Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Von **F. Hartogs.**

(Eingelaufen 8. März.)

Ist eine analytische Funktion $f(x)$ für alle dem Bereiche B der x-Ebene (einschl. Begrenzung) angehörenden Werte der komplexen Veränderlichen x eindeutig und regulär, so gilt nach Cauchy für alle x, welche inneren Punkten dieses Bereiches entsprechen, die Beziehung:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - x}\,d\xi,$$

das Integral erstreckt über die (im gehörigen Sinne zu durchlaufende) vollständige Begrenzung C des Bereiches B.

Durch zweimalige Anwendung dieser Formel erhält man für analytische Funktionen $f(x, y)$ zweier unabhängiger komplexer Veränderlichen x und y unter geeigneten Voraussetzungen die analoge Beziehung:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_C\int\limits_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)}\,d\xi\, d\eta,$$

bei welcher x einen inneren Punkt des Bereiches B der x-Ebene, y einen solchen des Bereiches B' der y-Ebene bedeutet, und ξ die vollständige Begrenzung C des Bereiches B, η diejenige C' des Bereiches B' durchläuft.

Wie nun eine genauere Untersuchung zeigt, ist es, um die Gültigkeit dieser Formel nachzuweisen, gar nicht nötig zu wissen, daß $f(x, y)$ im vollen Gebiete (B, B') regulär sei; vielmehr genügt es zu diesem Zwecke schon, wenn von $f(x, y)$ nur feststeht, daß es sich in einem gewissen Teilgebiete desselben regulär verhalte. Da aber andererseits der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung — unter der Voraussetzung, daß wenigstens jeder Punkt (ξ, η) des Integrationsgebietes jenem Teilgebiete angehöre, — allemal eine im vollen Gebiete (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y darstellt, so ergeben sich auf diese Weise ganz unmittelbar einige bemerkenswerte Sätze, auf welche, wie es scheint, die Aufmerksamkeit bisher noch nicht gelenkt worden ist.[1])

Bedeutet Γ eine irgendwie definierte Gesamtheit von Wertsystemen (x, y), so sagen wir im folgenden, der Funktionszweig (oder auch kurz die Funktion) $f(x, y)$ verhalte sich „im Gebiete Γ eindeutig und regulär“, wenn es möglich ist, jedem Punkte $x = x'$, $y = y'$ von Γ ein so kleines Kreisgebiet $|x - x'| < \varrho$, $|y - y'| < \varrho'$ zuzuordnen, daß die von x und y abhängige Größe $f(x, y)$

1. für jede Stelle (x, y), welche einem oder mehreren dieser Kreisgebiete angehört, noch eindeutig erklärt sei,

2. innerhalb jedes einzelnen Kreisgebietes mit einer nach ganzen positiven Potenzen von $x - x'$ und $y - y'$ fortschreitenden und daselbst absolut konvergierenden Reihe dem Werte nach übereinstimme.

Stellt Γ speziell eine abgeschlossene Punktmenge dar, so ist es, wie leicht zu zeigen, dann auch stets möglich, die Wahl der Größen ϱ und ϱ' so zu treffen, daß keine einzige von ihnen kleiner sei als eine gewisse feste positive Größe a.

Das Analoge gilt für den Fall beliebig vieler Veränderlichen.

---

[1]) Die betreffenden Sätze hat der Verfasser zum Teil schon in seiner Inaugural-Dissertation (München 1903) auf anderem Wege hergeleitet. (S. daselbst Kap. VI.)

1.

Es sei in der x-Ebene ein beliebiger Bereich B[1]), desgleichen in der y-Ebene ein beliebiger Bereich B' vorgelegt. Die Randkurven dieser Bereiche mögen mit C bezw. C' bezeichnet werden, und es stelle $y = y_0$ irgend einen festen, dem Bereiche B' angehörenden Punkt dar. Wir wollen alsdann annehmen, es stehe von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y lediglich fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht

a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Begrenzung C des Bereiches B und y gleichzeitig dem Bereiche B' angehört, und

b) aus allen Stellen (x, y_0), für welche x dem Bereiche B angehört.

Es gibt alsdann zunächst, da B eine abgeschlossene Punktmenge darstellt, eine positive Größe k derart, daß $f(x, y)$ auch noch an allen Stellen (x, y), für welche x dem Bereiche B angehört und y der Bedingung $|y - y_0| < k$ genügt, eindeutig und regulär ist; die Gesamtheit aller inneren Punkte y von B', für welche zugleich $|y - y_0| < k$ gilt, heiße K.

---

[1]) Unter einem „Bereich B" der x-Ebene werde im folgenden stets eine abgeschlossene Punktmenge von der Beschaffenheit verstanden, daß a) jeder Punkt x derselben entweder selbst ein innerer Punkt der Menge ist (d. h. daß alle Punkte eines genügend kleinen Kreises mit dem Mittelpunkte x ebenfalls zu B gehören) oder doch als Häufungsstelle von inneren Punkten erscheint, und daß b) je zwei innere Punkte von B stets durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzte Linie miteinander verbunden werden können, welche ganz aus inneren Punkten von B besteht. Die Gesamtheit der Begrenzungspunkte von B (also derjenigen Punkte von B, welche nicht zugleich innere sind) möge die „Begrenzung" oder die „Randkurve" C des Bereiches B heißen; sie stellt ebenfalls eine abgeschlossene Punktmenge dar. In der entsprechenden Weise mögen B' und C' in der y-Ebene erklärt sein. Endlich möge ein „Bereich $\mathfrak{B}$" der 4-dimensionalen xy-Mannigfaltigkeit in Bezug auf die letztere die analogen Eigenschaften besitzen wie ein Bereich B in Bezug auf die 2-dimensionale x-Mannigfaltigkeit.

