Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die sogenannte absolute Bewegung.

Von **Hugo Seeliger.**

(Eingelaufen 8. Februar.)

Für Galilei, den Begründer der wissenschaftlichen Mechanik, konnte kein Zweifel darüber entstehen, was er bei der Betrachtung von Bewegungsvorgängen als das Ruhende und Feste betrachten mußte, um voraussichtlich zu der einfachsten theoretischen Zusammenfassung der beobachteten Erscheinungen zu gelangen. Für ihn kamen fast ausschließlich nur Vorgänge in Betracht, die sich in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche abspielten und so erschien es von selbst als das Natürlichste, die Erdoberfläche zum Bezugssystem zu wählen, in Bezug auf welches alle irdischen Bewegungen zu betrachten seien. Ein glücklicher Umstand war es hierbei, daß für die damals bebekannten mechanischen Vorgänge die getroffene Wahl des Bezugssystems vollständig genügte, denn nur so war es ihm möglich, in den verwickelten Bewegungserscheinungen das im mechanischen Sinne Wesentliche von dem zu trennen, was als unwesentlich anzusehen ist. Das Resultat dieser Abstraktion, die zu den bewunderungswürdigsten gehört, die der menschliche Geist ausgeführt hat, war die Aufstellung des alle Bewegungsvorgänge beherrschenden Trägheitsgesetzes: ein sich selbst überlassener Punkt bewegt sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Was man darunter, trotz des Fehlens einer genaueren Definition, zu verstehen hat, konnte zu Galileis Zeiten niemandem zweifelhaft sein und insoweit auch in der Folgezeit keine Erscheinungen bekannt wurden, die eine genauere Festlegung der Begriffe verlangten, war damit in der Tat die Grundlage zur Entwicklung der Mechanik gegeben. Denn die weiterhin entwickelten Begriffe der Beschleunigung, der Kraft, der Masse u. s. w. schließen sich an das Trägheitsgesetz an und sind durch dasselbe bedingt.

Als man aber die Folgerungen aus der kopernikanischen Lehre zu ziehen anfing, als man die Bewegungen der irdischen Körper — z. B. den freien Fall derselben — als auf einer rotierenden und um die Sonne sich bewegenden Erde vor sich gehend aufzufassen begann, als dann Newton die Bewegung der Himmelskörper auf Grundlage der Galileischen Forschungen zu untersuchen unternahm, mußte sich das Bedürfnis nach einer strengeren Begriffsbildung einstellen. Newton war der erste, der dieses Bedürfnis erkannte und eine strenge Definition des den mechanischen Betrachtungen zu Grunde zu legenden Koordinatensystems für nötig hielt. So trat zuerst bei ihm die fundamentalste Frage der Mechanik auf: in Bezug auf welches Koordinatensystem bewegt sich ein sich selbst überlassener Punkt geradlinig und gleichförmig? Die Antwort Newtons ist in den bekannten und viel zitierten Sätzen enthalten:[1])

I. Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich, vermöge ihrer Natur, gleichförmig und ohne Beziehung auf irgend einen äußeren Gegenstand . . . .

II. Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich. Der relative Raum ist ein Maß oder ein beweglicher Teil des ersteren. . . .

III. Der Ort ist ein Teil des Raums, welchen ein Körper einnimmt und nach Verhältnis des Raumes entweder absolut oder relativ.

IV. Die absolute Bewegung ist die Übertragung des Körpers von einem absoluten Ort nach einem anderen absoluten Ort; die relative Bewegung die Übertragung von einem relativen Ort nach einem anderen relativen Ort. — Die weiteren Er-

---

[1]) Newtons mathematische Prinzipien etc. Übersetzt von Wolfers, 1872, S. 25.

klärungen Newtons sind dahin zusammenzufassen, daß die absolute Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes geradlinig und gleichförmig sei. Das gesuchte Koordinatensystem ist also ein absolutes oder ein mit dem absoluten festen Raum fest verbundenes.

Bei diesen wenig befriedigenden Festsetzungen Newtons haben sich die meisten Forscher auf dem Gebiete der Mechanik beruhigt. Dies muß einigermaßen befremden, da man kaum zaudern wird, E. Mach[1]) Recht zu geben, wenn er die absolute Zeit Newtons einen müßigen metaphysischen Begriff nennt und ebenso L. Lange,[2]) der die absolute Zeit und den absoluten Raum als „Gespenster“ bezeichnet.

Die Geschichte der Versuche sich mit den Newtonschen Fiktionen in der einen oder anderen Weise abzufinden, ist äußerst interessant. Sie ist sehr eingehend von H. Streintz[3]) und L. Lange dargestellt worden. Danach hat es seit Newton bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts zwar nicht an Versuchen zur Klarlegung gefehlt, aber es waren doch nur wenige Mathematiker und Physiker, die sich in dieser Richtung betätigt haben. Allgemeineres Interesse haben die sich hier darbietenden Fragen nicht gefunden und eine wirkliche Aufklärung ist tatsächlich nach keiner Richtung hin erfolgt. Eine Wendung wurde erst durch eine kleine Schrift von Carl Neumann[4]) hervorgerufen, die auf die Notwendigkeit einer strengeren Fassung der mechanischen Grundsätze aufmerksam machte.

---

[1]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 5. Aufl., Leipzig 1904, S. 238.

[2]) Von L. Lange werden im folgenden drei Arbeiten zitiert:

a) Über das Beharrungsgesetz. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1885.

b) Die Geschichte u. Entwicklung des Bewegungsbegriffes. Leipz. 1886.

c) Das Inertialsystem vor dem Forum der Naturforschung. Wundts Philosophische Studien, Bd. XX, 1902.

[3]) H. Streintz, Die physikal. Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.

[4]) Carl Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Leipzig 1870.

Diese wichtige Schrift Neumanns enthält eine Fülle klarer und eindringender Gedanken, denen eine unbedingte Gültigkeit zuerkannt werden muß, auch wenn man sich seinen schließlichen Zusammenfassungen nicht anschließen kann.

Nahezu gleichzeitig und unabhängig von C. Neumann setzen die Bemühungen E. Machs ein, dem alle unsere Erkenntnisse beherrschenden Prinzipe der Relativität auch in diesem Gebiete Geltung zu verschaffen. Seitdem hat man den besprochenen Fragen ein intensives Interesse entgegengebracht, wie eine recht umfangreiche Literatur darüber beweist. Diese ist in zusammenhängender Weise von Mach und L. Lange in den zitierten Schriften kritisch besprochen worden. Eine sehr vollständige Übersicht über diese Literatur hat A. Voß[1]) gegeben.

Wenn ich im folgenden auf den Gegenstand näher eingehe, so geschieht dies in der Absicht, den Versuch zu machen, das Fazit aus den Aufklärungen zu ziehen, die die letzten drei Jahrzehnte gebracht haben, und zwar in einer dem Gedankenkreise des Astronomen entsprechenden Weise. In der Astronomie ist die Überlegung dieser fundamentalen Fragen von großer Wichtigkeit und die richtige Interpretation mancher Tatsachen, welche die neuere Fixsternkunde kennen gelehrt hat. hängt hiervon ab. Die Schriften von L. Lange und Mach stellen gewiß befriedigende und richtige Lösungen der aufgetauchten Schwierigkeiten dar, wie sich im folgenden auch ergeben wird. Trotzdem hoffe ich, daß die folgenden Bemerkungen als nicht ganz unnötig sich erweisen werden.

Bisher hat sich, soviel ich weiß, von astronomischer Seite nur Herr E. Anding[2]) mit dem Verhältnis des in der Astronomie gebrauchten empirischen Koordinatensystem zu dem sogenannten „absoluten" der Mechanik beschäftigt. Es ist selbstverständlich, daß im folgenden sich nahe Berührungspunkte mit den ausgezeichneten Auseinandersetzungen Herrn E. Andings herausstellen werden.

[1]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV.

[2]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band VI_2. 1905.

1.

Ausgehend von der Einsicht, daß ebenso wie nur relative Lagen der Objekte gegeneinander, auch nur relative Bewegungen beobachtet und gemessen werden können, muß man vielgebrauchte Begriffe wie: absoluter Raum, absolute Bewegung, absolute Ruhe als sinnlos erklären. Wenn auch natürlich nichts dagegen einzuwenden ist, daß man der Kürze wegen diese Worte gebraucht, solange man sie nur wirklich faßbaren Begriffen zuordnet, so ist es doch, wie L. Lange betont, ratsam, etwaigen Mißverständnissen vorzubeugen und jene Worte gänzlich zu vermeiden. Es soll demzufolge das Newtonsche „absolute" Koordinatensystem, einem sehr passenden Vorschlage L. Langes gemäß „Inertialsystem" genannt werden. Ebenso soll „Inertialzeit" „Inertialbewegung" materiell mit dem übereinstimmen, was Newton durch das Beiwort absolut bezeichnen wollte.

Die Frage, welche vorliegt, geht also dahin: wie ist das Newtonsche Inertialsystem vom Standpunkt der Relativität aus zu definieren? Wir sagen „Newtonsches Inertialsystem", weil dieselben Grundlagen festgehalten werden sollen, welche sich beim Aufbau der heutigen Mechanik nach jeder Richtung bewährt haben. Im wesentlichen kommen diese auf den materiellen Inhalt des Galilei-Newtonschen Trägheitsgesetzes hinaus. Notwendig ist dieser Standpunkt keineswegs, denn niemand wird die Möglichkeit leugnen, andere Systeme der Mechanik aufstellen und ausbauen zu können. Zweifelhaft bleibt es nur, ob man auf anderem Wege zu einer ebenso einfachen Zusammenfassung der Bewegungstatsachen gelangen kann, wie der heutigen Mechanik gelungen ist.

Mit der Forderung nach einer logisch einwandfreien Definition eines Inertialsystems darf die nach der tatsächlichen Festlegung eines solchen, z. B. gegen den Fixsternhimmel oder gegen ein System ausgewählter Sterne, nicht vermengt werden. Denn diese Festlegung kann unabhängig von einer vorangehenden Definition dadurch bewerkstelligt werden, daß einfachere Bewegungsvorgänge verfolgt werden, in denen Richtungen auftreten, welche nach den weiteren Entwicklungen der Mechanik in einem Inertialsystem unveränderlich sind. Mit diesen Richtungen also bilden die Achsen eines Inertialsystems unveränderliche Winkel, und wenn man jene gegen die Fixsterne festlegt, so ist dasselbe mit den Inertialaxen geschehen. Dieser Weg ist schon von Newton, allerdings in sozusagen umgekehrter Richtung, vorgezeichnet worden. Denn er hat gezeigt, und dieses Resultat als wichtig hervorgehoben, daß in seinem „absoluten“ System sowohl die Apsidenlinien als auch die Ebenen der Planetenbahnen festliegen, wenn selbstverständlich von den störenden Einwirkungen der anderen Planeten abgesehen wird. Die Richtungen von der Sonne nach den Perihelien und Aphelien, ebenso wie die Durchschnittslinien der Planetenbahnen mit irgend einer von ihnen erlauben demnach die Lage eines Inertialsystems gegen ein beliebiges empirisches, etwa durch die Fixsterne definiertes System zu bestimmen. Man kann auch andere astronomisch verfolgbare Erscheinungen, wie die aus der Rotationstheorie ableitbaren Veränderungen der Lagen von Rotationsachsen hierbei benutzen, doch sind solche Modifikationen des Verfahrens prinzipiell unwesentlich. Wesentlich bleibt die Möglichkeit einer Festlegung mechanischer Inertialsysteme gegen empirische auf Grund der Newtonschen Entwicklungen. In erweiterter Fassung hat neuerdings Carl Neumann[1]) diesen Newtonschen Ansatz in überaus klarer Weise auseinandergesetzt und auch die Ausführungen Herrn Andings weisen in gleicher Richtung.

Faßt man die Frage von diesem empirischen Standpunkt, so erscheint die Forderung nach einer streng logischen Definition des Inertialsystems als weniger wichtig. Man schiebt dann allerdings das Rätselhafte und Mysteriöse im absoluten System Newtons beiseite, ohne es erklären zu wollen. Es ist nun zwar denkbar, daß sich mancher durch dieses Verfahren befriedigt fühlen könnte, aber der Meinung, daß die Annahme der abso-

---

[1]) Carl Neumann, Über die sogenannte absolute Bewegung. Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904.

luten Zeit und des absoluten Raumes „weitaus“ als die beste und einfachste zu gelten habe, wie neuerdings ein sehr hervorragender Mathematiker behauptet hat, muß auf das entschiedenste entgegengetreten werden. Denn diese Annahme ist sinnlos, liegt außerhalb aller Erfahrung und erlaubt gar keine bestimmte Fassung. Will man der unbequemen Frage nach der Bedeutung des Trägheitsgesetzes aus dem Wege gehen, so kann man dies nur, wie erwähnt, durch die Bestimmung der Lage des sogenannten absoluten Koordinatensystems gegen ein empirisch gegebenes. Man verzichtet so allerdings auf eine Diskussion der Grundlagen der Mechanik, gibt sich aber dann wenigstens keiner Selbsttäuschung hin. Stellt man sich aber nicht auf diesen wenig befriedigenden Standpunkt, so drängt sich uns von selbst die Frage auf: wie kommt es, daß sich Geister wie Lagrange, Laplace u. a. mit der Fiktion eines absoluten Raumes befreunden konnten, was bedeutete ihnen dieser an sich inhaltsleere Begriff? Carl Neumann hat nun von Neuem auf die bekannte Stelle in der Mécanique céleste von Laplace aufmerksam gemacht, in der von einem „espace sans bornes, immobile et pénétrable à la matière“ die Rede ist. Dieser Ausspruch, dem man ähnliche Aussprüche anderer berühmter Mathematiker und Physiker an die Seite stellen könnte, läßt kaum einen Zweifel aufkommen darüber, daß hier der Raum als eine objektiv gegebene Realität, ausgestattet mit irgendwelchen bestimmten Eigenschaften mathematischer oder physikalischer Natur, angesehen wird. Man darf hierin nicht etwa den Hinweis auf die Vorstellungen der modernen Physik erblicken, welche im Äther den Vermittler oder Erzeuger aller physikalischen Vorgänge sieht. Gelänge es wirklich, wovon wir noch weit entfernt sind, alle Bewegungen durch Beziehungen zu dem Äther zu erklären, so wäre allerdings damit jede Schwierigkeit in der Definition des Trägheitsgesetzes behoben, zugleich hätte sich aber das Prinzip der Relativität glänzend bewährt. Die hier allein in Betracht gezogene heutige Mechanik hat mit solchen Beziehungen nichts zu tun und der räumlich ausgedehnte Äther ist eben nicht der Raum, sondern ein sehr reales Ding. Der Raum soll frei sein von allem, was irgend wie an das, was wir Materie nennen, erinnert. Denn erst wenn von allen materiellen Objekten, von allen ihren physikalischen Eigenschaften abstrahiert wird, soll der Newtonsche absolute Raum übrig bleiben. Für den Naturforscher geht aber bei diesem Prozesse alles ohne Rest verloren und der Begriff verflüchtigt sich zu nichts. Deshalb ist gegen die Konstruktion dieses monströsen Gedankendings, Raum genannt, von mancher Seite schon protestiert worden und es ist in der Tat nicht abzusehen, wie diesem Protest auf wirksame Weise begegnet werden könnte. Offenbar handelt es sich hier um ein Mißverständnis, demzufolge man die Art und Weise, wie man räumliche Beziehungen von Objekten zueinander aufstellen kann, verwechselt mit Eigenschaften, die man einem objektiv nicht existierenden, aber in dieser Weise angesehenen absoluten Raum andichtet. Aus diesem Mißverständnis sind auch zum Teil jene merkwürdigen Interpretationen zu erklären, welche manche Mathematiker den Entwicklungen der sogenannten nichteuklidischen Geometrie angedeihen lassen, denen doch eine ganz andere Bedeutung zukommt.

