunden (Gl. 34)

$$
\begin{aligned}
\Phi_i = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,&\left[c_{20}\frac{A^0(c)}{I_0^0(c)}I_0^0(\lambda)\right. \\
&\left. + c_{21}\frac{A_0^0(c)}{I_1^0(c)}I_1^0(\lambda)\cos\omega+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

Daraus wird $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$

$$
\begin{aligned}
\text{37)}\quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial\lambda}&\left[\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\left(c_{20}\frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}I_0^{0\prime}(\lambda)\right.\right. \\
&\left.\left. + c_{21}\frac{A_0^0(c)}{I_1^0(c)}I_1^{0\prime}(\lambda)\cos\omega+\cdots\right]\right.
\end{aligned}
$$

Nach Ausführung der Differenziationen nach λ, Vernachlässigung von Grössen, die gegen c^2 klein sind, und Gleichsetzung von $\frac{\partial \Phi_a}{\partial\lambda}$ mit $\frac{\partial \Phi_i}{\partial\lambda}$ erhalten wir, wenn nach erfolgter Differenziation $\lambda = c$ gesetzt wird

$$
\begin{aligned}
& -2c_{10}\frac{R}{a}\cos\omega + \frac{1}{\sqrt{a}}(1-c\cos\omega)[c_{20}A_0^{0\prime}(c)+c_{21}A_1^{0\prime}(c)\cos\omega] \\
\text{38)}\quad & - c_{10}\frac{R}{a}(1-c\cos\omega)\left[\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)} + c\,\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_1^0(c)}\cos\omega\right] \\
& = \frac{1}{\sqrt{a}}(1-c\cos\omega)\left[c_{20}\frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}I_0^{0\prime}(c) + c_{21}\frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)}I_1^{0\prime}(c)\cos\omega\right]
\end{aligned}
$$

Indem wir von dieser Entwickelung nur die Glieder nullter Ordnung und solche mit $\cos\omega$ beibehalten, denn alle übrigen Glieder fallen in den Bereich unserer Vernachlässigung, erhalten wir durch Gleichsetzung der Glieder, welche $\cos\omega$ nicht enthalten, die Gleichung

$$39)\quad \begin{aligned} c_{20}\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c)\right] &= c_{10}\,\frac{R}{a}\,\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)} \\ &= -\,c_{10}\,\frac{R}{a}\,\frac{1}{c\,K_c} \end{aligned}$$

(denn $\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)} = -\frac{1}{c\,K_c}$ aus I. Gleichung 40, 41, 44), und durch Gleichsetzung der Glieder mit $\cos\omega$

$$40)\quad \begin{aligned} &c_{21}\left[A_1^{0\prime}(c) - \frac{A_1^0(c)}{I_1^{0\prime}(c)} I_1^{0\prime}(c)\right] \\ &= \left[2\,\frac{R}{\sqrt{a}} + \frac{R}{\sqrt{a}} + \frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)}\,c - c\,\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{A_1^{0\prime}(c)}{A_1^0(c)}\right] = c_{10}\,\frac{R}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

denn wir wissen, daß $\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)} = -\frac{1}{c\,K_c}$; daraus ergibt sich $\frac{R}{a}\,\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)}\,c$ als klein von der Ordnung $\frac{1}{K_c}$, und darf also vernachlässigt werden. Eine weitere Hilfsbetrachtung ergibt, daß $A_1^0(c)$ in erster Annäherung von der Ordnung $\frac{1}{c}$, und $A_1^{0\prime}(c)$ ebenfalls in erster Annäherung von der Ordnung $+\frac{1}{c^2}$ ist, denn es ist

$$41)\quad A_1^0(c) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$42)\quad A_0^{0\prime}(c) = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\frac{\Theta}{2}\,d\Theta}{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 1, die zweite mit $(1-\lambda^2)$ und addieren die beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$A_1^0(c) + (1-\lambda^2)\, A_0^{0\prime}(c) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-(1-\lambda^2)\cos^2\frac{\Theta}{2}\right) d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

43)
$$= \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lambda\, A_0^0(c)$$

Also $A_1^0(c) = \lambda\, A_0^0(c) - (1-\lambda^2)\, A_0^{0\prime}(c)$, woraus, wenn wieder Größen mit c^2 vernachlässigt werden, sich in erster Annäherung

44)
$$A_1^0(c) = \frac{1}{c}$$

und

45)
$$A_1^{0\prime}(c) = -\frac{1}{c^2}$$

ergibt.

Daraus folgt direkt

46)
$$-c\,\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{A_1^0(c)}{A_1^{0\prime}(c)} = -\frac{R}{\sqrt{a}}$$

Die dritte Gleichung zur Berechnung der beiden Konstantenverhältnisse und der Konstante k haben wir mit Hilfe der Differentiationen an der Kugel aufzustellen. Indem wir an der Kugel nur die Glieder berücksichtigen, die in ihrer Wirkung auf den Ring in Betracht kommen, können wir Φ_a so schreiben:

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} + \cdots - \frac{2}{\sqrt{a}}\, c_{20}\frac{R}{r} + \cdots + \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\left[c_{20}\, A_0^0(\lambda) + \cdots\right]$$

Die folgenden Beziehungsgleichungen geben uns λ und η durch r ausgedrückt:

$$\sqrt{1-\lambda^2} = \sqrt{\frac{4\,a\,r\sin\Theta}{a^2+R^2+2\,a\,r\sin\Theta}},\ \sqrt{\eta} = \sqrt{r\sin\Theta}$$

$$\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} = \frac{2\sqrt{a}}{a\left(1+\frac{r}{a}\sin\Theta\right)} = \frac{2}{\sqrt{a}}\left(1-\frac{r}{a}\sin\Theta\right)$$

Differenzieren wir nach r, und setzen wir nach der Differentiation $r = R$, so erhalten wir

$$\text{47)} \qquad \frac{\partial\,\Phi_a}{\partial\,\nu} = -\frac{c_{10}}{R} + \frac{2}{\sqrt{a}}\,c_{20}\,\frac{1}{R}$$

In gleicher Weise erhalten wir für $\frac{\partial\,\Phi_i}{\partial\,\nu}$

$$\text{48)} \qquad \frac{\partial\,\Phi_i}{\partial\,\nu} = -\frac{c_{10}}{R} + c_{10}\,k\operatorname{cotg} k\,R$$

Wir haben also jetzt zur Bestimmung der Konstantenverhältnisse c_{10}/c_{20}, c_{20}/c_{21} und der Konstante k die drei Gleichungen

$$\text{49)} \qquad c_{20}\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}\,I_0^{0\prime}(c)\right] = -\,c_{10}\,\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{c\,K_c} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{49}^{\text{a}}\text{)} \qquad c_{21}\left[A_1^{0\prime}(c) - \frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)}\,I_1^{0\prime}(c)\right] = c_{10}\,\frac{R}{\sqrt{a}} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{49}^{\text{b}}\text{)} \qquad c_{20} = c_{10}\,\frac{k\,R}{2}\,\sqrt{a}\operatorname{cotg} k\,R \qquad \text{(III)}$$

Aus III und I erhalten wir als Bestimmungsgleichung für k

$$\text{49}^{\text{c}}\text{)} \qquad \begin{aligned} k\,\frac{R}{2}\sqrt{a}\operatorname{cotg} k\,R\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}\,I_0^{0\prime}(c)\right] &= -\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{c\,K_c} \\ \frac{k}{2}\operatorname{cotg}(k\,R)\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}\,I_0^{0\prime}(c)\right] &= -\frac{1}{a}\,\frac{1}{c\,K_c} \end{aligned}$$

Aus der rechten Seite geht hervor, daß cotg $(k\,R)$ und die Determinante kleine Größen sind. Zur Berechnung von k setzen wir

50) $$k = k_0 + \varepsilon \qquad \left(\text{wo } k_0 = \frac{\pi}{2R} = \frac{1}{a\,c\sqrt{2K_c}}\right)$$

Dann ist

51) $$\operatorname{cotg}(k_0+\varepsilon)R = -\frac{\varepsilon R}{\sin^2 k_0 R} = -\varepsilon R$$