Wird nun der Einfachheit halber fürs erste vorausgesetzt, daß die Begrenzung C des Bereiches B und ebenso diejenige C' des Bereiches B' durch je eine endliche Anzahl von stetigen rektifizierbaren Kurven gebildet werde, so hat man, solange y auf das Gebiet K beschränkt bleibt und x einen inneren Punkt des Bereiches B bedeutet:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi,$$

das Integral über die vollständige Begrenzung C des Bereiches B erstreckt. Des weiteren ist aber, wenn ξ irgend einen Punkt von C bezeichnet und y seine bisherige Bedeutung beibehält:

$$f(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta - y} d\eta,$$

das Integral erstreckt über die Begrenzung von B'. Somit ergibt sich:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_C d\xi \int\limits_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)} d\eta.$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck, welcher hiernach im ganzen Innern des Gebietes (B, K) mit $f(x, y)$ übereinstimmt, stellt aber eine im Innern des vollen Gebietes (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y dar.[1]) Infolge der bezüglich $f(x, y)$ geltenden Voraussetzungen nämlich ist die Größe unter dem doppelten Integralzeichen, solange x einen inneren Punkt von B, y einen solchen von B' bezeichnet, eine im ganzen Integrationsgebiete stetige Funktion der Integrationsveränderlichen ξ, η, und daher besitzt das Doppelintegral auch noch für alle diese Werte von

---

[1]) Ein direkter Nachweis hierfür ergibt sich auch aus gewissen allgemeinen Sätzen über Integrale von Funktionen, welche zugleich analytische Funktionen eines oder mehrerer Parameter sind. (Vgl. für den einfachsten Fall Enzykl. d. math. Wiss. II B 1, Nr. 6, p. 22 sowie die Anfangsbemerkung in Nr. 43.)

x und y jedenfalls einen wohlbestimmten endlichen Wert. Des weiteren kann aber, wenn $x = x_1$, $y = y_1$ irgend ein festes derartiges Wertepaar bedeutet, $\frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)}$ durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$ fortschreitende Doppelreihe ersetzt werden, deren Koeffizienten von x und y unabhängig sind, und welche bei geeigneter Beschränkung der absoluten Beträge von $x - x_1$ und $y - y_1$ absolut, sowie in Bezug auf alle in Betracht kommenden Wertsysteme ξ, η gleichmäßig konvergiert. Diese sämtlichen Eigenschaften der Reihe bleiben auch dann noch bestehen, wenn man dieselbe, was bei passender Anordnung ihrer Terme möglich ist, als einfach unendliche Reihe auffaßt. Durch gliedweise Integration dieser letzteren erhält man dann in der Tat die Entwicklung des Doppelintegrals nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$, und zwar konvergiert die so sich ergebende (zunächst als einfach unendlich gedachte) Reihe sicherlich absolut, wenn man noch die obere Schranke für die absoluten Beträge von $x - x_1$ und $y - y_1$ beliebig wenig verkleinert; die Reihe kann somit, wenn man will, auch wieder als absolut konvergente Doppelreihe aufgefaßt werden.

Hieraus geht aber hervor, daß der betrachtete Ausdruck die Funktion $f(x, y)$ bezw. ihre analytische Fortsetzung auch noch im Innern des vollen Gebietes (B, B') darstellen muß; $f(x, y)$ verhält sich also notwendig auch noch in der Umgebung jedes im Innern des Gebietes (B, B') gelegenen Punktes (x, y) regulär.

Läßt man jede spezielle Annahme bezüglich der Begrenzung der Bereiche B und B' fallen, so kann man in folgender Weise zum Ziele gelangen. Aus den Voraussetzungen folgt zunächst die Existenz einer positiven, von Null verschiedenen Größe a von der Beschaffenheit, daß, sobald $x = x'$, $y = y'$ irgend eine der unter a) oder b) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y)$ noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a$, $|y - y'| < a$ eindeutig definiert und regulär ist. Die x-Ebene werde nun auf irgend eine Weise in kongruente Quadrate von der Seitenlänge

$\frac{1}{3}a$ eingeteilt, und das von allen denjenigen Quadraten, welche im Innern oder längs der Begrenzung irgend einen Punkt von B enthalten, überdeckte Gebiet (einschl. Begrenzung) mit B_1 bezeichnet. Jeder Punkt von B ist alsdann innerer Punkt von B_1, und jeder nicht zu B gehörige Punkt von B_1, speziell also jeder Begrenzungspunkt von B_1 ist von einem gewissen Punkte des Bereiches B und daher auch von einem gewissen Punkte der Begrenzung C desselben um weniger als $\frac{1}{2}a$ entfernt. Auf die nämliche Weise möge aus dem Bereich B' der y-Ebene der erweiterte Bereich B_1' gebildet werden. Offenbar ist es alsdann, ohne daß die Voraussetzungen ihre Gültigkeit verlieren, gestattet, in denselben die Bereiche B und B' durchweg durch B_1 bezw. B_1' zu ersetzen. Nach dem oben Bewiesenen verhält sich somit der betrachtete Funktionszweig $f(x, y)$ im Innern des Gebietes (B_1, B_1'), also sicher im vollen Gebiete (B, B') regulär.

Wir können demnach den folgenden Satz aussprechen:

Es sei C die Begrenzung eines beliebigen Bereiches B der x-Ebene und $y = y_0$ irgend ein dem Bereiche B' der y-Ebene angehöriger Punkt. Verhält sich alsdann der Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär, welches aus allen unter a) und b) genannten Punkten besteht, so verhält sich die Fortsetzung[1]) desselben auch noch im vollen Gebiete (B, B') eindeutig und regulär.