Die Schwierigkeiten, welche sich einer Begriffsbestimmung des Inertialsystems im Sinne des Prinzips der Relativität, an dem unter allen Umständen festgehalten werden muß, entgegenstellen, beruhen, wie Newton ausführlich erörtert hat, auf dem Auftreten von Zentrifugalkräften bei Rotationen. Die von ihm angeführten einfachen Beispiele sind auch jetzt noch die einleuchtendsten und sie können deshalb bei Auseinandersetzungen, wie die vorliegenden, nicht gut umgangen werden. Ehe mit einigen Worten auf sie eingegangen wird, möge eine von Carl Neumann erwähnte instruktive Eventualität besprochen werden.

Ein flüssiger, um eine Achse rotierender homogener Körper wird die Gestalt eines Ellipsoids annehmen. Denkt man sich nun außer dieser rotierenden Masse alle übrigen Weltkörper des Universums vernichtet, so würden nur die in relativer Ruhe zu einander befindlichen Teilchen des Körpers vorhanden sein. Da also alle vorhandenen Teilchen in relativer Ruhe sind, könnten auch, wenn die Rotation etwas rein Relatives wäre, keine Zentrifugalkräfte mehr vorhanden sein und mit ihrem Verschwinden müßte die Abplattung des rotierenden Körpers aufhören. L. Lange[1]) bemerkt demgegenüber, daß das Trägheitsgesetz gar nicht behauptet, daß die relative Ruhe der Teile eines materiellen Komplexes schon das Auftreten von Zentrifugalkräften verhindert, sondern nur die Ruhe gegen ein Inertialsystem. Im übrigen ist die Ausführung des Neumannschen Gedankenexperiments, um einen Ausdruck von E. Mach[2]) zu gebrauchen, nur dann zulässig, wenn angenommen wird, daß nur die Relativität der Bewegung gegen beliebig ausgewählte Massen in Frage kommt, was doch gewiß niemand behaupten wird. Im vorliegenden Falle werden die für die Definitionen wesentlichen Körper, nämlich die weit entfernten kosmischen Massen, wie noch gezeigt werden wird, fortgelassen und die unwesentlichen, nämlich die zu einer flüssigen im Gleichgewichte befindlichen Masse vereinten also in einer nahen physikalischen Verbindung miteinander stehenden, beibehalten. Die in Frage kommenden Definitionen verlieren ihre Bedeutung und es ist keineswegs merkwürdig, daß die Anwendung von nunmehr inhaltsleer gewordenen Begriffen zu Widersprüchen und Schwierigkeiten führt. Hätte man aber von vornherein nur einen isolierten, um eine Achse rotierenden Körper und gar keine anderen Massen, nach denen irgend eine Orientierung vorgenommen werden könnte, so würde sich die Mechanik auf einem solchen Körper ebenfalls in Übereinstimmung mit dem Prinizpe der Relativität aufbauen lassen. Indessen wäre es vermutlich eine äußerst schwierige Aufgabe gewesen, unter solchen Umständen Ordnung in die Bewegungserscheinungen zu bringen, und niemand kann wissen, wie sich hier die Mechanik entwickelt hätte. Ein besonders ingeniöser Kopf wäre vielleicht auf den Versuch verfallen, alle Ortsveränderungen auf ein Koordinatensystem zu beziehen, dessen eine Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt, deren Lage also etwa durch die kleinste Dimension des Körpers bedingt ist,

[1]) Abhandlung b) S. 123. [2]) E. Mach. S. 301.

während die beiden darauf senkrechten Achsen im Äquator mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gegen die im Äquator gelegenen Teile des Weltkörpers sich drehen. So wären die ersten Grundlagen zu einer Mechanik in unserem Sinne gegeben gewesen, wobei nach keiner Richtung die Nötigung zur Annahme irgendwelcher „absoluter" Drehungen oder dergleichen aufgetreten wäre. Ähnliche Überlegungen könnte man anstellen, wenn nur zwei Körper, die sich umeinander bewegen, vorhanden wären. Doch haben diese und ähnliche Betrachtungen keinen besonderen Wert, denn wie Mach öfters hervorgehoben hat, die Mechanik ist eine rein empirische Wissenschaft, die sich nur auf Grund der wirklich gemachten Erfahrungen gerade so entwickelt hat, wie es tatsächlich geschehen ist.

Die obenerwähnten Beispiele Newtons betreffen das vielbesprochene „Wasserglas" und die zwei etwa durch einen Faden miteinander verbundenen Kugeln. Wird ein Glas mit Wasser um eine Achse gedreht, so krümmt sich die Wasseroberfläche immer mehr mit zunehmender Drehgeschwindigkeit und derselbe Erfolg kann nicht etwa dadurch erreicht werden, daß man das Glas ruhen läßt, und die Umgebung in Drehung versetzt. Der Faden der beiden Kugeln erhält mit zunehmender Drehgeschwindigkeit zunehmende Spannung und man könnte aus der mit einem Kraftmesser gemessenen Spannung die Größe der Rotationsgeschwindigkeit, die sich dann als eine „absolute" erweisen soll, berechnen. Die Beweiskraft dieser Anordnungen für das Vorhandensein einer absoluten Rotation fällt aber in sich zusammen, wenn es gelingt, ein Inertialsystem aus dem Prinzipe der Relativität zu definieren.

Mach[1]) bezeichnet mit Recht die Anordnung mit dem Wasserglas, wenn dieses ruhend angenommen, hingegen die ganze Umgebung, also auch der Fixsternhimmel, rotierend gedacht wird, als unausführbar und deshalb nichtssagend. Wenn er aber weiter[2]) sagt: „Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefäßwände immer dicker und

[1]) Mechanik, S. 253. [2]) Mechanik, S. 253.

massiger und zuletzt mehrere Meilen dick würden. Es liegt nur der eine Versuch vor und, wir haben denselben mit den übrigen uns bekannten Tatsachen, nicht aber mit unseren willkürlichen Dichtungen in Einklang zu bringen", so lassen sich doch wohl nicht unbegründete Einwendungen dagegen erheben. Soll mit dem Angeführten gesagt sein, daß wir niemals mit Sicherheit über das hinausgehen können, was beobachtet und im Sinne einer wissenschaftlichen Disziplin erklärt worden ist, indem wir immer gefaßt sein müssen, auf eine Tatsache zu stoßen, die eine Modifikation der bestehenden Theorie nötig machen könnte, so ist dies allerdings ein etwas rigoroser Standpunkt, dessen Zulässigkeit indessen nicht bestritten werden kann. Hält man sich aber an den Wortlaut, so müßte man eine erhebliche Veränderung in den quantitativen Verhältnissen allein, gegenüber denen, welche bei der Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen zu Gebote standen, als eine vollständig neue Situation betrachten, deren Erklärbarkeit durch die Theorie keineswegs wahrscheinlich sei. Gäbe man dies zu, dann wären z. B. sehr viele Resultate der Mechanik des Himmels sehr schwach begründet. Die auf dem Erdkörper mit gewissen Theorien in Übereinstimmung gefundenen Resultate werden uns z. B. nicht berechtigen, dieselbe Theorie auf die soviel größeren Himmelskörper, wie Sonne oder Jupiter, anzuwenden, der Nachweis, die Rotation der Sonne könne nur eine kleine Abplattung ihrer Oberfläche hervorrufen, falls sie als flüssig angenommen werden darf, wäre hinfällig u. s. f. Sicherlich würde dieser allzu rigorose Standpunkt auf die Entwicklung der Mechanik des Himmels nicht günstig einwirken und ich meine, er wäre auch in Rücksicht auf die bisherigen Erfahrungen, die wohl ausnahmslos nachträglich ähnliche Extrapolationen bestätigt haben, nicht gerechtfertigt.

An die eben besprochene Äußerung Machs knüpfen B. und J. Friedländer[1]) an. Ohne, wie wir scheint, die sonstigen Klarstellungen Machs und namentlich auch Langes genügend zu

---

[1]) B. u. J. Friedländer, Absolute oder relative Bewegung? Berlin 1896.

würdigen, wollen sie das Trägheitsgesetz in einem anderen Prinzip zusammenfassen: alle Massen streben danach, ihren Bewegungszustand nach Geschwindigkeit und Richtung aufrecht zu erhalten. Ohne genauere Verfolgung im einzelnen, die die Verfasser nicht versuchen, sind solche Sätze viel zu unbestimmt und es ist wohl kaum möglich, ihre Richtigkeit zu beurteilen. Im besten Falle, nämlich wenn es, was mir nicht sehr wahrscheinlich scheint, gelänge, in dieser oder ähnlicher Weise die Grundlagen der Mechanik herzustellen, käme es nach den Vorschlägen der Verfasser in letzter Instanz auf die Einführung von Kräften hinaus, die von den relativen Geschwindigkeiten abhängen und auch die Gesetze der Massenanziehung müßten durch dementsprechende Zusatzglieder vervollständigt werden. Der Sinn der von den Herren F. in Angriff genommenen Experimente kann wohl kaum anders gedeutet werden. Diese Experimente selbst suchen nach einem Einfluß schnell rotierender, verhältnismäßig großer Massen — als solche wurde ein großes Fabriksschwungrad genommen — auf eine möglichst nah aufgestellte Drehwage. Für die vorliegenden Fragen wäre der Nachweis solcher Einwirkungen — der bisher nicht gelungen ist —, wie mir scheint, erst dann von Bedeutung, wenn gezeigt werden könnte, daß diese Einwirkungen nicht von der Drehgeschwindigkeit gegen ein Inertialsystem, sondern tatsächlich von der relativen Geschwindigkeit gegen die Drehwage abhängen. Die Versuche müßten demnach eine Genauigkeit besitzen, die wohl gänzlich außerhalb des Bereiches des Erreichbaren liegen dürfte.

2.

Ich habe schon oben die Meinung ausgesprochen, daß durch die Arbeiten von Mach und L. Lange die Aufgabe, das Trägheitsgesetz aus dem Prinzip der Relativität zu erklären, im wesentlichen als gelöst zu betrachten ist. Es scheinen sich auch andere dieser Auffassung anzuschließen, wie u. a. aus den ähnliche Tendenzen wie Lange verfolgenden wert-vollen Aufsätzen von Mac Gregor[1]) hervorgeht. Die wichtigen Resultate L. Langes verdienen aber unter allen Umständen mehr, als bisher, bekannt zu werden, auch was ihre mathematische Begründung betrifft. Anschließend an ein Referat[2]) bald nach Erscheinen der Langeschen ersten Schrift werde ich im folgenden eine Begründung der Langeschen Sätze geben. Die Darstellung folgt selbstverständlich dem Gedankengange Langes, benützt aber im einzelnen etwas abgeänderte Entwicklungen.

In den Gleichungen, welche die Transformation von einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\Xi\,Y\,Z$ zu einem anderen $X, Y, Z,$ vermitteln:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \delta + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z\\ \eta &= \delta_1 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z\\ \zeta &= \delta_2 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

kommen 6 voneinander unabhängige Koeffizienten vor. Die Zeit t soll zunächst in einer ganz willkürlichen Skala gemessen werden, so daß sie nichts anderes als eine vierte Variable bedeutet, durch welche die Bewegungsvorgänge mitbestimmt werden. Bewegt sich im System $\Xi\,Y\,Z$ ein Massenpunkt auf einer beliebigen Kurve mit beliebiger Geschwindigkeit, so werden $\xi\,\eta\,\zeta$ gegebene Funktionen von t sein. Aus (1) folgt dann sofort, daß es unendlich viele Systeme $X\,Y\,Z$ gibt, in Bezug auf welche dieser Punkt eine vorgeschriebene Kurve mit vorgeschriebener Geschwindigkeit beschreibt. Erst wenn 2 Punkte in beiden Systemen gegebene Bahnen mit gegebenen Geschwindigkeiten beschreiben sollen, wäre die Lage und Bewegung des einen Systems gegen das andere im allgemeinen bestimmt, da dann 6 Größen 6 Gleichungen zu genügen haben. Es sollen nun nur geradlinige Bahnen betrachtet werden. Nimmt man zu-

---

[1]) Mac Gregor, On the fundamental hypotheses of abstract dynamics. Canada. R. Soc. Trans. vol X, 1892, ferner; On the hypotheses of dynamics. Philos. Meg. 5. ser., vol. 36, 1893.