Andererseits können wir schreiben:

52) $$A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c) = \varepsilon \frac{d}{dk}\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c)\right]$$
$$= -\varepsilon K_c \frac{d}{dk}\left(\frac{I_0^{0\prime}(c)}{I_0^0(c)}\right)$$

Es ist

53) $$\frac{d}{dk}\left(\frac{I_0^{0\prime}(c)}{I_0^0(c)}\right) = \frac{I_0^0(c)\frac{d\,I_0^{0\prime}(c)}{dk} - I_0^{0\prime}(c)\frac{d\,I_0^0(c)}{dk}}{I_0^0(c)^2}$$

Nun ist in erster Annäherung[1])

53a) $$I_0^0(c) = 1 + \frac{1 - 4a^2k^2c^2}{4}, \quad \frac{d\,I_0^0(c)}{dk} = -2a^2kc^2$$

53b) $$I_0^{0\prime}(c) = -2a^2k^2c, \qquad \frac{d\,I_0^{0\prime}(c)}{dk} = -4a^2kc$$

Also wird

53c) $$\frac{d}{dk}\left(\frac{I_0^{0\prime}(c)}{I_0^0(c)}\right) = -4a^2kc$$

und

$$A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c) = 4a^2\varepsilon k c K_c$$

Setzen wir nun in die Gleichung

$$\frac{k}{2}\operatorname{cotg}(kR)\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c)\right] = \frac{1}{a\,c\,K_c}$$

die für die Glieder der linken Seite gefundenen Werte ein, so ergibt sich

[1]) I. S. 55.

54) $$2\,a^2\,k_0^2\,\varepsilon^2\,c^2\,K_c\,R = \frac{1}{a\,K_c}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{2\,R} = \frac{1}{a\,c\sqrt{2\,K_c}}$$

ergibt sich andererseits

$$2\,a^2\,c^2\,K_c = \frac{4\,R^2}{\pi^2}$$

dies eingesetzt in Gleichung (54) gibt

$$k_0^2\,\varepsilon^2\,\frac{4\,R^3}{\pi^2} = \frac{1}{a\,K_c}$$

Nun ist[1])

$$2\,a^2\,k_0^2\,c^2\,K_c = 1,$$

und es wird

$$\varepsilon^2\,R = \frac{1}{a\,K_c}$$

$$\varepsilon^2\,R^2 = \frac{R}{a}\,\frac{1}{K_c}$$

55) $$\varepsilon\,R = \pm\sqrt{\frac{R}{a}\,\frac{1}{K_c}}$$

Wir entscheiden uns hier für das Minuszeichen, denn da wir die Grundschwingung des Systems studieren, so ist es der kleinste Wert von k, den wir suchen. Wir erhalten

56) $$(k_0 + \varepsilon)\,R = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{a\,K_c}}$$

Für c_{20} hatten wir gefunden

$$c_{20} = c_{10}\,\frac{k\,R}{2}\sqrt{a}\,\mathrm{cotg}\,(k\,R)$$

---

1) I. S. 54.

Setzen wir die für $(k\,R)$ resp. $\operatorname{cotg}(k\,R)$ als Funktion von $(k_0 + \varepsilon)\,R$ gefundenen Werte ein, so finden wir

57) $$c_{20} = c_{10}\,\frac{\pi}{4}\,\sqrt{R}\,\frac{1}{\sqrt{K_c}}$$

Das Verhältnis c_{21}/c_{10} gab uns die Gleichung

$$c_{21}\left[A_1^{0\prime}(c) - \frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)}\,I_1^{0\prime}(c)\right] = c_{10}\,\frac{R}{\sqrt{a}}$$

Nun ist in erster Annäherung

$$A_1^0(c) = -\frac{1}{c} \qquad A_1^{0\prime}(c) = \frac{1}{c^2}$$

$$I_1^0(c) = c \qquad I_1^{0\prime}(c) = 1$$

somit

58) $$c_{21} = c_{10}\,\frac{c^2}{2}\,\frac{R}{\sqrt{a}}$$

Wir können nun für Außenraum und Innenraum von Kugel und Ring die Potentialfunktion so aufstellen, daß dieselbe nur noch die eine willkürliche Konstante c_{10} enthält. Wir erhalten so für den Außenraum von Kugel und Ring die Formel:

59) $$\begin{aligned}\Phi_a = \Bigg[&\frac{R}{r} + \frac{\pi}{4\sqrt{a}}\sqrt{1 - 2\,\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sqrt{\frac{R}{K_c}}\,A_0^0(\lambda)\\ &+ \frac{c^2}{2}\,\frac{R}{\sqrt{a}}\,A_1^0(\lambda)\cos\omega - \frac{R}{a}\,\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1 - 2\,\lambda\cos\omega + \lambda^2}\\ &+ \frac{R}{a}\,\frac{c}{2}\,\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\sqrt{1 - 2\,\lambda\cos\omega + \lambda^2}\cos\omega\Bigg]\,c_{10}\end{aligned}$$

und für den Innenraum des Ringes

60) $$\begin{aligned}\Phi_i = \frac{c_{10}}{\sqrt{a}}\sqrt{1 - 2\,\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\Bigg[&\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{K_c}}\,\frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}\,I_0^0(\lambda)\\ &+ \frac{c^2}{2}\,\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)}\,I_1^0(\lambda)\cos\omega\Bigg]\end{aligned}$$

Das Potential von Kugel und Ring in Bezug auf einen weit entfernten Punkt ist in erster Annäherung gegeben durch

$$\Phi = c_{10}\left[\frac{R}{r} - \frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\right] \tag{61}$$

und, wenn μ die Raumdichte von Kugel bezw. Ring bezeichnet

$$= \int\limits_{\tau\ \text{(Kugel und Ring)}} \mu \frac{d\tau}{r}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau} \Delta\Phi \frac{d\tau}{r}$$

$$= +\frac{k^2}{4\pi}\int \Phi_i \frac{d\tau}{r}$$

Die scheinbare Masse der Kugel ist $\int \mu\, d\tau = c_{10} R$

Die Masse des Ringes erhält man, da in erster Annäherung

$$\Phi_i = \frac{c_{10}}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{K_c}}K_c$$

durch

$$\frac{k^2}{4\pi}\int\limits_{\tau\ \text{(Ring)}} \Phi_i\, d\tau = \frac{k^2}{4\pi}\frac{c_{10}}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{K_c}}\, 2\pi a\, 4\pi^2 a^2 c^2 = c_{10}\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{a R}{K_c}} \tag{62}$$

d. h. damit Einheitskugel und Einheitsring (R von der Ordnung $\lambda = c$) synchron schwingen, muß sich die Masse des Ringes zur Masse der Kugel verhalten wie $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sqrt{K_c}\sqrt{\frac{a}{R}} : 1$, d. h. die Masse des Einheitsringes muß sehr groß sein im Verhältnis zur Masse der Einheitskugel.

Befindet sich an Stelle der Einheitskugel mit dem Radius R eine große Kugel mit dem Radius R_n, die wir uns als aus einer sehr großen Anzahl Einheitskugeln bestehend denken, so bleiben die Endformeln für die Potentialfunktionen unverändert, nur ist überall an Stelle von R der Radius der großen Kugel R_n zu setzen. Die Bedingung für die Erzielung von Resonanz zwischen Kugel und Ring ergibt dann für das Verhältnis von Ringmasse zu Kugelmasse $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sqrt{K_c} \sqrt{\frac{a}{R_n}} : 1$ Die Konstante k bleibt jedoch unverändert. Da um die Achse des Systems vollständige Symmetrie herrscht, ist ohne weiteres klar, daß die auf Kugel resp. Ring ausgeübten Kraftkomponenten[1])

$$X = \frac{1}{4} \mu k^2 \int\limits_{\text{Oberfläche von Kugel (Ring)}} \Phi^2 \cos(n\, x)\; d\, \omega$$

$$Y = \frac{1}{4} \mu k^2 \int \Phi^2 \cos n\, y\, d\, \omega$$

$$Z = \frac{1}{4} \mu k^2 \int \Phi^2 \cos n\, z\, d\, \omega$$

sämtlich gleich Null sind. Dies wird jedoch nicht mehr der Fall sein, sobald der Kugelmittelpunkt nicht mehr mit dem Ringmittelpunkt, d. h. dem Mittelpunkt des Polarkreises zusammenfällt.

b) Kugel und Ring sind nicht konzentrisch.