Ein zweiter Beweis für diesen Satz, bei welchem nur einfache Integrale auftreten, möge hier noch angedeutet werden.

Es werde die oben benutzte Einteilung der x-Ebene in Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{3}a$ wieder aufgenommen und das von allen denjenigen Quadraten, welche im Innern oder längs der Begrenzung irgend einen Punkt von B_1 aufweisen,

---

[1]) Dabei handelt es sich selbstredend nur um solche Fortsetzungen, welche man erhält, ohne daß x den Bereich B und y den Bereich B' verläßt.

überdeckte Gebiet (inkl. Begrenzung) mit B_2 bezeichnet. Der Bereich B_2 enthält dann den Bereich B_1 in seinem Innern, und jeder nicht zu B gehörige Punkt von B_2 ist von einem gewissen Punkte von B und daher auch von einem gewissen Punkte von C um weniger als a entfernt. Der nicht zu B_1 gehörige Teil von B_2 möge (einschl. seiner Begrenzung) mit S bezeichnet werden. $f(x, y)$ verhält sich alsdann im Gebiete (S, B') eindeutig und regulär und es gilt somit:

$$(1) \quad 2\pi i f(x, y) = \int\limits_{(S)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi = \int\limits_{(B_2)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi - \int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi,$$

wobei x irgend einen inneren Punkt des Gebietes S, y irgend einen Punkt von B' bezeichnet, und die Integrale jedesmal über die vollständige Begrenzung des in Parenthese angegebenen Gebietes zu erstrecken sind.

Andererseits verhält sich $f(x,y)$ im Gebiete $(B_2, |y-y_0|<a)$ eindeutig und regulär, und es gilt somit, solange $|y-y_0|<a$ ist,

$$\int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi = 0$$

für jeden nicht zu B_1 gehörigen Wert von x. Da aber für jeden solchen Wert von x dieses Integral eine im Bereiche B' durchweg reguläre analytische Funktion von y darstellt, so verschwindet es auch für j e d e s dem Bereiche B' angehörige y, und die rechte Seite der Gleichung (1) reduziert sich somit stets auf ihr erstes Glied. Dieses, welches demnach im Gebiete (S, B') mit $2\pi i f(x, y)$ dem Werte nach übereinstimmt, stellt aber eine im Innern des ganzen Gebietes (B_2, B_1'), speziell also im vollen Gebiete (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y dar.

2.

Über die V e r t e i l u n g der s i n g u l ä r e n S t e l l e n bei den analytischen Funktionen zweier Veränderlichen sagt der soeben bewiesene Satz folgendes aus:

E s s e i C d i e R a n d k u r v e i r g e n d e i n e s B e r e i c h e s B d e r x-E b e n e, w e l c h e r d e n N u l l p u n k t e n t h ä l t. Ist alsdann der Punkt $x=0$, $y=0$ für einen gewissen Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y eine singuläre Stelle, während dieser Zweig sich eindeutig und regulär verhält an jeder Stelle $(x, 0)$, für welche x auf C liegt, so gibt es eine Zahl $l > 0$ derart, daß zu **jedem** Punkte $y = y_0$ des Kreises $|y| \leq l$ eine singuläre Stelle (x_0, y_0) jenes Zweiges existiert, für welche x_0 dem Bereiche B angehört.

Infolge der über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen existiert nämlich jedenfalls eine positive Größe l von der Beschaffenheit, daß $f(x, y)$ noch im Gebiete $(C, |y| < l)$ eindeutig und regulär ist. Die so bestimmte Größe l genügt aber dann zugleich den Anforderungen des Satzes. Ist nämlich $y = y_0$ irgend ein der Bedingung $|y_0| \leq l$ genügender Wert, und verhielte sich entgegen der Behauptung $f(x, y)$ in der Umgebung einer jeden Stelle (x, y_0) regulär, für welche x dem Bereiche B angehört, so müßte nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze $f(x, y)$ auch im vollen Bereiche $(B, |y| \leq l)$ eindeutig und regulär sein, während ja der Punkt $x = 0$, $y = 0$ für $f(x, y)$ eine singuläre Stelle sein sollte.

Durch Spezialisierung ergibt sich aus obigem Satze der folgende:

Ist der Punkt $x = 0$, $y = 0$ eine singuläre Stelle für den Funktionszweig $f(x, y)$, gibt es jedoch in einer gewissen Nachbarschaft dieses Punktes für $f(x, y)$ keine weitere singuläre Stelle, deren y-Koordinate Null ist, oder gibt es wenigstens innerhalb jedes beliebig kleinen Kreises um $x = 0$ noch Bereiche B, welche den Punkt $x = 0$ enthalten, und deren Randpunkte mit $y = 0$ sämtlich reguläre Stellen für $f(x, y)$ ergeben, so läßt sich zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl k stets eine zweite l derart angeben, daß zu **jedem** Punkte $y = y_0$ des Kreises $|y| < l$ mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0) jenes Funktionszweiges existiert, welche der Bedingung $|x_0| < k$ genügt.

3.