[2]) Vierteljahresschrift der Astr. Gesellsch., Band 28.

erst an, daß n Punkte im System XYZ sich in vorgeschriebenen Geraden

$$\left.\begin{array}{l} x^{(n)} = A_n z^{(n)} + C_n \\ y^{(n)} = B_n z^{(n)} + D_n \end{array}; \quad n = 0, 1 \ldots, n-1 \right\} \qquad (2)$$

bewegen sollen, so sind also die Größen A, B, C, D gegeben, während ihre Bewegung im System ΞYZ ebenfalls beliebig gegeben ist, so daß $\xi \eta \zeta$ bekannte Funktionen der Zeit sind. Für jeden Wert von t müssen dann $3n$ Gleichungen (1) und $2n$ Gleichungen (2) erfüllt sein, denen die 6 Transformationskoeffizienten und $3n$ Koordinaten zu genügen haben. Die Erfüllung der Bedingungen ist im allgemeinen nur möglich, wenn

$$5n < 3n + 6 \text{ oder } n \leqq 3$$

Man kann demnach im allgemeinen ein System XYZ so bestimmen, daß in ihm 3 beliebig bewegte Punkte vorgeschriebene Gerade beschreiben. Für diesen Fall schreiben wir die Gleichungen der gegebenen Geraden besser in der Parameterdarstellung

$$\begin{array}{l|l|l} x = a + b\,\varphi(t) & x' = a' + b'\varphi' & x'' = a'' + b''\varphi'' \\ y = a_1 + b_1\varphi(t) & y' = a_1' + b_1'\varphi' & y'' = a_1'' + b_1''\varphi'' \\ z = a_2 + b_2\varphi(t) & z' = a_2' + b_2'\varphi' & z'' = a_2'' + b_2''\varphi'' \end{array} \qquad (3)$$

Gegeben sind also die Koeffizienten $a, b \ldots$ die Funktionen $\xi \eta \zeta, \xi' \ldots \xi''$, während die Funktionen $\varphi \varphi' \varphi''$, $\alpha \beta \delta \ldots$ zu bestimmen sind. Da es sich, weil die Orthogonalitätsbedingungen vom 2. Grade sind, um nichtlineare Gleichungen handelt, ist die Bestimmung nicht eindeutig, sie kann auch zu imaginären Werten führen. Aus den 9 Gleichungen (1) kann man die 6 Transformationskoeffizienten eliminieren. Die sich so ergebenden 3 voneinander unabhängigen Gleichungen erhält man am einfachsten dadurch, daß man das von den drei Punkten in jedem Zeitmoment gebildete Dreieck betrachtet. Dasselbe ist erst durch alle 3 Seiten gegeben und diese drei Seiten müssen in den beiderlei Systemen dieselbe Länge haben.

Die 3 im allgemeinen voneinander unabhängigen Gleichungen sind also:

$$\left.\begin{aligned}(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\\ (\xi-\xi'')^2+(\eta-\eta'')^2+(\zeta-\zeta'')^2 &= (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2\\ (\xi'-\xi'')^2+(\eta'-\eta'')^2+(\zeta'-\zeta'')^2 &= (x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Führt man mit (3) die $\varphi\varphi'\varphi''$ ein, so erscheinen diese für jedes t durch 3 quadratische Gleichungen bestimmt. Denkt man sich die $\varphi\varphi'\varphi''$ etwa als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes, so muß dieser zugleich auf 3 Oberflächen 2. Grades liegen. Danach gibt es höchstens 8 zusammengehörige Werte $\varphi\varphi'\varphi''$. Bildet man nun aus (1) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\xi-\xi' &= a(x-x')+a_1(y-y')+a_2(z-z')\\ \xi-\xi'' &= a(x-x'')+a_2(y-y'')+a_2(z-z'')\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wozu noch noch hinzutritt

$$1 = a^2 + a_1^2 + a_2^2$$

so ergeben sich für jedes Wertsystem $\varphi\varphi'\varphi''$ zwei Lösungen für $a\,a_1\,a_2$ etc. und ähnlich für $\beta\,\beta_1\,\beta_2$. Denn die ersten beiden Gleichungen geben a_1 und a_2 als lineare Funktionen von a und die 3. Gleichung ist dann vom 2. Grade in Bezug auf a.

Zu jedem Wertsystem $a\,a_1\,a_2$ gehört aber nur ein Wertsystem $\beta\,\beta_1\,\beta_2$, denn es ist

$$\begin{aligned}\eta-\eta' &= \beta(x-x')+\beta_1(y-y')+\beta_2(z-z')\\ \eta-\eta'' &= \beta(x-x'')+\beta_1(y-y'')+\beta_2(z-z'')\\ 0 &= \beta\cdot a+\beta_1\,a_1+\beta_2\,a_2\end{aligned}$$

und die β bestimmen sich also eindeutig aus den $a\,a_1\,a_2$.

Ganz ähnliches kann für die Bestimmung des $\gamma\,\gamma_1\,\gamma_2$ und auch der δ,δ_1,δ_2 ausgesagt werden, so daß es also höchstens 16 Koordinatensysteme gibt, die den gestellten Bedingungen entsprechen. Natürlich können einige der Lösungen imaginär werden und es können auch, da hier die Bestimmungen für die einzelnen Zeitmomente ausgeführt werden, reelle Lösungen mit der Zeit imaginär werden und umgekehrt. Es ist wohl kaum nötig, zu erwähnen, daß die Bestimmung der a aus (5) unbestimmt wird, wenn die 3 Punkte in XYZ in einer Geraden liegen, welcher Fall also auszuschließen ist.

Man kann also auch für 3 sich selbst überlassene Punkte, die sich in Bezug auf ein willkürliches Koordinatensystem ΞYZ irgendwie in bekannter Weise bewegen, ein Koordinatensystem XYZ gegen ΞYZ so festlegen, daß sich diese 3 Punkte in vorgeschriebenen Geraden bewegen und zwar gibt es nur eine relative kleine Zahl solcher Systeme.

Der letzte Zusatz setzt noch voraus, daß die Gleichungen (4) voneinander unabhängig sind, was wohl im allgemeinen, aber nicht in allen besonderen Fällen stattfindet. Sind die Gleichungen (4) nicht unabhängig voneinander, dann gibt es unendlich viele gesuchte Systeme, die Aufgabe ist unbestimmt. Die Unabhängigkeit der Gleichungen (4) voneinander wird dadurch ausgedrückt, daß man (3) in (4) einsetzt, die $\varphi\varphi'\varphi''$ als unabhängige Variable betrachtet und die Funktionaldeterminante Δ der 3 Funktionen von $\varphi\varphi'\varphi''$, welche in (4) vorkommen, gleich Null setzt. Man setze zur Abkürzung

$$\Sigma a = a + a_1 + a_2,\ \Sigma a' = a' + a_1' + a_2',\ \Sigma ab = ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{ etc.}$$

so schreiben sich die rechten Seiten von (4)

$$\begin{gathered}
\Sigma(a'-a)^2 + 2\varphi'\,\Sigma(a'-a)b' - 2\varphi\,\Sigma(a'-a)b \\
-2\Sigma bb'\varphi\varphi' + \varphi'^2\,\Sigma b'^2 + \varphi^2\,\Sigma b^2 \\
\Sigma(a''-a)^2 + 2\varphi''\,\Sigma(a''-a)b'' - 2\varphi\,\Sigma(a''-a)b \\
-2\Sigma bb''\varphi\varphi'' + \varphi''^2\Sigma b''^2 + \varphi^2\Sigma b^2 \\
\Sigma(a''-a')^2 + 2\varphi''\,\Sigma(a''-a')b'' - 2\varphi'\,\Sigma(a''-a')b' \\
-2\Sigma b'b''\varphi'\varphi'' + \varphi''^2\,\Sigma b''^2 + \varphi'^2\Sigma b'^2
\end{gathered}$$

und wenn man weiter abkürzt:

$$\begin{array}{l|l|l}
A = \Sigma ab + \varphi\,\Sigma b^2 & B = \Sigma a'b' + \varphi'\Sigma b'^2 & C = \Sigma a''b'' + \varphi''\Sigma b''^2 \\
A_1 = \Sigma a'b + \varphi'\,\Sigma bb' & B_1 = \Sigma a''b' + \varphi''\Sigma b'b'' & C_1 = \Sigma ab'' + \varphi\,\Sigma bb'' \\
A_2 = \Sigma a''b + \varphi''\,\Sigma bb'' & B_2 = \Sigma ab' + \varphi\,\Sigma bb' & C_2 = \Sigma a'b'' + \varphi'\Sigma b'b''
\end{array}$$

so wird

$$\Delta = \begin{vmatrix} A-A_1 & B-B_2 & 0 \\ A-A_2 & 0 & C-C_1 \\ 0 & B-B_1 & C-C_2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} -(A-A_1)(B-B_1)(C-C_1) \\ +(A-A_2)(B-B_2)(C-C_2) \end{array}$$

Offenbar ist $\Delta \equiv 0$, wenn

$$\begin{array}{l} b' = k\,b,\; b_1' = k\,b_1,\; b_2' = k\,b_2 \\ b'' = k'b,\; b_1'' = k'b_1,\; b_2'' = k'b_2 \end{array}$$

d. h. wenn die Geraden parallel zueinander sind. Diese Bedingung ist also gewiß hinreichend. Daß sie aber auch notwendig ist, kann man folgendermaßen beweisen. Soll $\Delta = 0$ sein für alle möglichen Werte der $\varphi\,\varphi'\,\varphi''$, so kann man partiell nach den einzelnen φ diffenzieren.

Differenziert man $\log \Delta$ partiell nach φ, so wird:

$$\frac{\Sigma b^2}{A-A_1} - \frac{\Sigma b b''}{C-C_1} = \frac{\Sigma b^2}{A-A_2} - \frac{\Sigma b b'}{B-B_2}$$

Differentiiert man weiter nach φ'':

$$\frac{(A-A_2)^2}{\Sigma b^2} = \frac{(C-C_1)^2}{\Sigma b''^2}$$

und durch nochmalige Differentiation nach φ ergibt sich sofort:

$$\frac{\Sigma b^2}{A-A_2} = -\frac{\Sigma b b''}{C-C_1}$$

eine Gleichung, die für jedes φ'' erfüllt sein muß, woraus man findet:

$$\begin{array}{c} \Sigma b^2\, \Sigma (a''-a)\, b'' = \Sigma b\, b''\, (a''-a)\, b \\ \Sigma b^2\, \Sigma b''^2 = (\Sigma b\, b'')^2 \end{array}$$

Die letzte Gleichung ausführlich geschrieben lautet:

$$(b^2 + b_1^2 + b_2^2)(b''^2 + b_1''^2 + b_2''^2) = (b\,b'' + b_1 b_1'' + b_2 b_2'')^2$$

Setzt man nun

$$b'' = k\,b;\; b_1'' = \lambda\,b_1;\; b_2'' = \mu\,b_2$$

so wird

$$b^2 b_1^2 (k-\lambda)^2 + b^2 b_2^2 (\mu - k)^2 + b_1^2 b_2^2 (\mu - \lambda)^2 = 0$$

eine Gleichung, die für reelle und von 0 verschiedene b nur erfüllt werden kann durch $k = \lambda = \mu$.

In derselben Weise wird sich nachweisen lassen, daß die Gleichung $\Delta = 0$ die Bedingung nach sich zieht:

$$b' = k_1 b\,;\ b_1' = k\, b_1\,;\ b_2' = k_1 b_2$$

womit die Notwendigkeit der obigen Bedingung nachgewiesen erscheint.

Wenn aber durch die drei sich selbst überlassenen Punkte ein Koordinatensystem mit beschränkter Vieldeutigkeit dadurch definiert ist, daß in ihm die 3 Bahnkurven gerade Linien sind, so ist dieses System noch kein Inertialsystem. Als solches soll vielmehr ein System gelten, in Bezug auf welches sich beliebig viele sich selbst überlassene Punkte geradlinig bewegen. Es wird sich empfehlen, die Definition eines Inertialsystems, wie L. Lange tut, durch Konstruktion eines recht einfachen Falles zu bewerkstelligen. Danach sollen drei Massenpunkte genommen werden, die gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen von einem Punkte ausgehen und sich selbst überlassen werden. Ein Koordinatensystem, in Bezug auf welches dann die 3 Bahnkurven gerade Linien sind, ist, wie leicht zu zeigen, ein Inertialsystem. Die Voraussetzungen erlauben, die Möglichkeit eines solchen Ansatzes natürlich vorausgesetzt, anzunehmen

$$\begin{aligned} \xi^{(n)} &= B^{(n)}\, t \\ \eta^{(n)} &= B_1^{(n)}\, t \\ \zeta^{(n)} &= B_2^{(n)}\, t \end{aligned}$$

wo für n kein, ein oder 2 Striche zu setzen sind. Es kann dabei t in irgend einer Skala angesetzt sein. Ebenso wird man in (3) alle a gleich Null setzen dürfen. Dann schreibt sich die erste Gleichung (4)

$$(B'-B)^2+(B_1'-B)^2+(B_2'-B)^2=\left(b'\frac{\varphi'}{t}-b\frac{\varphi}{t}\right)^2+\left(b_1'\frac{\varphi'}{t}-b_1\frac{\varphi}{t}\right)^2+\left(b_2'\frac{\varphi'}{t}-b_2\frac{\varphi}{t}\right)^2$$

und ganz ähnlich die beiden anderen. Die Auflösung gibt unter allen Umständen

$$\varphi = m\,t;\ \varphi' = m'\,t;\ \varphi'' = m''\,t$$

wobei die m Konstanten sind. Ebenso wird die Auflösung von (5) für die Richtungskosinusse $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ konstante Werte ergeben, während sich die $\delta\,\delta_1\,\delta_2$ als lineare Funktion von t darstellen.

Für jeden weiteren sich selbst überlassenen Punkt werden jetzt die Koordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ als lineare Funktionen von t, also

$$\xi = A + B\,t,\ \eta = A_1 + B_1\,t,\ \zeta = A_2 + B_2\,t$$

anzusetzen sein und daraus folgt dann, wenn man die soeben gefundene Form der Transformationskoeffizienten in (1) berücksichtigt, daß $x\,y\,z$ ebenfalls lineare Funktionen von t sind.

Auf Grund der ausgeführten Entwicklungen erweisen sich nun, wie von selbst klar ist, die Aufstellungen L. Langes nach jeder Richtung hin als zulässig und wohlbegründet. Ich führe sie hier wörtlich an:

Definition I. Inertialsystem heißt ein jedes Koordinatensystem von der Beschaffenheit, daß mit Bezug darauf drei vom selben Raumpunkt nach verschiedenen Richtungen projizierte und dann sich selbst überlassene Punkte $P\,P'\,P''$ auf drei beliebigen, in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden dahinschreiten.

Theorem I. Mit Bezug auf ein Inertialsystem ist die Bahn jedes beliebigen vierten sich selbst überlassenen Punktes gleichfalls geradlinig.