Die Grundgleichungen, von denen wir hier ausgehen, sind die nämlichen, als im eben behandelten Falle. Es gelten wieder die Gleichungen (1)

$$\Delta\, \Phi = 0$$

im Außenraum von Kugel und Ring, und die Gleichungen (2)

$$\Delta\, \Phi + k^2\, \Phi = 0$$

$$\Delta\, \Phi + \frac{k^2\, a^2}{\eta^2}\, \Phi = 0$$

für den Innenraum von Ring und Kugel. Es gelten des weiteren die nämlichen Grenzbedingungen, und die Gleichungen, welche die Resonnanz der Schwingungen von Kugel und Ring ausdrücken. Ein wesentlicher Unterschied gegen

[1]) Korn, loc. cit. S. 139.

den vorigen Fall liegt jedoch darin, daß die symmetrische Anordnung, die uns von φ unanhängig machte, nicht mehr vorhanden ist. Wir dürfen daher auch q nicht mehr gleich Null setzen, sondern wir haben jetzt stets über q zu summieren. Dem werden wir sofort bei der Aufstellung der Randwerte, wie sie die Formulierung des Murphyschen Problems bedingt, Ausdruck geben. Es gelten wieder an der Kugel die Werte

$$\Phi_{11} = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots \tag{63}$$

wo r die Zentraldistanz des variablen Punktes $(x\,y\,z)$ darstellt.

Am Ring haben wir aber diesmal zu schreiben

$$\begin{aligned}\Phi_{21} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\Big[&\sum_0^\infty {}^q\, c_{20}^q A_0^q(\lambda)\cos(q\,\varphi)\\ &+ \sum_0^\infty {}^q\,(c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)\,A_1^q(\lambda)\cos q\,\varphi + \cdots\Big]\end{aligned} \tag{64}$$

Das in dieser Gleichung rechts auftretende Glied $(c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)$ entstammt der Entwicklung von $\cos(\omega - \omega_0)$ (ω_0 die ω Koordinate des Kugelzentrums), wobei $\cos\omega_0$ und $\sin\omega_0$ in die neuen Konstanten c_{21}^q resp. C_{21}^q einbezogen wurden. Da es uns in erster Linie auf die Wirkung der Kugel auf den Ring ankommt, so wollen wir zunächst die Murphysche Methode auf die Reflexionen der Kugelpulsation am Ring anwenden.

Es ist die Potentialfunktion Φ_{22} des Außenraumes des Ringes zu bestimmen mit den Randwerten (siehe S. 4)

$$\Phi_{22} = -\,\Phi_{11} \text{ am Ring.}$$

Unter Benutzung der Neumannschen Formel (Gleichung 23)

$$\frac{1}{r} = \sqrt{1 - 2\,\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sqrt{1 - 2\,\lambda_1\cos\omega_1\,r\,\lambda_1^2}$$

$$\sum_p\sum_q C_p^q\, I_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_1)\cos p\,(\omega - \omega_1)\cos q\,(\varphi - \varphi_1)$$

erhalten wir jetzt für Φ_{22} die Randwerte

$$\Phi_{22} = -c_{10} R \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_1+\lambda_0^2}$$

65)
$$\sum_p \sum_q C_p^q I_p^q(c) A_p^q(\lambda_0) \cos p(\omega-\omega_0)\cos q\varphi$$

und für Φ_{22}

$$\Phi_{22} = -c_{10} R \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}$$

66)
$$\sum_p \sum_q C_p^q \frac{I_p^q(c)}{A_p^q(c)} A_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_0)\cos p(\omega-\omega_0)\cos q\varphi$$

wenn wir die Ringkoordinaten des Kugelzentrums mit dem Index 0 versehen, und die Ebene $\varphi = 0$ durch das Kugelzentrum legen. Es handelt sich jetzt darum, in diesem Ausdruck die $I_p^q(c)$ sowie die $A_p^q(c)$, $A_p^q(\lambda)$ und $A_p^q(\lambda_0)$ zu berechnen.

Aus den Gleichungen (25) und (26) ergibt sich:

$$I_0^0(c) = 1$$
$$I_1^0(c) = c$$

Für $I_0^1(c)$ ergibt sich nach Neumann[1])

$$I_0^1(c) = \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\lambda e^{i\Theta})(1-\lambda e^{-i\Theta})^{-\frac{3}{2}}\,d\Theta$$

67)
$$= \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{3}{2}\lambda e^{i\Theta}+\frac{15}{4}\lambda^2 e^{2i\Theta}+\cdots\right)\left(1+\frac{3}{2}\lambda e^{-i\Theta}+\frac{15}{4}\lambda^2 e^{-2i\Theta}+\cdots\right)d\Theta$$

$$= \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+3\lambda\cos\Theta+\frac{9}{4}\lambda^2+\cdots\right)d\Theta$$

$= 1$ in erster Annäherung.

Man ersieht leicht, daß in erster Annäherung für alle $I_0^q(c)$ gilt:

68)
$$I_0^q(c) = 1$$

---

1) Neumann, loc. cit. Gl. 44, S. 32.

Es ist ferner

$$I_1^1(c) = \frac{1-\lambda^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\Theta\, d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Setzen wir unter den Integralzeichen für den Ausdruck im Nenner die obige Entwicklung ein, so erhalten wir

$$I_1^1(c) = \frac{1-\lambda^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\Theta \left(1+3\lambda\cos\Theta+\frac{9}{4}\lambda^2+\cdots\right) d\Theta$$

$= 3\,c$ in erster Annäherung.

Daraus folgt in analoger Weise für die $I_1^q(c)$

69) $$I_1^q(c) = (2q+1)\,c$$

Es genügt für unsere Zwecke, wenn wir in dem Ausdruck für Φ_{22} nur die $I_0^q(c)$ und die $I_1^q(c)$ beibehalten.

Berücksichtigen wir, daß

69^a) $$C_0^q = \frac{1}{2a}$$

und

$$C_1^q = \frac{1}{(2q+1)\,2a}$$

ist, so können wir Φ_{22} wie folgt schreiben:

$$\Phi_{22} = -c_{10}\,R\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}$$

$$\sum_0^\infty {}^q\left[\frac{1}{2a}\,\frac{A_0^q(\lambda_0)}{A_0^q(c)}\,A_0^q(\lambda)\cos q\varphi + \frac{c}{2a}\,\frac{A_1^q(\lambda_0)}{A_1^q(c)}\,A_1^q(\lambda)\cos(\omega-\omega_0)\cos q\varphi\right]$$

Es sind nun die elliptischen Integrale zu berechnen, welche die $A_p^q(\lambda)$ darstellen. Wir werden auch hier wieder, ähnlich wie Gl. 43 oben, versuchen, Rekursionsformeln für diese Größen zu gewinnen, um daraus die Größenordnungen dieser Integrale festzustellen. Differenzieren wir z. B. auch hier $A_p^q(\lambda)$ nach λ, so erhalten wir

70)
$$A_p^{q'}(\lambda) = \frac{p\,\lambda^{p-1}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos q\,\Theta\, d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda^p}{\pi} \int\limits_0^{\pi 2} \frac{\lambda \cos q\,\Theta \cos^2\frac{\Theta}{2}\,(-2p+1)\, d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}, \quad (q = 1,2\cdots)$$