Ist ein beliebiger Bereich B der x-Ebene sowie ein beliebiger Bereich B' der y-Ebene vorgelegt und steht von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion fest, daß er sich in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches aus allen Begrenzungsstellen des Bereiches $\mathsf{B} = (B, B')$ besteht (d. h. sowohl aus allen Stellen (x, y), für welche x der Randkurve von B und y dem Bereiche B' als auch aus allen denjenigen, für welche x dem Bereiche B und y der Randkurve von B' angehört), so ist nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze $f(x, y)$ notwendig auch im vollen Bereiche B eindeutig und regulär. Dieser Satz läßt sich nun auf völlig beliebige Bereiche B [1]) der xy-Mannigfaltigkeit übertragen; doch werden wir uns hierbei auf die Betrachtung eindeutiger analytischer Funktionen beschränken. Der Satz lautet alsdann:

Liegt ein beliebiger Bereich B der xy-Mannigfaltigkeit vor und steht von der eindeutigen analytischen Funktion $f(x, y)$ fest, daß sie sich an jeder Begrenzungsstelle (x, y) des Bereiches B regulär verhalte, so verhält sie sich auch im vollen Bereiche B regulär.

Beweis. Da die Begrenzung von B eine abgeschlossene Menge von Punkten (x, y) darstellt, so läßt sich zunächst wiederum eine positive Größe a angeben, so beschaffen, daß wenn (x', y') irgend eine Begrenzungsstelle von B bedeutet, $f(x, y)$ auch noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a$, $|y - y'| < a$ regulär ist.

Die Gesamtheit der y-Koordinaten aller Punkte von B bildet offenbar einen Bereich B' der y-Ebene. Ist $y = y_0$ ein Randpunkt von B' (oder auch ein beliebiger Punkt von B', welcher von einem Randpunkte um weniger als a entfernt ist), so ist $f(x, y)$ sicher in der Umgebung jeder dem Bereiche B angehörenden Stelle (x, y) regulär, deren y-Koordinate gleich y_0 ist. Wüßte man, daß das nämliche auch von jedem be-

[1]) Siehe p. 225, Fußnote [1]).

liebigen Punkte $y = y_0$ des Bereiches B' gilt, so wäre damit die Behauptung erwiesen. Die gegenteilige Annahme führt aber in der Tat auf einen Widerspruch. Gäbe es nämlich auch Punkte $y = y_1$ von B', für welche jene Aussage nicht zuträfe, so müßten speziell auch zwei Punkte $y = y_0$ und $y = y_1$ des Bereiches B' nachweisbar sein, von denen der erste, y_0, jene Bedingung erfüllt, der andere, y_1, hingegen nicht, und deren Entfernung voneinander zugleich kleiner ist als $\frac{1}{2} a$. Es soll nun der Nachweis geführt werden, daß — entgegen der soeben gemachten Annahme — $f(x, y)$ dann auch in der Umgebung einer jeden dem Bereiche B angehörenden Stelle regulär sein muß, deren y-Koordinate gleich y_1 ist.

Ist (x_1, y_1) eine beliebige solche Stelle, so unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem der Punkt (x_1, y_0) erstens ein Begrenzungspunkt von B, zweitens ein innerer Punkt von B ist, oder drittens dem Bereiche B überhaupt nicht angehört.

Im ersten Falle ist $f(x, y)$ im Gebiete $|x - x_1| < a$, $|y - y_0| < a$ durchweg regulär, also speziell auch in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

Im dritten Falle gibt es, da zwar der Punkt (x_1, y_1) dem Bereiche B angehört, der Punkt (x_1, y_0) hingegen nicht, auf der geradlinigen Verbindungsstrecke der Punkte y_0 und y_1 mindestens einen Zwischenpunkt y_2 derart, daß (x_1, y_2) ein Begrenzungspunkt von B ist. Dann verhält sich $f(x, y)$ im Gebiete $|x - x_1| < a$, $|y - y_2| < a$ durchweg regulär, also speziell auch in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

Im zweiten Falle endlich bedeute X die Gesamtheit aller Stellen x, für welche (x, y_0) ein innerer Punkt von B ist; die Gesamtheit aller derjenigen Punkte von X, welche mit dem (gleichfalls zu X gehörenden) Punkte x_1 durch eine aus einer endlichen Anzahl von Geraden zusammengesetzte, aus lauter Punkten von X bestehende Linie verbunden werden können, bilden nebst ihren Häufungsstellen alsdann einen Bereich B der x-Ebene und zwar von folgender Beschaffenheit: Ist x irgend ein Punkt von B, so gehört der Punkt (x, y_0) dem Bereiche B an; ist speziell x ein Punkt der Randkurve C von B, so ist der Punkt (x, y_0) (da er nicht innerer Punkt von **B** sein kann) sicher ein Begrenzungspunkt von **B**. Demnach ist $f(x, y)$ in dem ganzen Gebiete regulär, welches besteht: a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Kurve C, y dem Bereiche $|y - y_0| \leq \frac{3}{8} a$ angehört; b) aus allen Stellen (x, y_0), für welche x dem Bereiche B angehört. Nach dem Satze von Nr. 1 ist infolgedessen $f(x, y)$ auch im vollen Gebiete $(B, |y - y_0| \leq \frac{3}{8} a)$ regulär, also speziell in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

4.