Über die Bedeutung der 4. Variablen, der Zeit t, ist bisher noch nichts ausgesagt worden. Man kann sich nun unbedenklich der von Carl Neumann gegebenen Aussage anschließen: „Zwei materielle Punkte, von denen jeder sich selbst überlassen bleibt, bewegen sich (in einem Inertialsystem) in solcher Weise, daß gleiche Wegabschnitte des einen immer gleichen Wegabschnitten des anderen entsprechen", und gleichen Weg abschnitten werden gleiche Zunahmen der Variablen t zugeordnet, wo t das, was wir die Zeit in einer gleichförmig verlaufenden Skala gemessen nennen, ist. Die Einwendungen, die H. Streintz hiergegen erhoben hat, sind nach meiner Meinung unwesentlich und gegenstandslos. Dann ergeben sich folgende Sätze, deren logisch musterhafte Fassung man ebenfalls L. Lange verdankt.

Definition II. Inertialskala heißt eine jede Zeitskala, in Bezug auf welche ein sich selbst überlassener auf ein Inertialsystem bezogener Punkt gleichförmig fortschreitet.

Theorem II. In Bezug auf eine Inertialzeitskala ist jeder beliebige andere sich selbst überlassene Punkt in seiner Inertialbahn gleichförmig bewegt.

Die Langesche Konstruktion des Inertialsystems ist selbstverständlich eine Idealkonstruktion, die aber das logische Bedürfnis nach jeder Richtung vollkommen befriedigt und das Prinzip der Relativität wahrt, denn tatsächlich ist jede Bezugnahme auf etwas Absolutes gänzlich verschwunden.

Es ist von einigen Seiten angewendet worden, daß der sich selbst überlassene Punkt noch einer Definition bedarf, da er doch als solcher, erst durch die Geradlinigkeit seiner Bahn im Inertialsystem erkennt werden kann. Indessen darf nicht übersehen werden, daß man zu dem Begriff des sich selbst überlassenen Punktes auch gelangen kann, wenn man den Kraftbegriff zunächst in anderer Weise festlegt und dann den sich selbst überlassenen Punkt als einen solchen definiert, der von keinen Kräften angegriffen wird. Erfahrungsgemäß sind nun alle Kraftwirkungen in der Natur an das Vorhandensein von Massen gebunden. Wo Kraftwirkungen nachweisbar sind, sind auch Massen in größeren oder kleineren Entfernungen da und umgekehrt, wo Massen in der Nähe sind, haben wir Kraftwirkungen anzunehmen. So wird sich strenge genommen nirgends im Univerum eine Stelle finden, wo das Ideal eines sich selbst überlassenen Punktes anzutreffen wäre. Ähnliches gilt ja in allen Teilen der Naturwissenschaften, wo gewisse Idealvorgänge erst durch mehr oder weniger weit ausgeführte Abstraktion geschaffen werden müssen. So werden wir hier durch Abstraktion den Begriff eines isolierten Massenpunktes bilden müssen, indem wir uns einen solchen in immer größere Entfernung von anderen Massen gerückt denken. Das praktisch unerreichbare Ideal wäre erreicht, wenn alle anderen Massen *m* in unbegrenzt großer Entfernung sich befänden. In Wirklichkeit erfordert auch schon von Anfang an die Idealkonstruktion Langes die Durchführung einer ähnlichen Abstraktion. Denn die von einem Punkt ausgehenden materiellen Punkte werden sich auch gegenseitig durch die Newtonsche Gravitation beeinflussen und strenge genommen erst dann sich selbst überlassene Punkte sein, wenn sie in ihren Bahnen in überaus große gegenseitige Entfernungen gerückt sind. Man könnte ja auch die Massen der Punkte immer kleiner werden lassen, doch leistet dies Verfahren nicht mehr, als die zuerst gemachte Annahme, da hier ebensowenig ein nicht zu Ende durchführbarer Prozeß vermieden werden kann wie dort. Erklärt man die Unzulässigkeit dieser Art von Abstraktionen, dann wird man überhaupt niemals zu befriedigenden Definitionen der Grundbegriffe der Mechanik gelangen können. Läßt man aber den Begriff des isolierten Massenpunktes als zulässig gelten, dann würden in der Tat 3 isolierte Punkte, die nicht in einer Geraden stehen ein Inertialsystem vollständig und in der einfachsten Weise definieren. Der Anfang des Systems kann in jedem der 3 isolierten Punkte liegen, seine Achsenrichtungen werden durch die Richtungen nach den beiden anderen Punkten bestimmt.

Diese Idealkonstruktion ist nichts anderes als ein spezieller Fall der Langeschen. Man wird aber kaum leugnen können, daß sie mit der Wirklichkeit, d. h. mit den durch astronomische Beobachtungen gewonnenen Erfahrungen engere Fühlung besitzt. Denn man wird zunächst als Anfang des Inertialsystems nicht einen isolierten Punkt nehmen, der überhaupt nicht auffindbar ist, sondern ein in mechanischer Beziehung äquivalentes Gebilde. Ein solches ist — allerdings wegen der Anziehung der Sterne nur näherungsweise — der Schwerpunkt des Planetensystems, der sich gegenüber äußerst entfernten Massen gerade so bewegt wie ein Massenpunkt. Dann wird man zur Orientierung auch ähnliche ausgedehnte Massensysteme benützen können und zwar in beliebiger Anzahl, wenn dieselben nur die Bedingung der Isoliertheit erfüllen, d. h. unbegrenzt weit vom Schwerpunkt des Sonnensystems abstehen und von ihm aus gesehen nicht in unmeßbar kleiner Entfernung voneinander zu stehen scheinen. Eine solche Idealkonstruktion des Inertialsystems, die also außer dem Schwerpunkt des Planetensystems noch mindestens 2 unbegrenzt weite Massen erfordert, scheint mir keine größeren gedanklichen Schwierigkeiten zu besitzen, als irgend eine andere und ich habe keinen Grund, sie als nicht sehr ansprechend zu bezeichnen. Bekanntlich gehen in solchen Fragen die Meinungen auseinander und was dem einen besonders ansprechend erscheint, ist es dem anderen keineswegs und eine Diskussion in dieser Richtung führt selten zu einer Einigung. Daß das so definierte System ein wohl definiertes ist und auf dem Prinzip der Relativität ruht, dürfte indessen unzweifelhaft sein.

Die angestellten Betrachtungen leiten direkt zu den Klarlegungen über, welche die Wissenschaft Mach verdankt. Sie sind, wie schon erwähnt, in seinem Buche über die Entwicklung der Mechanik enthalten, welches zu den schönsten Büchern gehört, die über Mechanik überhaupt geschrieben worden sind. Die fundamentale Wichtigkeit dieses Werkes in Bezug auf die vorliegenden Fragen beruht hauptsächlich in der Konsequenz, mit welcher Mach zuerst das Prinzip der Relativität und den Grundsatz festgehalten hat, demzufolge die Mechanik ein auf rein empirischer Grundlage aufgebautes Gebäude ist, was merkwürdigerweise nicht immer genügende Berücksichtigung gefunden hat. Für Mach hat nun die Orientierung des Inertialsystems einfach nach dem Fixsternhimmel zu erfolgen und die Zeitskala ist durch die Rotation der Erde gegeben. Zu Newtons Zeit hätte diese Definition unzweifelhaft auch praktisch ausgereicht. Seitdem hat man aber in den Eigenbewegungen der Fixsterne Einflüsse kennen gelernt, welche die Festlegung eines Inertialsystems erschweren und auch die Rotationszeit der Erde, gemessen durch die übliche Sternzeit, ist ein Zeitmaß, das sich nachgewiesenermaßen periodisch und säkular, letzteres in einem nicht genügend festgestellten Grade, ändert. Infolge dieser Tatsachen ist eine Orientierung einfach nach dem Fixsternhimmel zu unbestimmt und muß schärfer gefaßt werden. Das ist Mach auch nicht entgangen und er ersetzt,[1]) von dem Grundsatze ausgehend, daß man von den Massen des Universiums nicht absehen dürfe, die Aussage, daß eine Masse μ im Raum sich in gerader Linie und mit gleicher Geschwindigkeit bewege durch eine andere. Nennt man $m, m' \ldots$ die Massen in den Entfernungen $r, r' \ldots$ vom Punkte μ, so wird die genannte Aussage äquivalent sein mit dem Sinne der Formel

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\Sigma m r}{\Sigma m}\right) = 0$$

insofern nur „hinreichend viele, hinreichend große und weite Massen“ in Betracht gezogen werden. Die Zulässigkeit dieses sinnreichen Ansatzes unter gewissen Bedingungen muß anerkannt werden. Denn wenn die großen und weiten Massen die näheren überwiegen, deckt sich der mechanische Ansatz mit den oben gemachten Bemerkungen mit beliebiger Annäherung, wenn einzelne Entfernungen r beliebig groß gemacht werden.

Indessen möchten doch Einwände zu erheben sein. Der erste bezieht sich darauf, daß es nicht in unserem Ermessen steht, die ausgesprochene Bedingung für die Massen zu erfüllen, da wir Tatsachen nicht verändern können. Daß ferner die Formel auf die sichtbaren Fixsterne angewendet nahezu richtig ist, dürfte feststehen; ebenso sicher ist es aber, daß sie nicht dem, was die Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes in einem Inertialsystem ausdrücken soll, ganz genau entsprechen kann. Alle Massen und die näheren im besonderen wirken auf μ so ein, daß sich dieser Punkt tatsächlich nicht gleichförmig und geradlinig in Bezug auf ein Inertialsystem bewegt und ohne nähere Untersuchung können wir nicht einmal sagen, ob diese Abweichung nicht sehr merklich ist. Man

[1]) Mechanik, S. 248.

muß also die wirkliche Bewegung von μ unter allen Umständen durch Abstraktion idealisieren. Wie weit man die Abstraktion treibt, scheint mir von keiner ausschlaggebenden Bedeutung zu sein und man wird demnach berechtigt sein, von diesen und jenen Massen zu abstrahieren, da man ganz ohne Ausführung eines solchen Prozesses doch nicht auskommen kann. Hält man daran fest, so führt auch der Machsche Ansatz zu der Nötigung, nur sehr weite und isolierte Massen zur Orientierung zu verwenden und dann kommt man wieder auf denselben Weg, auf den die obigen Betrachtungen geführt haben und den ja auch die Langeschen Festsetzungen, in gewissem Sinne, anweisen.

Die wirkliche Festlegung eines Inertialsystems mit Hilfe sehr weiter isolierter Massen ist geknüpft an eine niemals abbrechende Reihe von Korrekturen von Beobachtungen feststellbarer Tatsachen und sie verlangt also strenge genommen die Ausführung eines unendlichen Prozesses, der natürlich nie zu Ende geführt werden kann. An sich wird hiermit allerdings nichts anderes verlangt, was nicht auch sonst in allen Naturwissenschaften verlangt wird; da alle Beobachtungen ungenau sind, wird die immer erneute Nötigung zu Korrekturen niemals aufhören.

Bei der Festlegung eines Inertialsystems würde es also darauf ankommen, die Entfernung immer weiter entfernter Fixsterne abschätzen zu lernen und dann die näheren als zur Orientierung nicht geeignet ausscheiden zu lassen. Da tritt nun eine neue und wie es scheint unüberwindliche Schwierigkeit entgegen. Alle Erfahrungen in der Fixsternastronomie drängen zu der Annahme, daß die sichtbaren, also zunächst der Beobachtung allein zugänglichen Weltkörper ein räumlich begrenztes und zwar nicht einmal so ungeheuer großes, wie man früher meinte, System bilden, über dessen Grenzen hinaus bisher jede Wahrnehmung ausgeschlossen war und wohl auch immer bleiben wird. Dadurch ist es unmöglich, den oben erwähnten Abstraktionsprozeß beliebig weit fortzusetzen und das Inertialsystem kann auf diesem Wege nur bis zu einer gewissen beschränkten Genauigkeit festgelegt werden. Diese Beschränkung bezieht sich natürlich nur auf die tatsächliche, nicht begriffliche Festlegung. So bleibt für die erstere nur der bereits oben erwähnte, durchaus gangbare, bereits von Newton angezeigte und von Carl Neumann näher beleuchtete Weg übrig.

Nicht unnötig dürfte es sein, am Schluß dieser Betrachtungen noch einmal darauf hinzuweisen, daß mit der festeren Begründung des Trägheitsgesetzes einzig und allein die Absicht verbunden sein kann, den wahren Sinn der Grundlagen des wissenschaftlichen Systems, das wir Mechanik nennen, festzustellen. Von diesem Standpunkt hat es kein Interesse, zu untersuchen, ob unter allen Umständen die jetzige Mechanik sich als das zweckmäßigste wissenschaftliche System für die Erklärung aller denkbaren Vorgänge bewähren muß. Indessen wird uns doch die fast unabsehbare Reihe von Erfahrungen, die bisher in dieser Richtung gesammelt worden sind, einigermaßen zuversichtlich machen und uns die Hoffnung offen lassen, es möchten nicht leicht rein mechanische Tatsachen auftreten, welche die bisher benützten Grundsätze als hinfällig und unbrauchbar oder selbst nur als unzweckmäßig erweisen würden.

3.