Setzen wir im Zähler des zweiten Integrals der rechten Seite für $\cos^2\frac{\Theta}{2}$ den identischen Faktor $\frac{1+\cos\Theta}{2}$, so erscheint darin das Produkt $\cos q\,\Theta\,(1+\cos\Theta)$, das dargestellt werden kann durch

$$\cos q\Theta + \cos q\Theta \cos\Theta = \cos q\Theta + \frac{1}{2}\cos(q+1)\,\Theta + \frac{1}{2}\cos(q-1)\,\Theta$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks läßt sich das zweite Integral folgendermassen schreiben:

$$\frac{\lambda^p}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\lambda \cos q\,\Theta \cos^2\frac{\Theta}{2}\,(-2p+1)\, d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

$$= -\frac{2p+1}{2}\,\frac{\lambda^{p+1}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos q\Theta\, d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

$$-\frac{2p+1}{4}\,\frac{\lambda^{p+1}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(q+1)\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

$$-\frac{2p+1}{4}\,\frac{\lambda^{p+1}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(q-1)\,\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

Die 3 Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung sind aber nichts anderes als $A^q_{p+1}(\lambda)$, $A^{q+1}_{p+1}(\lambda)$ und $A^{q-1}_{p+1}(\lambda)$, jedes multipliziert mit dem Faktor $\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}$. Setzen wir weiter das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (70)

$$\frac{p\lambda^{p-1}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos q\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}=\frac{p}{\lambda}A^q_p(\lambda)$$

so erhalten wir:

$$71)\quad A^{q\prime}_p(\lambda)=\frac{p}{\lambda}A^q_p(\lambda)-\frac{2p+1}{2}A^q_{p+1}(\lambda)-\frac{2p+1}{4}A^{q+1}_{p+1}(\lambda)-\frac{2p+1}{4}A^{q-1}_{p+1}(\lambda)$$

Die allgemeine Rekursionsformel, wie sie uns in (71) vorliegt, gestattet die Berechnung der $A^{q+1}_{p+1}(\lambda)$ aus den $A^q_p(\lambda)$; jedoch gibt sie uns über die Frage, die wievielte Potenz von $\frac{1}{c}$ $A^q_p(\lambda)$ ist, d. h. über die Art, wie die $A^q_p(\lambda)$ unendlich werden, noch keinen Aufschluß. Versuchen wir daher nochmals einen Weg, wie wir ihn bei Gleichung (41) und ff. begangen haben.

Es sei

$$A^q_p(\lambda)=\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

und

$$A^{q\prime}_p(\lambda)=\frac{p}{\lambda}A^q_p(\lambda)-(2p+1)\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\cos^2\frac{\Theta}{2}\,d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

Die erste Gleichung mit $(2p+1)$, die zweite mit $(1-\lambda^2)$ multipliziert, und die beiden Gleichungen addiert, gibt:

$$2p+1)\,A_{p+1}^{q}(\lambda)+(1-\lambda^2)A_p^{q\prime}(\lambda)=\frac{p(1-\lambda^2)}{\lambda}A_p^q(\lambda)+(2p+1)\lambda\,A_p^q(\lambda)\,.$$

$$=\left(\frac{p}{\lambda}+\lambda(2p+1)\right)A_p^q(\lambda)$$

(bei Vernachlässigung der Glieder mit λ^2 auf der rechten Seite).

Aus (72) folgt direkt:

$$73)\quad A_{p+1}^q(\lambda)=\left[\frac{p}{\lambda}+\lambda(2p+1)\right]\frac{A_p^q(\lambda)}{2p+1}-\frac{1}{2p+1}(1-\lambda^2)\,A_p^{q\prime}(\lambda)$$

Für $p=0$ ergibt sich hieraus

$$73^{a})\qquad A_1^q(\lambda)=\lambda\,A_0^q(\lambda)-(1-\lambda^2)\,A_0^{q\prime}(\lambda)$$

ein Resultat, das identisch ist mit dem in Gleichung (43) oben gewonnenen. Zur Herleitung der $A_p^{q+1}(\lambda)$ aus den $A_p^q(\lambda)$ verfahren wir in gleicher Weise:

Bekanntlich ist

$$74)\qquad A_0^q(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\,d\Theta}{\left(\sin^2\dfrac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\dfrac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$A_0^{q+1}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(q+1)\,d\Theta}{\left(\sin^2\dfrac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\dfrac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\text{da}\ \cos(q+1)\,\Theta=2\cos q\,\Theta\cos\Theta-\cos(q-1)\,\Theta$$

$$75)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\cos q\Theta\left(2\cos^2\dfrac{\Theta}{2}-1\right)}{\left(\sin^2\dfrac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\dfrac{\Theta}{2}\right)}\,d\Theta-A_0^{q-1}(\lambda)$$

Multiplizieren wir (74) mit 4, (75) mit $-(1-\lambda^2)$ und addieren, so erhalten wir:

$$4\,A_0^q(\lambda) - (1-\lambda^2)\,A_0^{q+1}(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\cos q\,\Theta\,d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[2-(1-\lambda^2)\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)\right]+(1-\lambda^2)\,A_0^{q-1}\,A_0^q$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\cos q\,\Theta\,d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)+1-\lambda^2\right]+(1-\lambda^2)\,A_0^{q-1}$$

$$= 2A_0^q(\lambda)-2\lambda^2A_0^q(\lambda)+(1-\lambda^2)A_0^{q-1}(\lambda)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}4\cos q\,\Theta\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d\,\Theta$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned}A_0^{q+1}(\lambda) &= \frac{2\,(1+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)}\,A_0^q(\lambda) - A_0^{q-1}(\lambda)\\ &-\frac{1}{1-\lambda^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}4\cos q\,\Theta\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d\,\Theta\end{aligned} \tag{76}$$

Die Gleichung (76) lehrt uns, wie man die $A_0^{q+1}(\lambda)$ aus den $A_0^q(\lambda)$, $A_0^{q-1}(\lambda)$ und einem elliptischen Integrale zweiter Art von der Form der Jacobischen E Integrale berechnen kann.

Der Fall $q=0$ und der Fall $q=1$ bedarf einer besonderen Betrachtung:

$$A_0^0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$A_0^1(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2, die zweite mit $-\frac{(1-\lambda^2)}{2}$ und addieren. Die Summe ist:

$$2\, A_0^0(\lambda) - \frac{1-\lambda^2}{2}\, A_0^1(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left[2-(1-\lambda^2)\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)\right]}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\, d\Theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)+1-\lambda^2}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{2}}$$

$$= (1-\lambda^2)\, A_0^0(\lambda) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\Theta$$

und

$$77)\quad A_0^1(\lambda) = 2\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\, A_0^0(\lambda) - \frac{2}{(1-\lambda^2)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\,\Theta$$

In dem Ausdruck für Φ_{22} ist eine Summe der Form

$$\sum_0^\infty {}^q \left[\frac{1}{2\,a}\,\frac{A_0^q(\lambda_0)}{A_0^q(c)}\, A_0^q(\lambda)\cos q\varphi + \frac{c}{4\,a}\,\frac{A_1^q(\lambda_0)}{A_1^q(c)}\, A_1^q(\lambda)\cos(\omega-\omega_0)\cos q\varphi\right]$$

enthalten. Die darin vorkommenden $A_0^q(\lambda_0)$ und $A_1^q(\lambda_0)$ sind bestimmte Konstanten, die man erhält, indem man in der allgemeinen Formel

$$A_p^q(\lambda) = \frac{\lambda^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}} \qquad q=0$$

$$+ \frac{\lambda^p}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos q\,\Theta\, d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}} \qquad q=1,2\ldots$$

für p die Werte 0 resp. 1, für λ seinen Wert im Kugelmittelpunkt setzt. Wichtig für die Auswertung der Summe ist noch die Kenntnis der Werte der Verhältnisse $\frac{A_1^q(\lambda)}{A_1^q(c)}$ und $\frac{A_0^q(\lambda)}{A_0^q(c)}$.

Wir wissen, daß $A_0^q(\lambda)$ unendlich wird wie $(-\log\lambda)$ und ebenso $A_0^q(c)$ unendlich wird wie $(-\log c)$.

Daraus schließen wir, daß

78) $$\frac{A_0^q(\lambda)}{A_0^q(c)} = \frac{\log\lambda}{\log c}$$

Andererseits entnehmen wir aus Gleichung (73[a]), daß $A_1^q(\lambda)$ und $A_1^q(c)$ unendlich werden wie $-A_0^{q\prime}(\lambda)$ resp. $-A_0^q\ (c)$, d. h. wie $\frac{1}{\lambda}$ resp. wie $\frac{1}{c}$.