Der in Nr. 1 bewiesene Satz läßt noch nach einer anderen Richtung hin eine Verallgemeinerung zu. Die bei der Voraussetzung desselben unter b) definierte Gesamtheit von Stellen (x, y_0) kann nämlich ersetzt werden durch eine anderweitige Gesamtheit, bei welcher die y-Koordinate nicht mehr ungeändert bleibt, sondern ihren Wert gleichzeitig mit x ändert (ohne jedoch den Bereich B' jemals zu verlassen). Allerdings kann man sich schon an den einfachsten Beispielen von Singularitäten unmittelbar davon überzeugen, daß diese Abhängigkeit keineswegs völlig willkürlicher Natur sein (etwa Unstetigkeiten aufweisen) darf, sowie ferner, daß die Gestalt mindestens eines der Bereiche B, B' gewissen Beschränkungen unterworfen werden muß.[1]) Wir werden im folgenden annehmen,

[1]) Es sei z. B. $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$. Wählt man nun etwa für B den Bereich $|x| \leq 2$, für B' den Bereich $|y| \leq 1$ (so daß $f(x, y)$ im Gebiete (C, B') regulär ist), und setzt des weiteren $\psi(x) = 0$ für jeden von Null verschiedenen, dem Bereiche B angehörenden Wert x, dagegen $\psi(0)$ gleich irgend einer von Null verschiedenen Konstanten, so verhält sich $f(x, y)$ in der Umgebung jeder Stelle $(x, \psi(x))$ regulär und es sind somit alle Voraussetzungen erfüllt; nichtsdestoweniger ist $f(x, y)$ im Bereiche (B, B') nicht durchweg regulär. — Wählt man andererseits für B den Kreisring $1 \leq |x| \leq 4$, für B' den Kreisring $2 \leq |x| \leq 3$ und setzt durchweg $\psi(x) = -x$, so sind wiederum alle Voraussetzungen erfüllt, ohne daß $f(x, y)$ im Gebiete (B, B') durchweg regulär wäre. Damit der Satz gültig sei, muß zum mindesten einer der beiden Bereiche B und B' einfach zusammenhängend sein.

daß die y-Koordinate eine eindeutige analytische Funktion $\psi(x)$ der x-Koordinate sei, und ferner eine besondere Voraussetzung über die Gestalt des Bereiches B' hinzufügen.

Es sei $y = \psi(x)$ eine im Bereiche B der x-Ebene eindeutige und reguläre analytische Funktion von x, so beschaffen, daß, solange x dem Bereiche B angehört, der Punkt $y = \psi(x)$ im **Innern** des Bereiches B' der y-Ebene gelegen sei. Von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y stehe fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht:

a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Begrenzung C des Bereiches B und y gleichzeitig dem Bereiche B' angehört, und

b) aus allen Stellen (x, y), für welche x dem Bereiche B angehört und gleichzeitig $y = \psi(x)$ ist.

Der Bereich B' besitze überdies die Eigenschaft, daß seine Begrenzung mit jeder Geraden der y-Ebene höchstens zwei Punkte oder eine einzige geradlinige Strecke gemein habe. Alsdann ist $f(x, y)$ auch im vollen Bereiche (B, B') eindeutig und regulär.

Beweis. Die positive Größe β möge so bestimmt werden, daß, wenn $x = x'$, $y = y'$ irgend eine der unter a) oder b) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y)$ noch im Bereiche $|x - x'| < \beta$, $|y - y'| < \beta$ eindeutig und regulär sei. Eine zweite positive Größe α sei nicht größer als β, werde jedoch, was stets möglich ist, überdies noch so klein angenommen, daß, wenn $x = x'$ einen völlig beliebigen Punkt von B bezeichnet, für alle x des Gebietes $|x - x'| < \alpha$:

1. die Funktion $\psi(x)$ noch eindeutig und regulär sei,
2. der Punkt $y = \psi(x)$ dem Bereiche B' noch angehöre,
3. die Ungleichung $|\psi(x) - \psi(x')| < \frac{1}{2}\beta$ gelte.

Mittels dieser Größe α mögen alsdann wie in Nr. 1 aus B die Bereiche B_1, B_2 und S konstruiert werden.

Da $f(x,y)$ alsdann im Gebiete (S, B') eindeutig und regulär ist, so hat man zunächst ebenso wie in Nr. 1 die Beziehung:

$$(1) \qquad 2\pi i\, f(x,y) = \int_{(B_2)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi - \int_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei x irgend einen inneren Punkt des Gebietes S, y einen beliebigen Punkt von B' bedeutet.

Ist andererseits $x = x_1$ ein beliebiger Punkt von B_1, so gibt es jedenfalls einen Punkt $x = x_0$ von B derart, daß $|x_1 - x_0| < \alpha$; infolge obiger Annahmen gehört also der Punkt $\psi(x_1)$ dem Bereiche B' noch an und es gilt gleichzeitig

$$|\psi(x_1) - \psi(x_0)| < \tfrac{1}{2}\beta.$$

Setzt man daher, unter $\bar{y}$ irgend einen festen Punkt des Bereiches B' verstehend,

$$\Psi_t(x) = \psi(x) + t(\bar{y} - \psi(x))$$

und bezeichnet mit D den Durchmesser eines Kreises, welcher den ganzen Bereich B' umfaßt, so gilt sicher noch:

$$|\Psi_t(x_1) - \psi(x_0)| < \beta,$$

solange t dem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als $\dfrac{\beta}{2D}$.

$f(x,y)$ verhält sich nun im Gebiete $|x - x_0| < \beta$, $|y - \psi(x_0)| < \beta$ eindeutig und regulär, speziell also in der Umgebung des Punktes $(x_1, \Psi_t(x_1))$. Da überdies $\psi(x)$ im Bereiche B_1 eindeutig und regulär ist, so stellt demnach $f(x, \Psi_t(x))$, solange nur $|t| < \dfrac{\beta}{2D}$, eine im Bereiche B_1 eindeutige und reguläre analytische Funktion von x dar, und es gilt somit:

$$\int_{(B_1)} \frac{f(\xi, \Psi_t(\xi))}{\xi - x}\, d\xi = 0 \qquad \left(|t| < \frac{\beta}{2D}\right)$$

für jeden außerhalb B_1 gelegenen Punkt x.