Die Aufgabe der tatsächlichen Festlegung eines Inertialsystems fällt der Astronomie zu und diese Festlegung hat gegen das empirisch hergestellte, in der Astronomie gebräuchliche Koordinatensystem zu erfolgen. Legen wir die Anfänge beider Systeme in den Schwerpunkt des Planetensystems, so wäre das nur erlaubt, wenn das Planetensystem wirklich isoliert wäre. Selbstverständlich ist das im strengen Sinne des Wortes nicht der Fall, aber diese Annahme genügt, wenn die Abweichungen in langen Zeiträumen innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Beobachtungen bleiben. Diese Forderung als strenge erfüllt nachzuweisen, ist gegenwärtig unmöglich und man muß sich mit mehr oder weniger sicheren Abschätzungen begnügen. Auf Schwierigkeiten, die hierbei auftreten, haben Carl Neumann[1]) und ich[2]) hingewiesen. Es steht danach, trotz der Einwände, die hiergegen gemacht worden sind, fest, daß man sich entschliessen muß, die universelle und strenge Gültigkeit der Newtonschen Attraktionsformel zu leugnen, wenngleich nur so kleine Korrekturen notwendig sein mögen, daß deren Folgen innerhalb des Planetensystems und vielleicht beträchtlich darüber hinaus unbemerkbar bleiben. Diese Korrekturen müssen unter allen Umständen in der Richtung liegen, daß die Gravitationswirkung gegenüber der Newtonschen Formel schneller mit der Entfernung abnimmt. Bedenkt man weiter, daß wir mit einiger Sicherheit die uns umgebenden Fixsterne als ein endliches und durch weite Zwischenräume von eventuell anderen vorhandenen Systemen getrenntes System ansehen müssen, so wird vielleicht die Wirkung der Anziehungen jener anderen Systeme vernachlässigt werden können. Dann würde es in absehbarer Zeit möglich sein, eine obere Grenze für die Gesammtanziehung der Fixsterne anzugeben, denn es ist anzunehmen, daß die Studien über die räumliche Verteilung der Sterne zu bestimmten zahlenmäßigen Resultaten führen werden. Zur Ableitung einer solchen oberen Grenze genügt die Annahme des Newtonschen Gesetzes. Laplace[3]) hat die Größe der Anziehung eines Sternes berechnet und danach die Überzeugung gewonnen, daß in der Tat unser Sonnensystem als ein isoliertes aufzufassen ist. Die Wichtigkeit der Sache wird es rechtfertigen, wenn ich hier eine kurze Darstellung von einem etwas anderen Standpunkt aus folgen lasse.

Das Sonnensystem befindet sich in dem von den Fixsternen geschaffenen Kraftfeld. Ein Punkt mit der Masse 1 wird an einer Stelle, deren Koordinaten in einem Inertialsystem, dessen Anfang etwa im Schwerpunkt des ganzen Fixsternsystems liegt,

---

[1]) C. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip etc. Leipzig 1896.

[2]) Münchener Sitzungsberichte 1896 und A. N. Nr. 3273.

[3]) Laplace, Mécanique célecte, Livre VI, Chapit. XVIII und Connaissance des temps pour l'an 1829.

$\xi\,\eta\,\zeta$ sein mögen, den Kraftkomponenten X, Y, Z ausgesetzt sein und diese verändern sich mit ξ, η, ζ. Strenge genommen werden sie auch die Zeit explizite enthalten; diese Abhängigkeit kann aber vorerst sicherlich unberücksichtigt bleiben.

Sind nun $M, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ Masse und Inertialkoordinaten der Sonne, m, ξ, η, ζ dieselben Größen für einen Planeten, so hat man:

$$\frac{d^2 \xi_0}{d t^2} = k^2 \Sigma m \frac{\xi - \xi_0}{r^3} + X_\odot$$

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = k^2 M \cdot \frac{\xi_0 - \xi}{r^3} + k^2 \Sigma_1 \frac{m_1 (\xi_1 - \xi)}{\Delta_1^{\,3}} + X$$

Die Σ ist auf alle Planeten, Σ_1 auf alle Planeten mit Ausnahme des betrachteten auszudehnen. Ferner ist r der Radiusvektor der Planeten, Δ_1 seine Entfernung von einem anderen Planeten, $X_\odot$ und X die Werte von X an den Stellen ξ_0, η_0, ζ_0 und ξ, η, ζ.

Für den Schwerpunkt $\Xi\,Y\,Z$ des Planetensystems ist:

$$(M + \Sigma m) \frac{d^2 \Xi}{dt^2} = M X_\odot + \Sigma m X$$

und für die relativen Koordinaten $x\,y\,z$ des betrachteten Planeten gegen die Sonne ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 (M + m) \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} + (X - X_\odot)$$

und ähnliche für y und z. Hier bedeutet R die gewöhnliche, aus der Anziehung der Planeten hervorgehende Störungsfunktion. Die Veränderung der Komponenten $X\,Y\,Z$ mit den Koordinaten wird sicher sehr klein sein. Erlaubt man sich in der betreffenden Taylorschen Reihe die Glieder 2. Ordnung fortzulassen und nennt man $X_0\,Y_0\,Z_0$ die Werte von $X\,Y\,Z$ im Schwerpunkt des Planetensystems, so wird

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 \Xi}{dt^2} = X_0; \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = Y_0; \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = Z_0 \\
&\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)_0 z \\
&\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right)_0 z \\
&\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z} + \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)_0 z
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hier bedeuten die eingeklammerten Werte der Differentialquotienten Werte im Schwerpunkt.

Der Schwerpunkt des Planetensystems mag sich vielleicht nicht unbeträchtlich in dem vorliegenden Koordinatensystem bewegen. Nach der oftmals gemachten Annahme, daß er sich im Jahre etwa um $\frac{4}{8}\pi$ Erdbahnradien weiter bewegt, würde er sich in tausend Jahren immerhin um rund 140 Neptunsweiten verschieben, was einer Parallaxe von 49″ entspricht, die etwa $\frac{1}{100}$ der Entfernung der allernächsten Sterne gleichkommt. Ob innerhalb solcher Räume und Zeiten die Differentialquotienten $\left(\frac{dX}{d\xi}\right)_0$ etc. als konstant angesehen werden dürfen, ist natürlich zweifelhaft. Indessen wird man wohl auch dann nicht ganz unsichere Abschätzungen mit dieser Annahme erhalten.

Nennt man dann noch V das Potential der Sternanziehung, so werden also die Koeffizienten:

$$2a_{00} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right)_0; \quad 2a_{01} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0, \quad 2a_{02} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \zeta}\right)_0$$
$$2a_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\right); \quad 2a_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \zeta}\right)_0, \quad 2a_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}\right)_0$$

wo $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, konstant sein und die Bewegung eines Planeten um die Sonne geschieht so, daß durch die Fixsterne eine Störung hinzutritt, deren Störungsfunktion

$$F = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + - + a_{22}z^2 \quad (2)$$

eine quadratische Form der Variablen $x\,y\,z$ ist. Wirken die Sterne nach dem Newtonschen Gesetz, so besteht die Gleichung:

$$a_{00} + a_{11} + a_{22} = 0$$

Es macht nun nicht die geringste Schwierigkeit, die Veränderung der Bahnelemente eines Planeten infolge der Störungsfunktion F zu ermitteln. In jedem Falle kann man sich auf die Betrachtung der säkularen Veränderungen beschränken. Man hat zu diesem Zweck den säkularen Teil S der Funktion F zu bilden und hierzu sind die säkularen Teile der in (2) vorkommenden variablen Größen aufzusuchen. Ich will solche säkulare Teile durch ein vorgesetztes S bezeichnen.

Mit Benutzung der üblichen Bezeichnungsweise (a, e, π, Ω, i, n = halbe große Achse, Exzentrizität, Perihel-, Knotenlänge, Neigung und mittlere Bewegung) ergibt sich leicht:

$$S(x^2) = \frac{a^2}{2}\left[1 - \sin^2\Omega\sin^2 i + 4e^2 - 5e^2\sin^2\pi\right]$$

$$S(y^2) = \frac{a^2}{2}\left[1 - \cos^2\Omega\sin^2 i + 4e^2 - 5e^2\cos^2\pi\right]$$

$$S(z^2) = \frac{a^2}{2}\sin^2 i$$

$$S(xy) = \frac{a^2}{4}\left[\sin 2\Omega\sin^2 i + 5e^2\sin 2\pi\right]$$

$$S(xz) = -\frac{a^2}{2}\sin\Omega\sin i$$

$$S(yz) = +\frac{a^2}{2}\sin\Omega\sin i$$

und mit diesen Ausdrücken nach (2):

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial S}{\partial\pi} = \frac{5}{2}a^2 e\left[(a_{11} - a_{00})\sin 2\pi + 2a_{01}\cos 2\pi\right]$$

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial S}{\partial e} = -5a^2\left[a_{00}\sin^2\pi + a_{11}\cos^2\pi - a_{01}\sin 2\pi - \frac{4}{5}(a_{00} + a_{11})\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial i} = a^2 \cos i \, [(-a_{00} \sin^2 \Omega - a_{11} \cos^2 \Omega + a_{22} + a_{01} \sin 2\,\Omega) \sin i - a_{02} \sin \Omega + a_{12} \cos \Omega]$$

$$\frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial S}{\partial \Omega} = \frac{a^2}{2} \cdot [(a_{11} - a_{00}) \sin 2\,\Omega \sin i + 2\,a_{01} \cos 2\,\Omega \sin i - 2\,a_{02} \cos \Omega - 2\,a_{12} \sin \Omega]$$

Diese Ausdrücke hätte man in die bekannten Formeln für die Variation der Konstanten einzusetzen, was so einfach sich vollzieht, daß nicht weiter darauf einzugehen nötig ist.

Zur Abschätzung wird die Bemerkung genügen, daß sich die säkularen Veränderungen $\frac{de}{dt}$, $e\frac{d\pi}{dt}$, $\sin i \frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$ ergeben, wenn man die angegebenen Differentialquotienten mit $\frac{an}{k^2}$ und mit Zahlen, die höchstens einige Einheiten betragen, multipliziert. Berechnet man den Rang einer Größe dadurch, daß man sie in Klammern setzt, so würde die Gleichung

$$\{A\} = a$$

aussagen, daß der absolute Wert von A gleich ist a multipliziert mit einer Zahl, die höchstens einige Einheiten betragen kann. Auf diese Weise ergibt sich, daß für jedes der 4 Bahnelemente E

$$\left\{\frac{dE}{dt}\right\} = \frac{a^3 n}{k^2} \{a_{\varkappa\lambda}\}$$

Danach könnte man also, falls die $a_{\varkappa\lambda}$ gegeben wären, die säkularen Veränderungen der Bahnelemente leicht abschätzen.

Es soll nun beispielsweise eine ganz einseitige Massenverteilung angenommen werden, welche also voraussichtlich ganz außerordentlich übertrieben große $a_{\varkappa\lambda}$ ergibt. Nimmt man nämlich an, daß alle Fixsterne in einer bestimmten Richtung in der Entfernung ϱ vom Planetensystem in einer Masse μ vereinigt wären, dann ergibt sich leicht

$$\{a_{\varkappa\lambda}\} = \frac{k^2 \mu}{\varrho^3}$$

und demzufolge

$$\left\{\frac{dE}{dt}\right\} = \mu \cdot n \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2$$

Setzt man $\mu = \lambda \cdot 10^8$ Sonnenmassen, ϱ entsprechend einer Parallaxe $0''01 \cdot \delta$, so ergibt sich für Neptun, wo $\frac{dE}{dt}$ numerisch am größten wird, im Jahrhundert

$$\{dE\} = 0''00027 \cdot \lambda \cdot \delta^2$$

Nach dem, was wir — es ist das allerdings wenig genug — über die Massen und Verteilung der Fixsterne wissen, wird man λ und δ kaum größer als 1 annehmen dürfen, δ ist sogar wahrscheinlich ein kleiner Bruch. Danach darf man selbst nach vielen Jahrhunderten in den planetarischen Bewegungen um die Sonne wohl kaum einen bemerkbaren Einfluß der Anziehung der zu unserem Fixsternsystem gehörenden Massen erwarten. Ein wenig anders mögen sich die Verhältnisse für die Bewegung des Schwerpunktes unseres Sonnensystems verhalten. Die Kraftkomponenten sind hier — bei Festhaltung des herangezogenen Beispiels — nur vom Range $\frac{k^2 \Sigma m}{\varrho^2}$. Ich habe schon bei früherer Gelegenheit[1]) gezeigt, daß man wohl kaum bei den Fixsternen selbst in langen Zeiträumen auf eine bemerkbare Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung rechnen wird dürfen, natürlich von Ausnahmefällen abgesehen.

Der Krümmungsradius ϱ der Bahn des Schwerpunktes des Planetensystems ist gegeben durch

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}}$$

wo ds das Bogenelement ist.

---

1) Astronomische Nachrichten, Nr. 3675.

Nennt man also V die Geschwindigkeit und P die Größe der einwirkenden Kraft, so wird der Rang von ϱ durch

$$\{\varrho\} = \frac{V^2}{P}$$

gegeben sein. Der Winkel $d\alpha$ zwischen zwei benachbarten Tangenten an die Bahn ist dann

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dt} = \frac{V}{\varrho}$$

Also

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{P}{V}$$

und im obigen Beispiel:

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{k^2\mu}{V\cdot\varrho^2}$$

Bei Festhaltung der astronomischen Einheiten ist $k^2 = c^2$, wo c die Bahngeschwindigkeit der Erde ist. Demnach hat man

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{c^2\mu}{V\cdot\varrho^2}$$

Setzt man, wie oben, $\mu = \lambda\cdot 10^8$; ϱ entsprechend einer Parallachse $0''01\cdot\delta$ so ist $\Delta\alpha''$ die Änderung von α im Jahrhundert in Bogensekunden

$$\Delta\alpha'' = 31''\cdot\left(\frac{c}{V}\right)\cdot\lambda\delta^2$$

Für $\frac{c}{V} = \frac{3}{2}$, $\lambda = \delta = 1$ würde also eine Richtungsänderung in der Bewegung des Schwerpunktes des Sonnensystems von $46''$ im Jahrhundert folgen, eine Zahl die voraussichtlich noch viel zu hoch gegriffen ist.

4.

Die Bewegungen der Planeten werden auf ein gewisses empirisches Koordinatensystem bezogen. Dasselbe hat im Laufe der Zeit eine recht solide Festlegung erfahren. Das Nähere ist in dem soeben erschienenen Band VI_2 der mathematischen Enzyklopädie in den Artikeln von E. Anding und F. Cohn so eingehend auseinandergesetzt, daß dem wohl kaum etwas hinzuzufügen wäre. Indessen ist ohne weiteres durch eine einfache Betrachtung der Resultate der messenden Astronomie einzusehen, daß man von selbst darauf geführt wurde, eine in einem Inertialsystem feste Ebene z. B. die Ebene der Erdbahn zu einer bestimmten Epoche als Fundamentalebene einzuführen und diese gegen die Fixsterne oder vielmehr die Fixsterne gegen jene Ebene mit immer steigender Genauigkeit festzulegen. Könnte man nun in dieser Ebene eine feste Inertialrichtung gegen die Fixsterne bestimmen, so wäre ein Inertialsystem auch praktisch definiert. Das ist aber nicht mit genügender Genauigkeit möglich, weil der Durchschnittspunkt von Äquator und Ekliptik, welcher nach der XAchse des empirischen Systems weist, sich verschiebt und diese Verschiebung, in ihrem säcularen Teil wenigstens, nicht genau genug theoretisch berechnet werden kann. Hierzu wäre eine genauere Kenntnis der Differenzen der Trägheitsmomente des Erdkörpers nötig, die anderseitig nicht beschafft werden kann. So bleibt eine Unsicherheit in der Bestimmung der erforderlichen Inertialrichtung bestehen, die nur durch Zuhülfenahme von gewissen Hypothesen von zum Teil sehr zweifelhafter Sicherheit anscheinend behoben worden ist.