Für das Verhältnis erhalten wir also die Gleichung

79) $$\frac{A_1^q(\lambda)}{A_1^q(c)} = \frac{c}{\lambda}$$

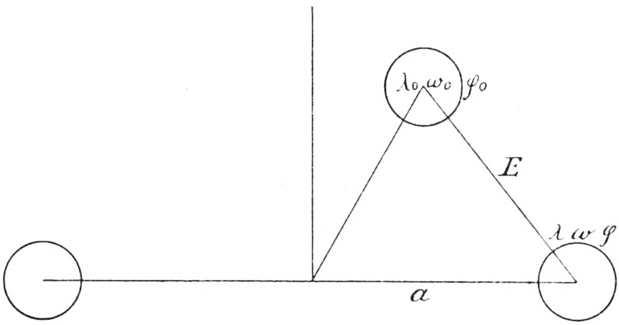
Den Ausdruck für Φ_{22} i. e. für die erste Reflexion der Kugelschwingung am Ringe können wir jetzt in folgender Form schreiben:

80) $$\begin{aligned}\Phi_{22} = &- c_{10}\frac{1}{2a}R(1-c\cos\omega)\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,\frac{\log\lambda}{\log c}\\ &\sum_0^\infty A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi\\ &- c_{10}\frac{c}{\lambda}\frac{c}{2a}(1-c\cos\omega)\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\\ &\sum_0^\infty q\,A_1^q(\lambda_0)\cos(\omega-\omega_0)\cos q\varphi\end{aligned}$$

Die Werte der beiden Summen lassen sich mit Hilfe von Formeln, die von Neumann loc. cit. entwickelt sind, angeben: Betrachten wir zunächst die Summe $\sum_0^\infty q\,A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi$.

Die reziproke Entfernung $\frac{1}{E}$ des Kugelmittelpunktes vom Polarkreis des Ringes stellt sich nach Neumann[1]) dar durch

$$\frac{1}{E} = \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_2^0}\, \frac{1}{\sqrt{2a^2}\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$



Ferner ist[2])

$$\frac{1}{E} = \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}\, \sum_0^\infty {}^q \frac{1}{2a} A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich also

81) $$\sum_0^\infty {}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

Zur Berechnung von $\sum_0^\infty {}^q A_1^q(\lambda_0)\cos(\omega - \omega_0)\cos q\varphi$ wird uns der Ausdruck für die reziproke Entfernung, wie ihn Neumann Gleichung (28) und (29) S. 26 gibt, nützlich sein.

Die beiden Gleichungen lauten in unserer Bezeichnungsweise

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_0^2) - 4\lambda\lambda_0\cos(\omega - \omega_0) - (1 - \lambda^2)(1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

und

[1]) Neumann, loc. cit. Gl. 6, S. 17.

[2]) ibid. Gl. 10, S. 20.

$$\mathfrak{T} = \sum_0^\infty {}^p \sum_0^\infty {}^q\, C_p^q J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_0) \cos p\,(\omega - \omega_0) \cos q\,\varphi$$

Die $J_p^q(\lambda)$ der zweiten Gleichung hängen nur von den λ des ersten Ausdruckes, die $A_p^q(\lambda_0)$ nur von den λ_0 ab. Bilden wir nun $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}$ für $\lambda = 0$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}_{\lambda=0} = \frac{1}{2\,a^2} \frac{2\,\lambda_0 \cos(\omega - \omega_0)}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

$$= \sum_0^\infty {}^p \sum_0^\infty {}^q\, C_p^q (J_p^{q\prime}(\lambda))_{\lambda=0}\, A_p^q(\lambda_0) \cos p\,(\omega - \omega_0) \cos q\,\varphi$$

Nun ist für $p = 1$ nach Gleichung (69) und (69[a])

$$C_1^q = \frac{1}{2\,a} \cdot \frac{1}{2\,q + 1}$$

$$(J_1^{q\prime}(\lambda))_{\lambda=0} = 2\,q + 1$$

Dies eingesetzt gibt

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{1}{2\,a} \sum_0^\infty {}^q\, A_1^q(\lambda_0) \cos(\omega - \omega_0) \cos q\,\varphi$$

Es ist ferner

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \cos(\omega - \omega_0)\, d(\omega - \omega_0) = \frac{2\,\lambda_0}{\sqrt{2\,a^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\omega - \omega_0)\, d(\omega - \omega_0)}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\pi}{2\,a} \sum_0^\infty {}^q\, A_1^q(\lambda_0) \cos q\,\varphi$$

und

$$\frac{2\,\lambda_0}{\sqrt{2\,a^2}} \frac{1}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\,a} \sum_0^\infty {}^q\, A_1^q(\lambda_0) \cos q\,\varphi$$

so daß schließlich

82) $$\sum_0^\infty {}^q\, A_1^q(\lambda_0) \cos q\,\varphi = \frac{2\sqrt{2}\,\lambda_0}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda^2)\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Φ_{22} läßt sich also jetzt in folgender geschlossener Form darstellen:

$$\Phi_{22} = -\frac{c_{10} R}{2a}(1 - c\cos\omega)\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{\log\lambda}{\log c}\,\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})}$$

83)
$$-c_{10}\frac{c^2}{2a\lambda}(1 - c\cos\omega)\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\cos(\omega - \omega_0)}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

Wir haben nun die nötigen Daten, um nach der Formel

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \cdots \Phi_{21} + \Phi_{22} + \cdots$$

die Potentialfunktion für den Außenraum des Systems Kugel-Ring, in der Nähe des Ringes, hinschreiben zu können.

Wir erhalten für Φ_a

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} - c_{20}\frac{\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\frac{R}{r} + \cdots$$

$$+ \frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{\sqrt{a}}\Bigg[\sum_0^\infty{}^q c_{20}^q A_0^q(\lambda)\cos q\varphi$$

$$+ \sum_0^\infty{}^q (c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)A_1^q(\lambda)\cos q\varphi\Bigg]$$

84)
$$-c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{\log\lambda}{\log c}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

$$-c_{10}\frac{c^2}{2a\lambda}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,\lambda_0\cos(\omega - \omega_0)}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

Da wir uns, um die Konstantenverhältnisse, sowie um die Größe k zu bestimmen, der Relationen

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu_{(\lambda)}} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu_{(\lambda)}}$$

zu bedienen haben, haben wir zunächst die Potentialfunktionen für den Innenraum von Kugel und Ring aufzustellen.

Für die Kugel gilt wieder[1])

$$85)\quad \Phi_i = c_{10} \frac{\sin k r}{\sin k R} \frac{R}{r} + c_{11} \frac{\sin k r - k r \cos k r}{\sin k R - k R \cos k R} \frac{R^2}{r^2} \cos \Theta + \cdots$$

mit den Randwerten

$$\Phi = c_{10} + c_{11} \cos \Theta + \cdots$$

Für den Innenraum des Ringes, wo Φ den Randwert hat

$$\Phi = \frac{\sqrt{1 - 2 c \cos \omega + c^2}}{\sqrt{a}} \left[\sum_0^\infty {}^q \, c_{20}^q \cos (q \varphi) \log c \right.$$
$$\left. - \sum_0^\infty {}^q \, (c_{21}^q \cos \omega + C_{21}^q \sin \omega) \cos q \varphi \frac{1}{c} + \cdots \right]$$

gilt[2])

$$\Phi_i = \frac{\sqrt{1 - 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2}}{\sqrt{a}} \left[\sum_0^\infty {}^q \, c_{20}^q \cos q \varphi \frac{A_0^q (c)}{I_0^q (c)} I_0^q (\lambda) \right.$$
$$\left. + \sum_0^\infty {}^q (c_{21}^q \cos \omega + C_{21}^q \sin \omega) \cos q \varphi \frac{A_1^q}{I_1^q (c)} I_1^q (\lambda) + \cdot \right]$$

Für die $I_p^q (\lambda)$ resp. $I_p^q (c)$ hatten wir gefunden

---

[1]) I. S. 49, Gl. 30.