Ist nun t_0 irgend ein der Bedingung $0 \leq t_0 \leq 1$ genügender reeller Wert, ξ irgend ein Punkt der Begrenzung des Bereiches B_1, so gehört der Punkt $\psi(\xi)$ und daher auch der

Punkt $\Psi_{t_0}(\xi)$ dem Bereiche B' noch an; wird sodann die Größe t auf das Gebiet $|t - t_0| < \frac{\beta}{D}$ beschränkt, so gilt

$$|\Psi_t(\xi) - \Psi_{t_0}(\xi)| = |t - t_0|\,|\bar{y} - \psi(\xi)| < \beta$$

und demnach verhält sich die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes $(\xi, \Psi_t(\xi))$ noch eindeutig und regulär.[1]) Daraus folgt aber, daß das zuletzt betrachtete Integral — unter x nach wie vor einen außerhalb B_1 gelegenen Punkt verstanden — in jedem Gebiete $|t - t_0| < \frac{\beta}{D}$ $(0 \leq t_0 \leq 1)$ eine reguläre analytische Funktion von t darstellt. Da diese Funktion aber für $|t| < \frac{\beta}{2D}$ verschwindet, so muß sie auch für alle betrachteten Werte von t verschwinden, speziell also für $t = 1$. Mithin reduziert sich die rechte Seite von Gleichung (1) auf ihr erstes Glied; dieses aber stellt — aus genau denselben Gründen wie in Nr. 1 — eine im vollen Gebiete (B_2, B') eindeutige und reguläre Funktion von x und y dar.

5.

Die sämtlichen bisher erwähnten Sätze lassen sich auch auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen ausdehnen. Als Grundlage kann dabei der in Nr. 1 bewiesene Satz dienen, wenn derselbe zuvor noch auf eine etwas allgemeinere Form gebracht wird. Liegt nämlich eine analytische Funktion der Veränderlichen $x, y, u, v, w, \ldots$ vor, so kann man, wenn man in der x- und in der y-Ebene die in Nr. 1 gebrauchten Bezeichnungen beibehält, während die Gebiete $G, G', \ldots$ der u-, v-, ... Ebene lediglich der Beschränkung unterliegen sollen, daß sie abgeschlossene Punktmengen darstellen,[2]) jenem Satze die folgende Gestalt geben:

---

[1]) ξ ist nämlich von einem gewissen Punkte der Randkurve C, und $\Psi_t(\xi)$ von dem zu B' gehörigen Punkte $\Psi_{t_0}(\xi)$ um weniger als β entfernt.

[2]) G braucht also nicht notwendig einen 2-dimensionalen Bereich

(A.) Steht von dem Zweige $f(x, y, u, v, \ldots)$ einer analytischen Funktion der Veränderlichen $x, y, u, v, \ldots$ fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhält, welches besteht

a) aus allen Stellen $(x, y, u, v, \ldots)$, welche durch das Symbol $(C, B', G, G', \ldots)$, sowie

b) aus allen denjenigen, welche durch das Symbol $(B, y_0, G, G', \ldots)$ bezeichnet werden,

so verhält sich die Fortsetzung dieses Zweiges auch noch in dem vollen Gebiete $(B, B', G, G', \ldots)$ eindeutig und regulär.

Da nämlich das in der Voraussetzung erwähnte Gebiet eine abgeschlossene Menge von Punkten $(x, y, u, v, \ldots)$ darstellt, so ist es wiederum möglich, eine positive Größe a so zu wählen, daß, sobald $(x', y', u', v', \ldots)$ irgend einen Punkt dieses Gebietes bedeutet, $f(x, y, u, v, \ldots)$ auch noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a, \ldots, |u - u'| < a, \ldots$ eindeutig und regulär sei. Mittels dieser Größe a mögen nun genau wie in Nr. 1 aus dem Bereiche B der x-Ebene die Bereiche B_1, B_2, S, aus dem Bereiche B' der y-Ebene der Bereich B_1' und schließlich in analoger Weise aus den Bereichen $G, G', \ldots$ die Bereiche $G_1, G_1', \ldots$ konstruiert werden. Denkt man sich nun den Größen $u, v, \ldots$ bestimmte, den bezüglichen Bereichen $G_1, G_1', \ldots$ angehörige Werte beigelegt, so besteht, wie in Nr. 1 (p. 229) bewiesen, jedenfalls die Beziehung:

$$2\pi i f(x, y, u, v, \ldots) = \int_{(B_2)} \frac{f(\xi, y, u, v, \ldots)}{\xi - x} d\xi,$$

wobei x einen inneren Punkt von S, y einen Punkt von B' bedeutet. Die rechte Seite dieser Gleichung stellt aber eine im Innern des vollen Gebietes $(B_2, B_1', G_1, G_1', \ldots)$, also speziell im ganzen Gebiete $(B, B', G, G', \ldots)$ eindeutige und reguläre analytische Funktion von $x, y, u, v, \ldots$ dar.

---

darzustellen, sondern kann z. B. auch die Gesamtheit der Punkte einer Kurve, eventuell auch bloß einen einzigen Punkt bedeuten.