Jedenfalls werden tatsächlich in Bezug auf dieses empirische System die Differentialgleichungen der Bewegung für die Planeten aufgestellt und integriert und die hier auftreten-Konstanten als Bahnelemente behandelt und aus den Beobachtungen bestimmt. Da die Differentialgleichungen nur richtig sind, wenn sie sich auf ein Inertialsystem beziehen, so wird, wenn eine von der Zeit abhängige Verlagerung der beiderlei Achsen gegeneinander vorhanden ist, die Theorie der Planeten-bewegung unvollständig sein. Man kann nun, um diese Unvollkommenheit aufzudecken, sich damit begnügen von den Störungen durch die Planeten abzusehen und die Keplersche Bewegung allein zu betrachten. Sind in dem empirischen System die Koordinaten eines Planeten $x' y' z'$, so wird angenommen, daß die Bewegung durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \mu \frac{x'}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} + \mu \frac{y'}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} + \mu \frac{z'}{r^3} = 0$$

bestimmt ist. In Wirklichkeit gelten aber die analogen Gleichungen nur für die Koordinaten $x y z$ in einem Inertialsystem, wo also ist:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} = 0$$

während die empirischen Koordinaten nunmehr Gleichungen von der Form

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \mu \frac{x'}{r^3} = X \tag{1}$$

genügen und demnach in der ausgebildeten Planetentheorie die als störende Kräfte interpretierteren Komponenten $X\,Y\,Z$ vernachläßigt worden sind. Es handelt sich also um die Wirkung dieser störenden Kräfte auf die Planetenbahnelemente, die durch sie verändert erscheinen. Es ist leicht die allgemeinen Formeln für eine beliebig gegen ein Inertialsystem bewegtes empirisches System abzuleiten. Da es sich indessen offenkundig nur um sehr kleine Veränderungen handeln kann, wird es genügen anzunehmen, daß die gegenseitigen Neigungen der gleichnamigen Achsen beider Systeme so klein seien, daß ihre zweiten Potenzen, innerhalb des betrachteten Zeitraumes, vernachläßigt werden können.

Zwischen den beiderlei Koordinaten bestehen nun die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= a x + b y + c z \\ y' &= a' x + b' y + c' z \\ z' &= a'' x + b'' y + c'' z \end{aligned}$$

Werden die 2. Potenzen der oben genannten Neigungen fortgelassen, so folgt bekanntlich daraus:

$$b + a' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad c' + b'' = 0$$

und wenn man setzt:[1])

$$a' = -b = r_1; \quad -a'' = c = q; \quad b'' = -c' = p$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - r_1 y + q z \\ y' &= y - p z + r_1 x \\ z' &= z - q x + p y \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

und mit derselben Genauigkeit:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + r_1 y' - q z' \\ y &= y' + p z' - r_1 x' \\ z &= z' + q x' - p y' \end{aligned}\right\} \qquad (2\,\mathrm{a})$$

Die $p\,q\,r_1$ sind bekanntlich die Drehkomponenten des einen Koordinatensystems um das andere. Die Gesamtdrehung erfolgt um eine Achse mit den Neigungswinkeln α, β, γ gegen das System $x'\,y'\,z'$ mit einer Winkeldrehung Ω und es ist

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r_1^2}, \quad \Omega \cos\alpha = p, \quad \Omega \cos\beta = q, \quad \Omega \cos\gamma = r_1$$

Sind beide Koordinatensysteme rechtsdrehende (sog. Korkzieher-)Systeme, so daß also die x' Achse durch eine positive Drehung um die z' Achse um 90 Grad in die y' Achse gebracht werden kann und in ähnlicher Weise die y' Achse in die z' Achse und die z' Achse in die x' Achse, so bedeuten positive $p\,q\,r_1$ positive Drehungen, die um die Achsen des empirischen Systems $x'\,y'\,z'$ ausgeführt werden müssen, um zum Inertialsystem $x\,y\,z$ zu führen. Die in der Astronomie üblichen Systeme der Rektaszensionen und Deklinationen, ebenso wie der Längen und Breiten sind solche rechtsdrehende Systeme. Die $p\,q\,r_1$ können im allgemeinen beliebige Funktionen der Zeit sein. Ich will mich, was vorderhand ausreichend sein

[1]) Vgl. u. A. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. Leipzig 1900, I, S. 201.

dürfte, mit der Annahme begnügen, daß $p\,q\,r_1$ sich proportional mit t ändern, so daß sie für $t = 0$ selbst verschwinden. Es soll also gesetzt werden

$$p = w_x t, \qquad q = w_y t, \qquad r_1 = w_z t$$
$$w_x = w \cos\alpha, \qquad w_y = w \cos\beta, \qquad w_z = w \cos\gamma$$

wo die Drehkomponenten $w_x\,w_y\,w_z$ um die 3 Achsen als unabhängig von t anzusehen sind.

Aus den Gleichungen (2 a) folgt dann:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - r_1 \frac{dy'}{dt} + q \frac{dz'}{dt} - y' w_z + z' w_y$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - r_1 \frac{d^2y'}{dt^2} + q \frac{d^2z'}{dt^2} - 2 w_z \frac{dy'}{dt} + 2 w_y \frac{dz'}{dt}$$

und aus (1) ergeben sich dann die Störungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} X &= -\,2 w_z \frac{dy}{dt} + 2 w_y \frac{dz}{dt} \\ Y &= -\,2 w_x \frac{dz}{dt} + 2 w_z \frac{dx}{dt} \\ Z &= -\,2 w_y \frac{dx}{dt} + 2 w_x \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hierin können nach Belieben die $x\,y\,z$ durch $x'\,y'\,z'$ ersetzt werden. Diesen Störungskomponenten entsprechend werden die Bahnelemente periodische und säkulare Veränderungen erleiden. Zur Ermittlung dieser wird man am besten die Kraftkomponenten R, S, W, in der Richtung des Radiusvektor, senkrecht darauf in der Bahnebene und senkrecht auf die Bahnebene, berechnen. Es seien $x\,y\,z$ Ekliptikalkoordinaten, ferner sollen die früheren Bezeichnungen festgehalten werden, außerdem v die wahre Anomalie, $u = v + \pi - \Omega = v + w$ und $p = a\,(1 - e^2)$ sein. Man hat dann bekanntlich:

$$\frac{x}{r} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$$

$$\frac{y}{r} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$$

$$\frac{z}{r} = \sin u \sin i$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\cos\Omega(\sin u + e\sin\omega) + \sin\Omega\cos i(\cos u + e\cos\omega)\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\sin\Omega(\sin u + e\sin\omega) - \cos\Omega\cos i(\cos u + e\cos\omega)\right]$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[\sin i\,(\cos u + e\cos\omega)\right]$$

Bezeichnet man noch:

$$\begin{aligned} A &= -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i \\ B &= -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i \\ C &= -\cos u \sin i \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} R &= X\cdot\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} + Z\cdot\frac{z}{r} \\ S &= X\cdot A + Y\cdot B + Z\cdot C \\ W &= X\sin\Omega\sin i - Y\cos\Omega\sin i + Z\cos i \end{aligned}$$

Die weitere Ausrechnung ist mit Hilfe der Formeln für die Keplersche Bewegung leicht auszuführen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} D &= \cos\alpha \sin\Omega \sin i - \cos\beta \cos\Omega \sin i + \cos\gamma \cos i \\ \Delta &= \cos\alpha \sin\Omega \cos i - \cos\beta \cos\Omega \cos i - \cos\gamma \sin i \\ E &= \cos\alpha \cos\Omega + \cos\beta \sin\Omega \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{2w}{r}\sqrt{\mu p}\,D \\ S &= +2we\sin v\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,D \\ W &= +2w\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\Delta\sin u + E\cos u - \Delta e\sin\omega + Ee\cos\omega\right] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hiermit ergeben sich nun die Differentialquotienten der Bahnelemente nach der Zeit. Die periodischen Störungen entstehen durch das Auftreten von Zentrifugalkräften bei der Rotation des empirischen Systems um das Inertialsystem, wobei indessen nicht vergessen werden darf, daß mit w^2 multiplizierte Glieder fortgelassen worden sind.

Man findet leicht:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}}\left(R e \sin v + S\frac{p}{r}\right) = 0$$

a bleibt demnach, wenn man nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt, völlig konstant. Nennt man E die exzentrische Anomalie, so wird

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left(R \sin v + S(\cos v + \cos E)\right) = -2wD\frac{r}{a}\sin v$$

$$\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} Wr \sin u = \frac{2w}{p} \times$$

$$[-\varDelta r \sin^2 u + Er \sin u \cos^2 u - \varDelta e \sin\omega \cdot r \sin u + Ee \cos\omega \cdot r \sin u]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} Wr \cos u = \frac{2w}{p} \times$$

$$[-\varDelta r \sin u \cos u + Er \cos^2 u - \varDelta e \sin\omega \cdot r \cos u + Ee \cos\omega \cdot r \cos u]$$

$$e\frac{d\pi}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[-R\cos v + S\sin v\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right] + e \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt}$$

$$= \frac{2w\varDelta}{p}\left[r\cos v(1 + e^2) + 2er\right] + e\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \cdot \sin i\,\frac{d\Omega}{dt}.$$

Offenbar darf man zunächst nur darauf rechnen, daß die säkularen Veränderungen eventuell merkbar werden. Um diese zu erhalten, sei bemerkt, daß man mit der oben eingeführten Bezeichnung für säkulare Glieder erhält:

$$S(r) = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right); \quad S(r\sin v) = S(r \sin v \cos v) = 0$$

$$S(r\cos v) = -\frac{3}{2}ae; \quad S(r\cos^2 v) = a\left(e^2 + \frac{1}{2}\right); \quad S(r\sin^2 v) = \frac{a}{2}(1 - e^2)$$

und hiermit

$$S(r \sin u) = -\frac{3}{2} a e \sin \omega \qquad S(r \sin^2 u) = \frac{a}{2}[1 - e^2 + 3 e^2 \sin^2 \omega]$$

$$S(r \cos u) = -\frac{3}{2} a e \cos \omega \qquad S(r \cos^2 u) = \frac{a}{2}[1 + 2 e^2 - 3 e^2 \sin^2 \omega]$$

$$S(r \sin u \cos u) = \frac{3}{2} a e^2 \sin \omega \cos \omega.$$

Daraus folgt sofort

$$S\left(\frac{da}{dt}\right) = S\left(\frac{de}{dt}\right) = 0$$

$$S\left(\sin i \frac{d\Omega}{dt}\right) = -\Delta w; \quad S\left(\frac{di}{dt}\right) = + w \cdot E$$

$$S\left(e \frac{d\pi}{dt}\right) = e w \left[D - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \cdot \Delta\right]$$

und wenn diese Formeln ausführlich hingeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} S\left(e \frac{d\pi}{dt}\right) &= e\left\{w_x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \sin \Omega - w_y \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \cos \Omega + w_z\right\} \\ S\left(\sin i \frac{d\Omega}{dt}\right) &= -w_x \cos i \sin \Omega + w_y \cos i \cos \Omega + w_z \sin i \\ S\left(\frac{di}{dt}\right) &= w_x \cos \Omega + w_y \sin \Omega. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Formeln stimmen, wie zu erwarten, vollkommen mit denen des Herrn Anding[1]) überein, die er einfach durch die Transformation der Elemente auf ein gegen das empirische bewegte Inertialsystem abgeleitet hat. Hier erscheinen sie als spezieller Fall allgemeinerer Betrachtungen. Die einfachste Anwendung dieser Formeln zur Ermittlung von w_x w_y w_z hat Herr Anding vorgenommen. Diese war ermöglicht dadurch, daß S. Newcomb[2]) die säkularen Veränderungen der Bahnelemente der vier kleinen Planeten, Merkur, Venus, Erde, Mars sowohl theoretisch als auch empirisch abgeleitet hat.

---

[1]) Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. VI_2.

[2]) The Elements of the four inner Planets. Washington 1895, S. 109.

Die Differenzen der so gefundenen zweierlei Werte werden als mit den obigen S Werten übereinstimmend angenommen werden können, wenn man voraussetzen darf, daß im Übrigen die theoretische Berechnung der Störungen vollständig war. Dies trifft bekanntlich für das Merkurperihel nicht zu und es muß die große Abweichung zwischen dem empirischen und theoretischen Werte der Säkularveränderung dieses Elementes außer Betracht gelassen werden. Tut man dies, so ergeben sich folgende Werte:

$$w_x = 0\overset{''}{.}00 \pm 0\overset{''}{.}15\,; \quad w_y = 0\overset{''}{.}03 \pm 0\overset{''}{.}15\,; \quad w_z = 7\overset{''}{.}50 \pm 2\overset{''}{.}30$$

zugleich mit den mittleren Fehlern, welche mit den Angaben Herrn Andings fast vollkommen übereinstimmen.

Wie man auch die Zuverlässigkeit der Newcombschen Zahlen, die sehr vergrößert in das Resultat eingehen, beurteilen mag — auch hierin wird man Herrn Anding beistimmen müssen — sicher ist es, daß das empirische System der Astronomie sich im Jahrhundert um mehrere Bogensekunden um ein Inertialsystem drehen wird. Daß von den 3 Drehkomponenten nur w_z merkbar ist, ist durch die Art der Orientierung des empirischen Systems von selbst erklärt.

§ 5.