[2]) Neumann, loc. cit. Gl. 44, S. 32.

$$I_p^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}} \quad {\scriptstyle p=0}$$

$$+ \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos p\,\Theta\, d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}} \quad {\scriptstyle p=1,2\ldots}$$

Also ist

$$I_0^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}}$$

$$= 1 + \lambda^2 \frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4} \text{ [1])}$$

und

$$I_1^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\Theta\, d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}}$$

$$= \lambda\left(2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1\right)$$

Entsprechendes gilt natürlich auch von $I_0^q(c)$ und $I_1^q(c)$, so daß die Beziehungen gelten

$$\frac{I_0^q(\lambda)}{I_0^q(c)} = \frac{1+\lambda^2\frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}}{1+c^2\frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}}$$

$$\frac{I_1^q(\lambda)}{I_1^q(c)} = \frac{\lambda}{c}$$

[1]) Hier muß λ^2 beibehalten werden, weil bei der Differentiation nach λ die Konstante fortfällt, und das Glied mit λ das Hauptglied wird; vgl. I. S. 55.

so daß man für Φ_i des Innenraums des Ringes die Gleichung hat:

$$\Phi_i = -\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}$$

86) $$\left[\sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q (c_{20}^q \cos q\varphi \log c \frac{1+\lambda^2 \frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}}{1+c^2\frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}} - \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q (c_{21}^q \cos\omega + C_{21}^q \sin\omega)\cos q\varphi \frac{\lambda}{c^2}\right]^{1)}$$

Bestimmung der normalen Ableitungen am Ring.

Auch in diesem Falle genügt es, um $\frac{\partial \Phi_{a(i)}}{\partial \nu}$ kennen zu lernen, aus demselben Grunde, wie S. 11, die Differentiation nach λ auszuführen.

Wir fanden für Φ_a (Gl. 84):

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} - c_{20}^q \frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{\sqrt{a}} A_0^0(\lambda_0)\frac{R}{r} + \cdots\cdot$$

$$+\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}\left[\sum_0^\infty {}^q c_{20}^q A_0^q(\lambda)\cos q\varphi\right.$$

$$\left.+\sum_0^\infty {}^q (c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega) A_1^q(\lambda)\cos q\varphi\right]$$

$$-c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}$$

$$\frac{\log\lambda}{\log c}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

$$-c_{10}\frac{c^2}{2a\lambda}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,\lambda_0\cos(\omega-\omega_0)}{(\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

---

1) $\varepsilon_q = 1$ für $q = 0$
$\varepsilon_q = 2$ für $q = 1, 2, 3, \ldots.$

Vor der Differentiation ist r durch λ auszudrücken. Führen wir dies gemäß den Gleichungen (23) und (23ª) aus, setzen weiter für $A_0^q(\lambda_0)$ und $A_1^q(\lambda_0)$ die gefundenen Werte ein, und ordnen in einer für die Differentiation etwas bequemeren Weise, so erhalten wir (für Φ_a in der Nähe des Ringes)

$$\Phi_a = -\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}\left[\log\lambda\sum_0^\infty{}^q\,\varepsilon_q\,c_{20}^q\cos q\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda}\sum_0^\infty{}^q\,\varepsilon_q\,(c_{21}^q\cos\omega+C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi\right]$$

$$+c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

$$\left[\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}-(1-c\cos\omega)\frac{\log\lambda}{\log c}\right]$$

$$+c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,\frac{2\sqrt{2}\lambda_0\cos(\omega-\omega_0)}{\left(\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}\right)^3}$$

$$\left[\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,\lambda-\frac{c^2}{\lambda}(1-c\cos\omega)\right]$$ [1)]

Hieraus ergibt sich für $\frac{\partial\Phi_a}{\partial\lambda}$ unter Berücksichtigung des Umstandes, daß nach der Differentiation $\lambda = c$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial\Phi_a}{\partial\lambda} = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}\right)\left[\log c\sum_0^\infty{}_q\,\varepsilon_q\,c_{20}^q\cos q\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c}\sum_0^\infty{}^q\,\varepsilon_q\,(c_{21}^q\cos\omega+C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi\right]$$

87)

$$-\frac{\sqrt{1-2c\cos\omega+c^2}}{\sqrt{a}}\left[\frac{1}{c}\sum_0^\infty{}^q\,\varepsilon_q\,c_{20}^q\cos q\varphi\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c^2}\sum_0^\infty{}^q\,\varepsilon_q\,(c_{21}^q\cos\omega+C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi\right]$$

---

1) $\varepsilon_q = 1$ für $q = 0$
$\varepsilon_q = 2$ für $q = 1, 2, 3\ldots$

$$+ c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

$$\left[- \frac{1}{c \log c} - \cos\omega \left(1 - \frac{1}{\log c}\right)\right]$$

$$+ c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \frac{4\sqrt{2}\,\lambda_0 \cos(\omega - \omega_0)}{\left(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}\right)^3}$$

Die Gleichung für $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ lautet:

88)
$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} = - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\left[\log c \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi \frac{1 + \lambda^2 \frac{4(q^2 - a^2 k^2) + 1}{4}}{1 + c^2 \frac{4(q^2 - a^2 k^2) + 1}{4}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{c} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q (c_{21}^q \cos\omega + C_{21}^q \sin\omega) \cos q\varphi\right]$$

$$- \frac{\sqrt{1 - 2c\cos\omega + c^2}}{\sqrt{a}} \left[- \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi \log c\, 2a^2 c k^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q (c_{21}^q \cos\omega + C_{21}^q \sin\omega) \cos q\varphi\right]$$

Hinsichtlich des im zweiten Gliede der rechten Seite auftretenden Faktors $- 2a^2 k^2$ ist zu bemerken, daß sich für den Differentialquotient nach λ von

$$\frac{1 + \lambda^2 \frac{4(q^2 - a^2 k^2) + 1}{4}}{1 + c^2 \frac{4(q^2 - a^2 k^2) + 1}{4}}$$

eigentlich ergibt

$$\frac{4(q^2 - a^2 k^2) + 1}{2}$$

daß es jedoch gestattet ist, die Größe q^2 zu vernachlässigen, so lange es sich um kleine q handelt. Denn setzen wir auch hier

$$k = k_0 + \varepsilon \text{ (wo } \varepsilon \text{ eine kleine Größe)}$$

so ist

$$a^2 k^2 = a^2 k_0^0 + 2 a^2 k_0 \varepsilon$$

(indem Glieder mit ε^2 vernachlässigt werden), groß gegen q^2, denn es ist erstens

$$a^2 k_0^2 \text{ groß von der Ordnung } \frac{1}{2 c^2 K_c}$$

und

$$2 a^2 k_0 \varepsilon \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{2 a^2}{a c \sqrt{2 K_c}} \quad \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{a K_c R}}$$

$$2 a^2 k_0 \varepsilon \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{2\sqrt{a}}{c K_c \sqrt{2 R}}$$

Wir haben jetzt die beiden Differentialquotienten einander gleichzusetzen, und bemerken zunächst, daß das erste Glied auf der rechten Seite in $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda}$ dem ersten Gliede der rechten Seite in $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ gleich ist. Wir erhalten demnach:

$$-\frac{\sqrt{1 - 2 c \cos \omega + c^2}}{\sqrt{a}} \left[\frac{1}{c} \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q \varphi \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2} \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q (c_{21}^q \cos \omega + C_{21}^q \sin \omega) \cos q \varphi \right]$$

$$89) \quad + c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2} \sum_0^\infty{}^q A_0^q (\lambda_0) \cos q \varphi$$

$$\left[-\frac{1}{c \log c} - \cos \omega \left(1 - \frac{1}{\log c}\right)\right]$$

$$+ c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2} \sum_0^\infty{}^q A_1^q (\lambda_0) \cos q \varphi \cos (\omega - \omega_0)$$

$$= -\frac{\sqrt{1-2c\cos\omega+c^2}}{\sqrt{a}}\left[-2a^2k^2\, c\log c\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{20}^q \cos q\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c^2}\sum_0^\infty{}^q (c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q \sin\omega)\cos q\varphi\right]$$

wo $k^2 = (k_0+\varepsilon)^2$ ist. (ε ist eine kleine Größe.)