Es mögen nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ n komplexe Veränderliche bedeuten, und es sei $0 < \mu < \nu \leq n$. Ein „Bereich B" der x_ϱ-Ebene werde im folgenden stets mit B_ϱ, seine Randkurve mit C_ϱ bezeichnet; $x_\varrho = x_\varrho^0$ bedeute durchweg einen festen Punkt des Bereiches B_ϱ; endlich möge G_ϱ eine abgeschlossene Menge von Punkten x_ϱ darstellen. Es gilt alsdann zunächst die folgende Verallgemeinerung des obigen Satzes:

(B.) Steht von dem Zweige $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ einer analytischen Funktion der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht

a) aus allen Stellen
$(C_1, C_2, \ldots C_\mu, B_{\mu+1}, B_{\mu+2}, \ldots B_\nu, G_{\nu+1}, \ldots G_n)$,

b) aus allen Stellen
$(B_1, B_2, \ldots B_\mu, x_{\mu+1}^0, x_{\mu+2}^0, \ldots x_\nu^0, G_{\nu+1}, \ldots G_n)$,

so verhält sich die Fortsetzung desselben auch in dem vollen Gebiet $(B_1, B_2, \ldots B_\nu, G_{\nu+1}, \ldots G_n)$ eindeutig und regulär.

Der spezielle Fall dieses Satzes, welcher der Annahme $\mu = 1$ (oder auch der Annahme $\nu = \mu + 1$) entspricht, ergibt sich nämlich ohne weiteres durch mehrmalige Anwendung des vorhergehenden Satzes (A); durch wiederholte Anwendung des so gewonnenen speziellen Satzes ergibt sich sodann der Satz in seiner allgemeinen Fassung.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes (B) kann man dann endlich noch folgende weitergehende Verallgemeinerung gewinnen:

(C.) $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ verhalte sich in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär, welches besteht

a_1) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_{n-2}, C_{n-1}, B_n)$,
a_2) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_{n-2}, B_{n-1}, x_n^0)$,
a_3) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots B_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)$,
— — — — — — — — — — —
a_n) aus allen Stellen $(B_1, x_2^0, \ldots x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0)$.

Alsdann verhält sich $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots B_n)$ eindeutig und regulär.

Was den Satz von Nr. 2 betrifft, so können auch bei diesem sowohl an Stelle von x, als auch an Stelle von y beliebig viele Veränderliche treten. Der Satz erscheint alsdann in der folgenden Form, welche sich unmittelbar als Folgerung aus dem Satze (B.) ergibt:

Es sei C_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots \mu$) die Randkurve irgend eines Bereiches B_ϱ der x_ϱ-Ebene, welcher den Nullpunkt enthält. Ist alsdann der Punkt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ eine singuläre Stelle für den Zweig $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ einer analytischen Funktion, während dieser Zweig sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhält, das aus den Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_\mu, 0, 0, \ldots 0)$ besteht, so gibt es eine Zahl $l > 0$ derart, daß zu jedem den Bedingungen $|x^0_{\mu+1}| < l, \ldots |x^0_n| < l$ genügenden Wertsystem $x^0_{\mu+1}, x^0_{\mu+2}, \ldots x^0_n$ eine singuläre Stelle $(x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_n)$ jenes Zweiges existiert, für welche x^0_1 dem Bereiche $B_1, \ldots, x^0_\mu$ dem Bereiche B_μ angehört.

Der Satz von Nr. 3 gilt unverändert für einen beliebigen Bereich B der $(x_1, x_2, \ldots x_n)$-Mannigfaltigkeit. Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus dem dortigen, indem man an Stelle von y $n-1$ Veränderliche treten läßt.

Was schließlich die Betrachtungen von Nr. 4 betrifft, so kann man diesen zunächst den folgenden allgemeineren Satz an die Seite stellen:

(D.) Der Funktionszweig $f(x, y, z, \ldots;\ u, v, \ldots)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem ganzen Gebiete, welches besteht

a) aus allen Stellen $(C, B', B'', \ldots;\ G, G', \ldots)$,
b) aus allen Stellen $(B, \psi(x), \chi(x), \ldots;\ G, G', \ldots)$.

Dabei mögen die Bereiche $B', B'', \ldots$ und die Funktionen $\psi(x), \chi(x), \ldots$ analogen Beschränkungen unterworfen sein, wie sie in Nr. 4 bezüglich des Bereiches B' und der Funktion $\psi(x)$ galten, während $G, G', \ldots$ wieder beliebige abgeschlossene Mengen von Punkten der u-, v-, ... Ebene bedeuten. Alsdann verhält sich $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ auch im vollen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G, G', \ldots)$ eindeutig und regulär.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem in Nr. 4 mitgeteilten, indem man an Stelle der dortigen Veränderlichen y die Veränderlichen $y, z, \ldots$ treten läßt.

Es möge nun weiterhin angenommen werden, daß jede der Größen $\psi, \chi, \ldots$ überdies noch von $u, v, \ldots$ abhängig sei und zwar für jedes dem Gebiete $G, G', \ldots$ angehörige Wertsystem $u, v, \ldots$ als Funktion von x betrachtet die bisher verlangten Eigenschaften besitze, ferner aber eine im Gebiete $B, G, G', \ldots$ stetige Funktion der Veränderlichen $x, u, v, \ldots$ darstelle. Auch dann bleibt der obige Satz (D) noch unverändert bestehen.

Zum Beweise wähle man zunächst eine Größe $\beta > 0$ derart, daß, wenn $(x', y', z', \ldots; u', v', \ldots)$ eine beliebige der unter a) oder b)[1] genannten Stellen bedeutet, $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ noch in jedem Gebiete $|x - x'| < \beta, \ldots; |u - u'| < \beta, \ldots$ eindeutig und regulär sei. Eine zweite Größe $\alpha > 0$ kann alsdann so bestimmt werden, daß, sobald x einen Punkt von B, u, u' zwei der Bedingung $|u - u'| < \alpha$ genügende Punkte von G, analog v, v' zwei der Bedingung $|v - v'| < \alpha$ genügende Punkte von $G', \ldots$ bedeuten, stets die Beziehungen $|\psi(x, u', v' \ldots) - \psi(x, u, v, \ldots)| < \beta$, $|\chi(x, u', v', \ldots) - \chi(x, u, v, \ldots)| < \beta, \ldots$ stattfinden.