Es ist hier der Ort, ein Hilfsmittel zur Sprache zu bringen, auf das seit Laplace oftmals als auf ein besonders taugliches zu ähnlichen Betrachtungen, wie die vorliegenden, hingewiesen worden ist. Nennt man $x\,y\,z$ die Inertialkoordinaten einer der planetarischen Massen, so gelten die 3 Flächensätze:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= c_1 \\ \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= c_2 \\ \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= c_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

worin die c Konstante sind. Nimmt man ein zweites Koordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$ mit demselben Anfang und setzt man

$$\cos(\zeta, x) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \quad \cos(\zeta, y) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}},$$
$$\cos(\zeta, z) = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

so ist die $\xi\,\eta$ Ebene die Laplacesche unveränderliche Ebene. In Bezug auf sie hat die Konstante der Flächengeschwindigkeiten den größten Wert, den sie erreichen kann, nämlich $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ und in Bezug auf jede darauf senkrechte Ebene ist sie $=$ Null. Aus dieser Bedeutung der unveränderlichen Ebene folgen gewisse Vorteile für die analytische Behandlung von Bewegungsproblemen, wenn man diese Ebene zu einer Koordinatenebene wählt. Da sie gegen das Inertialsystem festliegt, so kann sie, allerdings nur in beschränktem Umfange, zur Orientierung des empirischen Systems gegen ein Inertialsystem benutzt werden. Dazu wird man die zu (1) analogen Ausdrücke für die Koordinaten $x'\,y'\,z'$ im empirischen System zu bilden haben. Mit den Bezeichnungen des letzten Artikels ergibt sich Folgendes: Man setze zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l|l} \Sigma m\,(y^2 + z^2) = A & \Sigma m\,y\,z = c' \\ \Sigma m\,(z^2 + x^2) = B & \Sigma m\,z\,x = c'' \\ \Sigma m\,(x^2 + y^2) = C & \Sigma m\,x\,y = c''' \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dann wird:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m\left(x'\dfrac{dy'}{dt} - y'\dfrac{dx'}{dt}\right) = c'_3 = c_3 + w_x(tc_2 - c'') - w_y(tc_1 + c') + w_z\cdot C \\ \Sigma m\left(y'\dfrac{dz'}{dt} - z'\dfrac{dy'}{dt}\right) = c'_1 = c_1 + w_x\cdot A + w_y(tc_3 - c''') - w_z\cdot(tc_2 + c'') \\ \Sigma m\left(z'\dfrac{dx'}{dt} - x'\dfrac{dz'}{dt}\right) = c'_2 = c_2 - w_x(tc_3 + c''') + w_y\cdot B + w_z(tc_1 - c') \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die durch (2) definierten Größen sind mit den Umläufen der Planeten periodisch veränderlich. Man wird auch hier die periodischen Glieder fortlassen können, da sich voraussichtlich nur die säkulären Glieder, die eben mit der Zeit beliebig groß werden können, als bemerkbar erweisen werden. Da bekanntlich die 3 Flächensätze nicht unabhängig von einander sind, vielmehr rein formal aus zweien der dritte folgt, so kann man aus (3), wie von anfang an klar war, die 3 Rotationskomponenten $w_x\, w_y\, w_z$ nicht getrennt bestimmen. Abgesehen hiervon hat die Verwendung der Flächensätze bei der Orientierung des empirischen Systems noch andere Bedenken. Da die Planetenmassen als Faktoren in den Summen erscheinen, werden die großen Planeten den wesentlichen Anteil an den Summen haben. Tatsächlich erhält man schon eine sehr angenährt richtige Bestimmung der Lage der unveränderlichen Ebene, wenn man außer Jupiter und Saturn alle andern Planeten außer Acht läßt. In der Hauptsache werden die linken Seiten von (2) also nur durch die großen Planeten bestimmt und Merkur z. B. hat nur einen kaum bemerkbaren Einfluß. Darin ist auch begründet, warum die Integrale der Flächensätze eine so wenig wertvolle und durchgreifende Prüfung für die Richtigkeit der Planetentheorien abgeben. Da die Genauigkeit in den von den großen Planeten herrührenden Gliedern sich nicht in entsprechendem Grade erreichen läßt, könnte die Bewegung von Merkur und Venus total verfehlt berechnet sein und doch würde dadurch die Lage der unveränderlichen Ebene oder was dasselbe ist, die Größen $c_1\, c_2\, c_3$ sich als konstant erweisen.

Eine Eigentümlichkeit besitzen bekanntlich die Integralo der Flächensätze, die in manchen Fällen von Bedeutung sein kann. Sie gelten nämlich für allerlei Arten innerer Kräfte. Die Konstanten $c_1\, c_2\, c_3$ ändern sich nicht, wenn das Newtonsche Gesetz nicht zutreffen oder wenn plötzlich an seine Stelle ein anderes Gesetz wirksam werden sollte, sie bleiben ungeändert bei Explosionen, Zusammenstößen etc. Auf diese Weise sind sie überhaupt keine Kontrolle für die Planetenbewegungen, die für jeden einzelnen Planeten dem Newtonschen Gesetz gemäß erfolgen und den Beobachtungen entsprechend dargestellt werden sollen.

Die Bedeutung der unveränderlichen Ebene scheint demnach in mechanischer Beziehung eine sehr geringe zu sein und es dürfte sich kaum lohnen, ihre Lage im empirischen System mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Wenn dies aber unternommen wird, dann muß man nicht nur alle Mitglieder des Sonnensystems, also auch die Trabanten, mit einbegreifen, was auch gewöhnlich geschieht, sondern man darf auch nicht versäumen, wie Poinsot[1]) zuerst bemerkt hat, die Rotationen der Sonne und der Planeten zu berücksichtigen. Man überzeugt sich leicht, daß die Rotationsmomente der großen Planeten von demselben Range sind, wie der Anteil des Merkur und daß die Rotation der Sonne die Lage der unveränderlichen Ebene durchaus nicht unmerklich verändert. Tatsächlich sind aber die Summen (1) nur konstant, wenn nicht nur alle Massen im Planetensystem, sondern auch ihre vollen Geschwindigkeitskomponenten eingesetzt werden. Auf diesen Punkt hat Poinsot besonderen Nachdruck gelegt und daran sehr weitgehende Aussichten geknüpft, die mathematisch zwar wohlbegründet sind, sich aber tatsächlich niemals werden realisieren lassen. Bildet man nämlich die Summen (1), so erscheinen links die Massen als Faktoren, ferner die Trägheitsmomente der Planeten in Bezug auf zu den $x\ y\ z$ parallele und durch den Schwerpunkt eines jeden Planeten gehende Achsen, multipliziert mit den Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit. Die Summen dieser Ausdrücke müssen konstant sein und wenn man nun zu verschiedenen Zeitepochen die Koordinaten der Schwerpunkte und ihre Geschwindigkeiten, ferner die Lagen der Rotationsachsen und die Rotationsgeschwindigkeiten um sie bestimmt, so könnte man hieraus sowohl die Massen als auch die Trägheitsmomente ableiten. Diese Aussicht ist allerdings verlockend und sie wurde auch von Poinsot mit großer Wärme besprochen. Daß sie aber trotzdem eine nicht realisierbare Utopie ist, auch abgesehen von der Nichtkoinzidenz des empirischen Systems mit einem

---

[1]) L. Poinsot, Mémoire sur la théorie et la détermination de l'équateur du système solaire. Addition zu den „Élémens de Statique". Paris 1830.

Inertialsystem, braucht kaum bemerkt zu werden. Die erforderliche Genauigkeit — eine genügende Variation in den Koeffizienten selbst vorausgesetzt — wird niemals zu erreichen sein, selbst wenn sich die praktische Astronomie in ganz ungeahnter Weise entwickeln sollte.

§ 6.

Zum Schluß sollen noch einige Bemerkungen über den Zusammenhang gemacht werden, in dem die Eigenbewegungen der Fixsterne mit den hier besprochenen Fragen stehen. Ich werde mich indessen auf das Nötigste beschränken, da ich bald Gelegenheit zu finden hoffe, auf einige der zu berührenden Punkte näher einzugehen.

Wählt man den Schwerpunkt des Sonnensystems zum Anfang eines Koordinatensystems ξ, η, ζ, das wir nach den früheren Betrachtungen als ein Inertialsystem ansehen können und ein empirisches System $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ mit demselben Anfang, welches etwa nach dem Äquator orientiert ist, so ist

$$\begin{aligned} \xi' &= \varrho \cos\delta \sin a \\ \eta' &= \varrho \cos\delta \sin a \\ \zeta' &= \varrho \sin\delta \end{aligned}$$

wo a und δ beobachtete Rektaszension und Deklination, ϱ die Entfernung eines Fixsterns bedeuten. Durch Differentiation ergeben sich die viel benutzten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, d\delta &= -d\xi' \sin\delta \cos a + d\eta' \sin\delta \cos a + d\zeta' \cos\delta \\ \varrho \cos\delta \cdot da &= -d\xi' \sin a + d\eta' \cos a \\ d\varrho &= -d\xi' \cos\delta \cos a + d\eta' \cos\delta \sin a + d\zeta' \sin\delta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nimmt man nun ein zweites System $x\,y\,z$, dessen Achsen mit den ξ, η, ζ parallel laufen und dessen Anfang zunächst unbestimmt bleiben mag, so wird:

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b, \quad \zeta = z - c \qquad (2)$$

wo $a\,b\,c$ die Koordinaten des Schwerpunkts des Planetensystems oder mit genügender Annäherung die Sonnenkoordinaten sind.

Man hat nun weiter, indem gegen früher nur r statt r_1 gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi - r\eta' + q\zeta' \\ \eta' &= \eta - p\zeta' + r\xi' \\ \zeta' &= \zeta - q\xi' + p\eta' \end{aligned}$$

Mit Ausnahme vielleicht von einzelnen sehr stark bewegten Sternen wird man $r\,d\eta'$, $q\,d\zeta'$ etc. gegenüber den anderen Gliedern, die durch Differentiation entstehen, für sehr lange Zeiträume vernachlässigen können. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} d\xi' &= dx - da - dr\cdot\eta' + dq\cdot\zeta' \\ d\eta' &= dy - db - dp\cdot\zeta' + dr\cdot\xi' \\ d\zeta' &= dz - dc - dq\cdot\xi' + dp\cdot\eta' \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Denkt man sich (3) in (1) eingesetzt, so erhält man Gleichungen, von denen ein spezieller Fall bei den so vielfach ausgeführten Untersuchungen über die Bewegung des Sonnensystems gewöhnlich benutzt wird. Es sollen nun nur solche dx, dy, dz betrachtet werden, die aus einer Rotation um eine beliebige durch den Anfang gehende Achse mit beliebiger Rotationsgeschwindigkeit entstehen. Demgemäß soll gesetzt werden

$$\begin{aligned} dx &= z\,w_2 - y\,w_3 \\ dy &= x\,w_3 - z\,w_1 \\ dz &= y\,w_1 - x\,w_2 \end{aligned}$$

Dabei sollen die Rotationskomponenten $w_1\,w_2\,w_3$ als beliebige Funktionen des Orts angesehen werden. Dann wäre der allgemeinste Fall, in dem den rechten Seiten der letzten Gleichungen noch etwa die Größen λ, μ, ν hinzuzufügen wären, ebenso leicht zu behandeln, denn man hätte im folgenden nur da, db, dc durch $da - \lambda$, $db - \mu$, $dc - \nu$ zu ersetzen. Doch soll hier davon Abstand genommen werden. Noch ist zu bemerken, daß $w_1\,w_2\,w_3$ Rechtsdrehungen bedeuten, wenn das Koordinatensystem $x\,y\,z$ ein rechtsdrehendes ist.

Führt man noch die Polarkoordinaten A und D desjenigen Punktes ein, nach welchem die Bewegung des Sonnensystems im Inertialsystem $x\,y\,z$ erfolgt und h die Weglänge dieser Bewegung in einer sehr kleinen Zeit, so wird

$$\begin{aligned} da &= h \cos D \cos A \\ db &= h \cos D \sin A \\ dc &= h \sin D \end{aligned}$$

Setzt man dies in (3) und darauf die Werte (3) in (1) ein, so ergibt sich folgendes. Bezeichnet man:

$$\left.\begin{aligned} h \cos D \cos A + b\,w_3 - c\,w_2 &= X_0 \\ h \cos D \sin A + c\,w_1 - a\,w_3 &= Y_0 \\ h \sin D \qquad + a\,w_2 - b\,w_1 &= Z_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

so findet man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, d\delta &= X_0 \sin\delta \cos a + Y_0 \sin\delta \sin a - Z_0 \cos\delta \\ &\quad + (dp + w_1)\,\varrho \sin a - (dq + w_2)\,\varrho \cos a + \mu\varrho \\ \varrho \cos\delta \cdot da &= X_0 \sin a - Y_0 \cos\delta - (dp + w_1)\,\varrho \sin\delta \cos a \\ &\quad - (dq + w_2)\,\varrho \sin\delta \sin a + \varrho \cos\delta \cdot (dr + w_3) \\ d\varrho &= - X_0 \cos\delta \cos a - Y_0 \cos\delta \sin a - Z_0 \sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

In diesen allgemeinen Gleichungen ist durch die Beziehung auf das Inertialsystem schon eine Präzessionskorrektion enthalten. Das in der ersten Gleichung hinzugefügte Glied $\mu\varrho$ bedeutet etwaige Korrektionen der zur Ableitung der Eigenbewegungen in δ benutzten Deklinationssysteme, während eine etwaige Verbesserung der Äquinoktien als in $dr + w_3$ enthalten betrachtet werden kann.

Da die $w_1\,w_2\,w_3$ unbekannte Funktionen von a, δ und ϱ sind, so erlaubt I gar keinen Schluß auf den Apex der Sonnenbewegung; auch darf man nicht übersehen, daß die Fixsternentfernung ϱ im allgemeinen unbekannt ist. Was man bisher über die Eigenbewegungen da und $d\delta$ in Erfahrung gebracht hat — in Bezug auf die spektroskopisch bestimmten $d\varrho$ berechtigt die allzu lückenhafte Erfahrung kaum zu irgend einer Aussage —, zeigt, daß sie für die einzelnen Sterne stark und anscheinend regellos hin- und herschwanken. Allgemeinere Gesetze werden sich demgemäß nur in Mittelwerten für sehr viele Sterne zeigen können und man wird nur in solchen Mittelwerten eine Abhängigkeit vom Ort erkennen. Die Gleichungen I sind dann so zu verstehen, daß die $w_1\, w_2\, w_3$ diese den Mittelwerten entsprechenden Funktionen bedeuten. Man wird also für jeden Stern den Gleichungen eine Größe Δ hinzufügen müssen, die dem Stern individuell zugehört und als ein Fehler, in der einfachsten Annahme von zufälliger Art, zu behandeln ist.