Durch Gleichsetzung der Glieder, welche $\cos\omega$ oder $\sin\omega$ nicht enthalten, ergibt sich:

$$-\frac{1}{c\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{20}^q \cos q\varphi$$

$$\text{90)}\quad -c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi\,\frac{1}{c\log c}$$

$$= +\frac{c}{\sqrt{a}}\log c\; 2a^2(k_0+\varepsilon)^2\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{20}^q\cos q\varphi$$

Lösen wir nach $\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{20}^q \cos q\varphi$ auf, und setzen wir die den Größenordnungen von $a_2 k_0^2$ resp. $2a^2k_0$ entsprechenden, S. 304 gefundenen Werte ein, so erhalten wir

$$\text{91)}\quad \sum_0^\infty \varepsilon_q\, c_{20}^q\cos q\varphi = -\frac{c_{10}R\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi}{4a\sqrt{2a\varepsilon c}\,(-\log c)^{\frac{3}{2}}}$$

$\log c$ hat im Nenner von 91 negatives Vorzeichen, da K_c unendlich wird wie $-\log c$. Für R können wir noch den sich aus der Synchronismusgleichung ergebenden Wert einsetzen, so daß wir schließlich erhalten

$$\text{92)}\quad \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{20}^q\cos\varphi = -\frac{c_{10}\pi\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_2^0}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi}{8\sqrt{a}\,\varepsilon\,(-\log c)}$$

Für c_{20}^q ergibt sich

$$\text{92a)}\qquad \varepsilon^q\, c_{20}^q = -\frac{c_{10}\pi\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,A_0^q(\lambda_0)}{8\sqrt{a}\,\varepsilon\, K_c}$$

Durch Gleichsetzen der Glieder, welche $\cos\omega$ enthalten, erhält man eine Gleichung für die Konstante $\sum_0^\infty {}^q c_{21}^q \cos q\varphi$

$$\text{93)}\quad \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q c_{21}^q \cos q\varphi$$

$$- \frac{c_{10}}{2a} R \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \sum_0^\infty {}^q A_0^q(\lambda_0) \cos q\varphi$$

$$+ c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \sum_0^\infty {}^q A_1^q(\lambda_0) \cos q\varphi \cos\omega_0$$

$$= - \frac{2c^2}{\sqrt{a}} \log c\, a^2 (k_0 + \varepsilon)^2 \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi + \frac{1}{c^2\sqrt{a}} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q \varepsilon_{21}^q \cos q\varphi$$

Daraus folgt, bei Vernachlässigung von Gliedern mit c^3 (die außerdem $\sqrt{K_c}$ im Nenner haben)

$$\text{94)}\quad \begin{gathered} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q c_{21}^q \cos q\varphi = - \frac{c_{10} c^2}{4\sqrt{a}} R \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \\ \left[\sum_0^\infty {}^q A_0^q(\lambda_0) \cos q\varphi - \sum_0^\infty {}^q A_1^q(\lambda_0) \cos q\varphi \cos\omega_0\right] \end{gathered}$$

Durch Gleichsetzen der Glieder, welche $\sin\omega$ enthalten, ergibt sich für $\sum_0^\infty {}^q C_{21}^q \cos q\varphi$

$$\text{95)}\quad \begin{gathered} - \frac{1}{c^2\sqrt{a}} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q C_{21}^q \cos q\varphi + c_{10} \frac{R}{2a} \sin\omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \\ \sum_0^\infty {}^q A_1^q(\lambda_0) \cos q\varphi = + \frac{1}{c^2\sqrt{a}} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q C_{21}^q \cos q\varphi \end{gathered}$$

$$\text{96)}\quad \begin{gathered} \sum_0^\infty {}^q \varepsilon_q C_{21}^q \cos q\varphi \\ = c_{10}\, c^2 \frac{R}{4\sqrt{a}} \sin\omega_0 \sum_0^\infty {}^q A_1^q(\lambda_0) \cos q\varphi \cdot \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \end{gathered}$$

Auch in (94) und (96) kann R durch den sich auch (10) ergebenden Wert ausgedrückt werden.

Um k resp. ε bestimmen zu können, ist es erforderlich, die Operation

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$$

auch an der Kugel auszuführen.

Aus der Gleichung (84) erhalten wir für $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}$

$$97)\quad \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = -c_{10}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q c_{20}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi$$

während wir für $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$ aus Gleichung (85) den Wert finden:

$$98)\quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = -c_{10}\frac{1}{R} + c_{10}\,k\operatorname{cotg} k R$$

Also ist

$$99)\quad \begin{aligned} &-\frac{c_{10}}{R} + \sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\,\varepsilon_q c_{20}^q\,\frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{R\sqrt{a}} \\ &= -\frac{c_{10}}{R} + c_{10}\,k\operatorname{cotg} k R \end{aligned}$$

und

$$99^{a})\quad c_{10}\,k\operatorname{cotg} k R = \frac{\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\,\varepsilon_q c_{20}^q}{R}\,\frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{\sqrt{a}}.$$

Diese Gleichung, Gl. (92^a), sowie die Relation (51) geben uns folgende quadratische Gleichung für ε

$$100)\quad k\varepsilon^2 R^2 = \frac{\pi\,(1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2)\left[A_0^0(\lambda_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_0^\infty{}^q A_0^{q^2}(\lambda_0)\right]}{8\,K_e\,a}$$

Nach Einsetzen von $k = \frac{\pi}{2R}$ ergibt sich für εR der Ausdruck

$$101)\quad \varepsilon R = +\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sqrt{A_0^0(\lambda_0)^2+\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q A_0^{q^2}(\lambda_0)}\sqrt{R}}{\sqrt{K_c\,a}}$$

Aus den gleichen Gründen wie oben entscheiden wir uns für das negative Vorzeichen der Wurzel.

Mit Hilfe von (101) stellen sich dann die Konstanten $\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q$ folgendermaßen dar:

$$102)\qquad \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi = \frac{c_{10}\,\pi\sqrt{R}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi}{4\sqrt{K_c}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q(\lambda_0)^2+A_0^0(\lambda_0)^2}}$$

Nach Einsetzung der Konstanten wird dann Φ am Ringe (denn auf diesen Wert kommt es vor allem an):

103)

$$\Phi = c_{10}\frac{\sqrt{R}\sqrt{1-2c\cos\omega+c^2}}{4\sqrt{a}}\left[\frac{\pi\sqrt{K_c}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi}{\sqrt{A_0^0(\lambda_0)^2+\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)^2}}\right.$$

$$+\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,(-c)\left[\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi\cos\omega\right.$$

$$\left.-\sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\varphi\cos(\omega-\omega_0)\right]$$

Setzen wir hier für

$$\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi \quad\text{und für}\quad \sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\varphi$$

die in (81) und (82) gefundenen Werte ein, so wird

$$103^a)\qquad \Phi = \frac{c_{10}\sqrt{R}\sqrt{1-2c\cos\omega+c^2}}{4\sqrt{a}}$$

$$\left[\frac{\pi\sqrt{K_c}\sqrt{2}}{\sqrt{A_0^0(\lambda_0)^2+\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)^2}\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}}\right.$$

$$-\frac{c\sqrt{R}}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\omega}{\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}}\right.$$

$$\left.-\frac{2\sqrt{2}\,\lambda_0\cos(\omega-\omega_0)}{(\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi})^3}\right]$$

Aus dieser Formel können wir ein sehr interessantes Resultat entnehmen. (103) sagt aus, daß die Schwingung des Ringes abhängig ist von der φ-Richtung, oder mit anderen Worten, daß der Ring eine longitudinale Schwingungskomponente in Richtung seiner Peripherie besitzt.

