# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

**München**
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

# Über das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

*(Eingelaufen 7. Juli.)*

Die im folgenden mitgeteilte Methode zur Herleitung des Additions-Theorems der elliptischen Funktionen dürfte zwar kaum danach angetan sein, auf prinzipielle Neuheit irgendwelchen Anspruch zu erheben. Immerhin ist sie wohl, wie ich glaube, in der hier angegebenen Weise bisher nicht durchgeführt worden, scheint mir aber andererseits einer solchen Durchführung nicht unwert, da sie auf gemeinsamer, überaus einfacher Grundlage ganz direkt und ohne jeden Kunstgriff nicht nur die verschiedenen Formen des Additions-Theorems für das Weierstraßsche $\wp u$, sondern auch die Additions-Theoreme für die Jacobischen Funktionen $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ liefert. Dabei wird von der Darstellung der Funktionen $\wp u$ bzw. $sn\,u$ durch Sigma- bzw. Theta-Quotienten keinerlei Gebrauch gemacht. Als Beweismittel dienen vielmehr lediglich die bekannten Liouvilleschen Sätze über Anzahl und Summe der Nullstellen bzw. Pole einer doppelt-periodischen Funktion und die Differentialgleichung für $\wp u$ bzw. $sn\,u$.

## § 1.

## Additions-Theorem für gewisse doppelt-periodische Funktionen zweiter Ordnung.

Es sei $\varphi(u)$ eine eindeutige doppelt-periodische Funktion, welche im ersten Perioden-Parallelogramm nur für $u = 0$ und zwar von der zweiten Ordnung unendlich wird. Es ist dann also $\varphi(u)$ eine doppelt-periodische Funktion zweiter Ordnung und zwar allemal eine gerade Funktion[1]). Denn, da die Summe der im ersten Perioden-Parallelogramm gelegenen Pole den Wert 0 hat, so wird:

$$\varphi(v) = \varphi(u), \text{ wenn: } u + v = 0,$$

d. h. man hat in der Tat:

$$\varphi(-u) = \varphi(u).$$

Es seien ferner $u_1$, $u_2$ zwei beliebige Zahlen von der Beschaffenheit, daß $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ nicht unendlich und von einander verschieden, d. h. man habe, wenn die Perioden von $\varphi(u)$ mit $2\omega$, $2\omega'$ bezeichnet werden:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & u_1 \not\equiv 0 & u_2 \not\equiv 0 \\ (2) & u_2 \not\equiv -u_1 & \\ (3) & u_2 \not\equiv u_1 & \end{array}\right\} (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Setzt man sodann:

$$(4) \qquad \frac{\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2)}{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)} = Q,$$

so besteht die Identität:

$$(5) \qquad \varphi'(u_1) - Q \cdot \varphi(u_1) = \varphi'(u_2) - Q \cdot \varphi(u_2),$$

und, wenn noch gesetzt wird:

$$(6) \quad \left.\begin{array}{l} \varphi'(u_1) - Q \cdot \varphi(u_1) \\ \varphi'(u_2) - Q \cdot \varphi(u_2) \end{array}\right\} = R, \text{ also: } R = \frac{\varphi(u_1)\varphi'(u_2) - \varphi(u_2)\varphi'(u_1)}{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)},$$

so folgt zunächst, daß der Ausdruck

$$\varphi'(u) - Q \cdot \varphi(u) - R$$

die beiden nach den Moduln $2\omega$, $2\omega'$ inkongruenten Nullstellen $u = u_1$ und $u = u_2$ und folglich, da er eine doppelt-

[1]) In der Tat folgt ja aus der Vorraussetzung, daß die fragliche Funktion von der Form

$$\varphi(u) = A \cdot \wp u + B$$

sein muß, wovon aber im Texte kein Gebrauch gemacht wird.

periodische Funktion dritter Ordnung mit dem dreifachen Pole $u = 0$ darstellt, noch die durch die Gleichung:

$$(7) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

definierte Nullstelle $u = u_3$ besitzen muß. Da hiernach:

$$(8) \qquad \varphi'(u) - Q \cdot \varphi(u) - R = 0 \quad \text{für } u = u_1, u_2, u_3,$$

so ergibt sich fürs erste, daß allemal die Relation besteht:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \varphi'(u_1) & \varphi(u_1) & 1 \\ \varphi'(u_2) & \varphi(u_2) & 1 \\ \varphi'(u_3) & \varphi(u_3) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

wenn $u_1, u_2, u_3$ irgend drei durch die Gleichung (7) verbundene, lediglich den Beschränkungen (1) — (3) genügende Zahlen bedeuten. Sie bleibt überdies auch noch giltig, wenn man die Beschränkung (3) fallen läßt, da im Falle $u_2 \equiv u_1 \pmod{2\omega, 2\omega'}$ die Determinante (9) wegen Gleichheit zweier Zeilen identisch verschwindet.