Die weitere Behandlung von I ist natürlich nur möglich, wenn über die Funktionen w, zum mindesten was ihre Form betrifft, Hypothesen gemacht werden. Diese Hypothesen bestimmen in Verbindung mit der Art der Ausgleichung, der Verteilung der Sterne etc., das Koordinatensystem $x\, y\, z$ Infolge dessen kann man nicht immer behaupten, daß die Resultate für verschiedene Sternklassen z. B. für solche von verschiedenen Helligkeiten, sich auf dasselbe Koordinatensystem beziehen, in manchen Fällen wird man eine solche Annahme sogar als sehr unwahrscheinlich erkennen. Hierdurch und noch durch andere Umstände stellen sich einer einwandfreien Interpretation der Resultate über die Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung große, fast unüberwindliche Hindernisse entgegen, worauf hier umsoweniger eingegangen werden soll, als Herr Anding[1]) darüber sehr eingreifende wichtige Untersuchungen angestellt hat.

Gewöhnlich wird nun die Annahme $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ gemacht und außerdem $dp = 0$ gesetzt. Dann kann man auch dr und dq als Verbesserung der Präzessionskonstanten m und n betrachten, so daß

$$\Delta m = dr; \quad \Delta n = -dq$$

Diese beiden Größen stellen bekanntlich nur eine Unbekannte dar, wenn die Planetenpräzession und die Korrektion der Äquinoktien als genügend genau bekannt angesehen werden dürfen.

---

[1]) E. Anding, Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne im Weltraume. München 1901.

Die auf solche Weise spezialisierten Gleichungen I sind außerordentlich oft und zwar mit Benützung sehr verschiedenartigen Materials numerisch verwendet worden. Auch wenn nicht gerade nach diesen unter dem Namen der Airyschen Formeln bekannten Vorschriften gerechnet worden ist, wurden doch fast immer ganz ähnliche Annahmen gemacht, die im Wesentlichen darauf hinauslaufen, daß es Koordinatensystem xyz mit zu Inertialachsen parallelen Achsenrichtungen gibt, für welche sich die Bewegungen dx, dy, dz im Mittel aus einer größeren oder kleineren Anzahl von Sternen genommen, vollständig kompensieren. Auf das rein hypothetische und nicht sehr wahrscheinliche dieser Annahme wurde nachdrücklich von Anding, Kobold,[1] Stumpe[2]) und mir hingewiesen. Eine Berechtigung zu dieser Annahme läßt sich nur aus dem Erfolge ableiten und dieser Erfolg wird weiter nur dadurch konstatiert, daß die so verschiedenartigen Berechnungen meistens zu nicht gerade abnorm abweichenden Werten für die Koordinaten A und D des Apex geführt haben. Daraus wird man allerdings vielleicht schließen dürfen, daß die gemachte Annahme bis zu einem gewissen Grade die wirklichen Verhältnisse darstellt. Indessen muß andererseits konstatiert werden, daß sich fast alle Ableitungen nur auf die im Mittel uns näheren Fixsterne beziehen und daß andere Annahmen noch nicht verfolgt worden sind. Es ist also nicht zu leugnen, daß sich demnach fast alle vorliegenden Untersuchungen mit großer Einseitigkeit nach einer Richtung nur erstrecken. Außerdem haben sich aber auch auf diesem Wege Ergebnisse eingestellt, die bei der Interpretation der gefundenen Zahlen zur Vorsicht mahnen. Es sei hier nur ein solches vor kurzem gefundenes Ergebnis mitgeteilt. Die Herren Dyson und Thackeray[3]) haben durch Vergleichung des neu reduzierten Groombridge Katalogs mit neueren Greenwicher Beobachtungen Eigenbewegungen ab-

---

[1]) Astron. Nachrichten, No. 3284.

[2]) Astron. Nachrichten, Nr. 3348.

[3]) Monthly notices. LXV.

geleitet und aus ihnen mit den sogenannten Airyschen Formeln den Sonnenapex bestimmt, indem sie den für gleiche Flächen am Himmel gebildeten Mitteln der Eigenbewegungen gleiche Gewichte geben und den innerhalb gewisser Größenklassen liegenden Sternen dieselbe Entfernung zuerteilen. So ergab sich[1])

Sterngröße	Anzahl	A	D
1—4.9	200	244°	+ 15°
5.0—5.9	454	268°	+ 27
6.0—6.9	1003	278°	+ 33
7.0—7.9	1239	280°	+ 38½
8.0—8.9	811	272°	+ 43

Hier stellt sich mit zunehmender Sterngröße eine sehr deutliche und bedeutende Vergrößerung von D dar. Ähnliches hat übrigens schon Stumpe gefunden. Der Umstand, daß der Groombridge Katalog nur Sterne, deren $\delta > 38°$ ist, enthält, wird vielleicht von Einfluß gewesen sein, indessen ist es nicht wahrscheinlich, daß hierdurch alles erklärt wird.

Formell nicht sehr verschieden von der Annahme $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, aber allgemeiner, ist die Annahme, daß die w Konstanten sind. An sich ist es von vornherein sehr wahrscheinlich, daß in den Mittelwerten, als Rest gewissermaßen, eine Rotation übrig bleibt und man wird nur über die eventuelle Bemerkbarkeit dieser Rotation verschiedener Meinung sein können. Die Frage, ob dieses konstante Rotationsglied den Hauptteil des systematischen Verlaufs in den Bewegungen der Fixsterne gegen ein System $x\,y\,z$ wiedergibt, mag hier unerörtert bleiben. Wahrscheinlich ist dies nicht der Fall. Zuerst hat wohl E. Schönfeld[2]) darauf aufmerksam gemacht, daß es sich empfehlen dürfte, auf eine solche Rotation des Fixsternhimmels Rücksicht zu nehmen. Leider hat er sich durch einen Fehlschluß — der übrigens seine Formeln, welche

---

[1]) Für die hellsten Sterne sind die a. a. O. gegebenen Zahlen durch irgend welche Druck oder Schreibfehler entstellt. Ich habe die Zahlen für $X\,Y\,Z$ als richtig angewiesen.

[2]) Vierteljahrschrift der Astron. Gesellschaft XVII. S. 355 ff.

in den einfacher gestalteten Formeln I inbegriffen sind, nicht beeinträchtigt hat — verleiten lassen, sofort eine Spezialisierung zu empfehlen, die bisher, soviel ich weiß, nicht beanstandet worden ist. Die Vermutung, daß die Bewegungen der Fixsterne irgend eine Beziehung zur Milchstraße zeigen müssen, ist gewiß berechtigt, wenn man auch gegenwärtig positive Angaben in dieser Richtung nicht machen kann. Schönfeld sagt nun weiter: „Die Beziehungen der mittleren Bewegungen (zur Milchstraße) können in mehrfacher Weise gedacht werden. Am nächsten liegt aber die Annahme, daß die Bewegungen in Ebenen erfolgen, deren Neigungen gegen die Milchstraße klein sind und demgemäß in Richtungen, welche nahezu unter sich und der Milchstraße selbst parallel sind. Ohne Annahme einer solchen Rotation in der Ebene der Milchstraße, wie J. Herschel sie nennt, ist es kaum möglich, das Bestehen der sichtbaren Milchstraße zu erklären: dieselbe müßte sich mit fortschreitender Zeit auflösen und es wäre eigentlich ein Zufall, daß wir gerade zu einer Zeit leben, in der dies noch nicht stattgefunden hat." Daraus glaubte Schönfeld schließen zu müssen, daß eine etwaige gemeinschaftliche Drehung aller Sterne nur annähernd um eine Achse erfolgen könne, die senkrecht auf der Ebene der Milchstraße stände. Es ist aber nicht einzusehen, wie eine solche gemeinschaftliche Drehung, die also als Rest der Mittelwerte der Bewegungen bestehen bleibt, ein Zerfallen der Milchstraße erzeugen soll. Der ganze Fixsternhimmel, und mit ihm auch die Milchstraße, dreht sich wie ein starrer Körper — das sagen auch die Formeln Schönfelds aus — es könnten nur eventuell parallaktische Verschiebungen, wenn das Sonnensystem an der Rotation nicht Teil nimmt, stattfinden. In jedem Falle ist dieses Argument Schönfelds nicht geeignet, die Wahl der Rotationsachse irgendwie zu beschränken. Wenn nicht ganz andere Gesichtspunkte namhaft gemacht werden, ist jede Wahl gleich wahrscheinlich und zulässig. Leider haben mehrere Rechner, welche also die Formeln I mit konstanten $w_1\ w_2\ w_3$ anwandten, nur die Schönfeldschen Annahmen benutzt und weiter verfolgt.

Indessen erlauben die Rechnungen L. Struves[1]), der die Ausgleichung im allgemeinen Falle bis zu einem gewissen Grade durchgeführt hat ohne neue Rechnungen manches in dieser Richtung auszusagen. Die Arbeiten L. Struve gehören überhaupt zu den besten auf diesem Gebiete, weil sie die Grundlagen der Rechnung mit Klarheit und Deutlichkeit hervortreten lassen und auch nicht den Versuch machen, kleine Widersprüche, die an sich ja eigentlich selbstverständlich auftreten müssen, durch gekünstelte Annahmen wegzuschaffen.

Danach findet er für die Bradleyschen Sterne, wobei er allerdings für die ϱ gewisse hypothetische Werte angenommen hat, in der hier benutzten Bezeichnungsweise:

1. Aus den Rektaszensionen:

$$\begin{array}{l|l} dr + w_3 = -2''725 & X_0 = -0''493 \\ dp + w_1 = -0.037 & Y_0 = -4.386 \\ dq + w_2 = -1.368 & \end{array}$$

2. aus den Deklinationen:

$$\begin{array}{l|l} dp + w_1 = +0''408 & x_0 = +0''206 \\ dq + w_2 = +1.090 & y_0 = -3.284 \\ & z_0 = +2.033 \end{array}$$

Die Übereinstimmung der doppelt bestimmten Werte ist keine gute. Indessen sind, wie L. Struve in einer zweiten Abhandlung erwähnt, noch einige Korrektionen anzubringen. Zuerst erfordert die von ihm benutzte Planetenpräzession $d\lambda$, um sie mit den neuesten Werten in Übereinstimmung zu bringen, die Korrektion $-0''81$ und eine Verbesserung des Äquinoktiums im Betrage von $+1''62$, so daß die beobachteten $d\alpha$ die Gesamtkorrektion $+0''81$ zu erhalten haben. Dasselbe wird erreicht, wenn man

$$dr + w_3 = -2''725 + 0''81 = -1''92$$

annimmt. Eine Ausgleichung der Rektaszensionen und Dekli-

[1]) L. Struve, Bestimmung der Konstante der Präzession. St. Petersburg 1887 und in Astron. Nachrichten, Nr. 3729—30.

nationen zusammen hat leider L. Struve nicht im allgemeinen Fall ausgeführt. Da es sich hier nur um ungefähre Ab-Abschätzungen handelt, habe ich mich damit begnügt, die doppelt bestimmten Werte nach Maßgabe der aus den m. F. folgenden Gewichte überschlagsweise zu vereinigen. So ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} dp + w_1 &= +\,0\rlap{.}''34 \\ dq + w_2 &= +\,0.87 \\ dr + w_3 &= -\,1\rlap{.}''92 \end{aligned}\right\}$$

Diese Rotationskomponenten beziehen sich auf das nach dem Äquator orientierte Koordinatensystem. In Bezug auf die Ekliptik, wo also, wie früher die x-Achse nach dem Widderpunkt, die y-Achse nach $+ 90^\circ$ Länge und die z-Achse nach Norden zeigt, findet man, wenn ε die Schiefe bedeutet:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= w_1 + dp = +\,0\rlap{.}''34 \\ \Omega_2 &= (w_2 + dq)\cos\varepsilon + (w_3 + dr)\sin\varepsilon = +\,0\rlap{.}''04 \\ \Omega_3 &= -(w_2 + dq)\sin\varepsilon + (w_3 + dr)\cos\varepsilon = -2\rlap{.}''11 \end{aligned}$$

Mehr läßt sich aus den Eigenbewegungen der Bradleyschen Sterne nicht schließen, denn man kann selbstverständlich die Rotation des Fixsternsystems von der Drehung des Inertialsystems gegen das empirische nicht trennen. Nimmt man aber die oben angegebenen Werte für die Drehkomponenten des Inertialsystems

$$\Omega_x = 0\rlap{.}''00; \quad \Omega_y = +\,0\rlap{.}''03; \quad \Omega_z = +\,7\rlap{.}''50$$

so werden die Drehkomponenten des Fixsternsystems Ω'_x, Ω'_y, Ω'_z:

$$\begin{aligned} \Omega'_x &= +\,0\rlap{.}''34, \\ \Omega'_y &= +\,0\rlap{.}''01 \end{aligned} \qquad \Omega'_z = -\,9\rlap{.}''61.$$

Man wird wohl kaum behaupten können, daß diese Zahlen den Betrag der Drehung des Inertialsystems $\Omega_z = 7\rlap{.}''50$, wie ihn die säkularen Veränderungen der inneren Planetenbahnen ergaben, besonders wahrscheinlich macht. Denn es ist, trotz der speziellen Annahmen, die gemacht worden sind, immerhin verdächtig, daß eine Drehung des Fixsternhimmels hervorgeht, deren Achse sehr nahe senkrecht zur Ekliptik steht, die doch in keiner Weise eine Beziehung zum Fixsternsystem zu haben scheint.

Die vorstehenden Bemerkungen sind natürlich nur Ansätze zu Betrachtungen, die zum Teil erst in der Zukunft werden weitergeführt werden können. Namentlich wird, wie schon bemerkt, die Ableitung und Benutzung der Eigenbewegung entfernter Sterne von großer Bedeutung werden. Die Konstanz der Drehkomponenten w ist bisher nichts als eine ganz willkürliche Annahme. Andererseits mögen bei den Säkularveränderungen der Planetenbahnen noch rein mechanische Vorgänge vorliegen, deren Einwirkung bisher nicht berücksichtigt worden ist, wie dies ohne Zweifel bei der Bewegung des Merkurperihels der Fall ist. Wir werden nach alle dem wohl mit einiger Sicherheit den Satz aussprechen dürfen, daß sich das im Gebrauch befindliche astronomische empirische Koordinatensystem nicht um mehr als um einige und wahrscheinlich ganz wenige Bogensekunden im Jahrhundert um ein Inertialsystem drehen kann.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1906

Band/Volume: 1906

Autor(en)/Author(s): Seeliger Hugo Johann

Artikel/Article: Über die sogenannte absolute Bewegung 85-137