Die Kräfte, die von der Kugel auf den Ring ausgeübt werden, berechnen wir nach den von Korn (loc. cit. S. 139) entwickelten Formeln. Es wurden dort gefunden

$$X = \frac{\mu k^2}{4}\int\limits_{\Omega}\Phi^2\cos n x\, d\omega$$

$$Y = \frac{\mu k^2}{4}\int\limits_{\Omega}\Phi^2\cos n y\, d\omega$$

$$Z = \frac{\mu k^2}{4}\int\limits_{\Omega}\Phi^2\cos n z\, d\omega$$

Hier haben sich die Integrale über die Oberfläche des Ringes zu erstrecken, dessen Oberflächenelement nach Neumann[1]) gegeben ist durch

$$d o = \frac{2a^2 c\, d\omega\, d\varphi}{(1-2c\cos\omega+c^2)^2}$$

Für die drei Richtungs-Kosinusse erhalten wir[2])

[1]) Neumann, loc. cit. S. 39. Wir vernachlässigen, der bisherigen Praxis gemäß, in dem von Neumann gegebenen Ausdruck das Glied mit $-c^2$.

[2]) Mit Hilfe der Neumannschen Formeln 10, S. 14.

$$\cos n x = \frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{\sin \omega}{1 + 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}$$

$$104)\qquad \cos n y = \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{\cos \varphi (\cos \omega - \lambda)}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}$$

$$\cos n z = \frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{\sin \varphi (\cos \omega - \lambda)}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}$$

Bei der Ausführung der Integration setzen wir für λ seinen Wert an der Ringoberfläche, d. h. c, und erhalten so Integrale der Form

$$X = \frac{\mu a^2 k c}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi^2 \sin \omega \, d\omega \, d\varphi}{(1 - 2c\cos\omega + c^2)^3}$$

$$105)\qquad Y = \frac{\mu a^2 k c}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi^2 \cos \varphi \, (\cos \omega - c) \, d\omega \, d\varphi}{(1 - 2c\cos\omega + c^2)^3}$$

$$Z = \frac{\mu a^2 k c}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi^2 \sin \varphi \, (\cos \omega - c) \, d\omega \, d\varphi}{(1 - 2c\cos\omega + c^2)^3}$$

Für X erhalten wir, wenn wir in Φ für $\sqrt{K_c}$ den aus (10) entnommenen Wert $\frac{R\sqrt{2}}{a c \pi}$ einsetzen, und berücksichtigen, daß

$$\left(\sum_0^\infty{}_q A_0^q(\lambda_0)^2\right) = 2\pi A_0^{0\,2}(\lambda_0) + \pi \sum_1^\infty{}_q A_0^{q\,2}(\lambda_0) = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

ist resp. daß

$$\sqrt{\sum_0^\infty{}_q A_0^q(\lambda_0)^2} = \sqrt{A_0^0(\lambda_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_q A_0^q(\lambda_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0}}$$

ist, den Wert

$$X = \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, c\, \lambda_0 \sqrt{\lambda_0} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{2\sqrt{2a}}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\omega \cos(\omega - \omega_0)\, d\omega\, d\varphi}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0)^2 \cos\varphi)^2 (1 - 2c\cos\omega + c^2)}$$

106) $$= \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, \pi\, c\, \lambda_0 \sqrt{\lambda_0} \sin\omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{2\sqrt{2a}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{[(1 + \lambda_0^2) - (1 - \lambda_0^2)^2 \cos\varphi]^2}$$

$$= \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, \pi^2 c \sin\omega_0 (1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{8\lambda_0 \sqrt{\lambda_0}}$$

Liegt das Kugelzentrum auf der Rotationsachse, d. h. wird $\lambda_0 = 1$, dann ergibt sich X zu

106ª) $$X = \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, \pi^2 \sin\omega_0 \sqrt{1 - c\cos\omega}}{2\sqrt{2}}$$

Fällt der Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Polarkreises des Ringes zusammen, dann nähert sich $\sin\omega_0$ der Null, und damit wird X ebenfalls Null, was in Übereinstimmung mit der Aussage S. 286 ist.

Für Y erhalten wir, nach Ausführung der Integration nach $d\omega$

107) $$Y = \frac{\mu k^2 c_{10}^2}{4} \left[\frac{\pi R^3 \lambda_0}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0)^2 \cos\varphi} \right.$$

$$- \frac{R^2 \sqrt{R}\, \pi\, c \sqrt{\lambda_0} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2) \cos\varphi}$$

$$\left. + R\sqrt{Ra}\, \pi c^2 \lambda_0 \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \cos\omega_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi)^2} \right]$$

$$= \frac{\mu k^2 c_{10}^2 \pi^2}{4} \left[\frac{R^3 (1 - \lambda_0)}{4 a (1 + \lambda_0)} - \frac{R^2 \sqrt{R c} \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2} (1 - \lambda_0)}{8 \sqrt{2 a \lambda_0} (1 + \lambda_0)} \right.$$

$$\left. + \frac{R \sqrt{R} \sqrt{a} c^2 \cos \omega_0 \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2} (1 - \lambda_0^2)}{16 \lambda_0} \right]$$

$$107^{a}) \qquad Y = 0$$

Die Kraftkomponente in der Richtung Z stellt sich dar wie folgt: $Z =$

$$\frac{\mu k^2 c_{10}^2}{4} \left[\frac{R \pi^2 K_c a c}{4 \sum_0^\infty q A_0^q (\lambda_0)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi (\cos \omega - c) d \omega d \varphi}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2) \cos \varphi)(1 - 2 c \cos \omega + c^2)^2} \right.$$

$$- \frac{R \sqrt{R} \pi \sqrt{K_c} a c^2 \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2}}{4 \sqrt{\sum_0^\infty q A_0^q (\lambda_0)^2}}$$

$$108) \qquad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi (\cos \omega - c) \cos \omega d \omega d \varphi}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2) \cos \varphi) (1 - 2 c \cos \omega + c^2)^2}$$

$$+ \frac{R \sqrt{R} \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2} \pi \sqrt{K_c} \sqrt{a} c^2 \lambda_0}{\sqrt{\sum_0^\infty q A_0^q (\lambda_0)^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi (\cos \omega - c) \cos (\omega - \omega_0) d \omega d \varphi}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2) \cos \varphi)^2 (1 - 2 c \cos \omega + c^2)^2}$$

Da sämtliche Glieder der rechten Seite bei der Integration nach φ verschwinden, so ergibt sich

$$108^{a}) \qquad Z = 0$$

Dieses Resultat erklärt sich daraus, daß die x-Achse unseres rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Rotationsachse zusammenfällt, und die xy-Ebene den Kugelmittelpunkt und die Rotationsachse enthält.

Eine Umrechnung der für X und Y erhaltenen Werte auf rechtwinklige Koordinaten unterlassen wir, da sich eine Vereinfachung der Formeln dadurch nicht ergibt.

Unsere Resultate können wir in folgende Sätze zusammenfassen:

Fällt der Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Polarkreises des Ringes zusammen, dann treten keine Kräfte auf, und das Gleichgewicht ist stabil, denn erteilt man der Kugel eine kleine Verrückung aus dieser Gleichgewichtslage, so treten sofort Kräfte auf, die den Ring in die Gleichgewichtslage zurückzuführen suchen.

Für eine in beliebiger Richtung vor sich gehende Verrückung sind diese Kräfte der Form

$$X = K m_1 m_2 \frac{\sin \omega_0 (1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2}}{\lambda_0 \sqrt{\lambda_0}}$$

$$Y = K' m_1 m_2 \frac{(1 - \lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0} (1 + \lambda_0)}$$

$$Z = 0$$

Für eine in Richtung der X-Achse vor sich gehende Verrückung, also für $\lambda_0 = 1$, $\omega_0 < \pi$, erhält man

$$X = K m_1 m_2 \sin \omega_0 \sqrt{1 - c \cos \omega}$$

$$Y = 0$$

$$Z = 0$$

K, K', m_1 und m_2 sind Konstanten, von denen die letzteren von den Dimensionen der Kugel und des Ringes abhängen.

Zugleich zeigen unsere Resultate, wie man die Theorie der universellen Schwingungen von Systemen schwach kompressibler Körper in einem inkorrepressiblen Medium auf andere Gleichgewichtsprobleme anwenden kann, wie z. B. auf das Problem des stabilen Gleichgewichts des Systems von Saturn und seiner Ringe.