Es werde nun in der u-Ebene eine Einteilung in Quadrate Q von der Seitenlänge $\frac{1}{2}\alpha$ vorgenommen und derjenige Teil von G, welcher irgend einem, Q_0, dieser Quadrate (inkl. Begrenzung) angehört, mit G_0, irgend ein Punkt von G_0 mit u_0 bezeichnet. Analog verfahre man in der v-Ebene u. s. f. Dann ist es offenbar gestattet, in den Voraussetzungen des Satzes überall $G, G', \ldots$ durch $G_0, G_0', \ldots$ und gleichzeitig $\psi(x, u, v, \ldots)$, $\chi(x, u, v, \ldots), \ldots$ durch $\psi(x, u_0, v_0, \ldots)$, $\chi(x, u_0, v_0, \ldots), \ldots$ zu

[1]) In der Zeile b) sind $\psi(x), \chi(x), \ldots$ jetzt durch $\psi(x, u, v, \ldots)$, $\chi(x, u, v, \ldots), \ldots$ ersetzt gedacht.

ersetzen, ohne daß dieselben ihre Gültigkeit verlieren. Nach dem Satze (D.) ist daher $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ in dem ganzen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G_0, G_0', \ldots)$ eindeutig und regulär und somit, da die Quadrate $Q_0, Q_0', \ldots$ beliebig gewählt werden konnten, auch in dem ganzen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G, G', \ldots)$.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich dann schließlich jeder der beiden folgenden:

(D'.) Es sei $0 < \mu < n$. Der Funktionszweig $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem ganzen Gebiete, welches besteht

a) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_\mu, B_{\mu+1}, \ldots B_n)$,

b) aus allen Stellen

$(B_1, B_2, \ldots B_\mu, \psi_{\mu+1}(x_1, \ldots x_\mu), \ldots \psi_n(x_1, \ldots x_\mu))$.

Dabei sollen die Bereiche $B_{\mu+1}, \ldots, B_n$ die erwähnte spezielle Eigenschaft besitzen, die Funktionen $\psi_\varrho(x_1, \ldots x_\mu)$ $(\varrho = \mu + 1, \ldots, n)$ aber im Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ eindeutig und regulär sein, und der Punkt $x_\varrho = \psi_\varrho(x_1, \ldots, x_\mu)$, so lange das Wertsystem $x_1, \ldots, x_\mu$ dem Gebiete $B_1, \ldots, B_\mu$ angehört, im Innern des Bereiches B_ϱ gelegen sein. Alsdann ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ eindeutig und regulär.

(D''.) Der Funktionszweig $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem Gebiete, welches besteht

a_1) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, C_{n-1}, B_n)$,
a_2) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, B_{n-1}, \psi_n)$,
a_3) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, B_{n-2}, \psi_{n-1}, \psi_n)$,
— — — — — — — — — — —
a_n) aus allen Stellen $(B_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}, \psi_{n-1}, \psi_n)$.

Dabei sollen die Bereiche $B_2, B_3, \ldots, B_n$ die erwähnte spezielle Eigenschaft besitzen, die Größen $\psi_\varrho = \psi_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$ $(\varrho = 2, 3, \ldots, n)$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ darstellen, welche im Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_{\varrho-1}$ eindeutig und regulär sind,[1])

[1]) Doch treten bei der Aufstellung der in irgend einer der n Zeilen

und der Punkt $x_\varrho = \psi_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$, so lange das Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ dem Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_{\varrho-1}$ angehört, im Innern des Bereiches B_ϱ gelegen sein. Alsdann ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ eindeutig und regulär.

genannten Gesamtheit von Stellen als Argumente einer der Funktionen ψ_ϱ jedesmal nur diejenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ tatsächlich auf, welche dem in der nämlichen Zeile aufgeführten Gebiete der $(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$-Mannigfaltigkeit angehören.

Berichtigungen.

1. Zu der Abhandlung „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen" von Edmund Landau.

Auf S. 156, Z. 6 v. u. lies: $|c_n - c_{n+1}|$ statt $(c_n - c_{n+1})$.

Auf S. 159, Z. 10 v. o. lies: $\dfrac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}}$ statt $n^{\frac{1}{1+\Re(x_1-x_0)}}$.

Auf S. 161, Z. 12—14 v. o. lies:

$$\Re(x_0)+\gamma_1 \leqq u \leqq \Re(x_0)+\gamma_2,\ \gamma_4 \leqq v \leqq \gamma_3,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ vier reelle Größen bezeichnen $(0 < \gamma_1 < \gamma_2, \gamma_4 < \gamma_3)$, die so gewählt sind, daß etc.

Auf S. 161, Z. 6—5 v. u. lies:

Wenn eine ganze Zahl γ oberhalb der fünf Zahlen $|x_0|$, $|\Re(x_0)+\gamma_1|+|\gamma_3|$, $|\Re(x_0)+\gamma_2|+|\gamma_3|$, $|\Re(x_0)+\gamma_1|+|\gamma_4|$ und $|\Re(x_0)+\gamma_2|+|\gamma_4|$ gewählt wird, so etc.

---

2. Zu der Abhandlung „Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen" von F. Hartogs.

S. 224 Z. 10 v. o. ist hinter „welche" einzuschalten: (abgesehen von dem einfachsten, die Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen betreffenden Falle)