Aus Gleichung (8) folgt nun weiter, daß für $u = u_1, u_2, u_3$:

$$\varphi'(u)^2 = (Q \cdot \varphi(u) + R)^2$$

also:

$$(10) \qquad \varphi'(u)^2 - Q^2 \cdot \varphi(u)^2 - 2\,Q\,R \cdot \varphi(u) - R^2 = 0.$$

Andererseits muß $\varphi(u)$ als eindeutige doppelt-periodische Funktion zweiter Ordnung mit zweifachem Pol einer Differentialgleichung von folgender Form genügen:[1])

$$(11) \qquad \varphi'(u)^2 = a_0 \cdot \varphi(u)^3 + a_1 \cdot \varphi(u)^2 + a_2 \cdot \varphi(u) + a_3$$

Durch Einsetzen dieser für jeden Wert von $u$ giltigen Darstellung von $\varphi'(u)^2$ in die Gleichung (10) ergibt sich, daß die in Bezug auf $\varphi(u)$ kubische Gleichung

---

[1]) Zur Herleitung dieses Resultates ist es keineswegs erforderlich, den Weg über die Begebung $\varphi(u) = A \cdot \wp\, u + B$ oder irgend eine andere spezielle Darstellungsform für $\varphi(u)$ zu nehmen. Es genügt dazu, außer den Liouvilleschen Sätzen über Anzahl und Summe der Nullen bzw. Pole noch denjenigen heranzuziehen, welcher die Konstanz einer doppeltperiodischen Funktion ohne Pole besagt.

$$(12)\quad a_0\cdot\varphi(u)^3-(Q^2-a_1)\cdot\varphi(u)^2-(2QR-a_2)\cdot\varphi(u)-(R^2-a_3)=0$$

die Wurzeln $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(u_3)$ besitzt. Daraus folgt aber,[1]) daß:

$$(\mathrm{I})\qquad \varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\varphi(u_3)=\frac{1}{a_0}\cdot Q^2-\frac{a_1}{a_0},$$

$$(\mathrm{II})\qquad \varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2)+(\varphi(u_1)+\varphi(u_2))\cdot\varphi(u_3)=-\frac{2}{a_0}\cdot QR+\frac{a_2}{a_0},$$

$$(\mathrm{III})\qquad \varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2)\cdot\varphi(u_3)=\frac{1}{a_0}\cdot R^2-\frac{a_3}{a_0}.$$

Man gewinnt also auf diese Weise drei verschiedene Formeln zur Darstellung von $\varphi(u_3)$, d. h. von $\varphi(u_1+u_2)$, als rationale Funktion von $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$, somit drei verschiedene Formen für das Additions-Theorem der Funktion $\varphi(u)$.

Schließlich kann man noch mit Hilfe einer einfachen Stetigkeits-Betrachtung die ursprünglich eingeführte, lediglich durch die für $Q$ und $R$ gewählte Form geforderte, nach Lage der Sache offenbar aber unnötige Beschränkung $u_2 \neq u_1$ (siehe Gl. (2)) beseitigen. Hierzu hat man $Q$ und $R$ nur in die Form zu setzen:

$$Q=\frac{\varphi'(u_1)^2-\varphi'(u_2)^2}{(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,(\varphi'(u_1)+\varphi'(u_2))}$$

$$(13)\quad =\frac{a_0(\varphi(u_1)^2+\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2)+\varphi(u_2)^2)+a_1(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))+a_2}{\varphi'(u_1)+\varphi'(u_2)}$$

$$R=\frac{\varphi(u_1)^2\cdot\varphi'(u_2)^2-\varphi(u_2)^2\cdot\varphi'(u_1)^2}{(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,(\varphi(u_1)\cdot\varphi'(u_2)+\varphi(u_2)\cdot\varphi'(u_1))}$$

$$(14)\quad =\frac{-a_0\cdot\varphi(u_1)^2\cdot\varphi(u_2)^2+a_2\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2)+a_3(\varphi(u_1)+\varphi(u_2))}{\varphi(u_1)\cdot\varphi'(u_2)+\varphi(u_2)\cdot\varphi'(u_1)}.$$

---

[1]) Man bemerke, daß $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(u_3)$ stets alle möglichen Wurzeln der kubischen Gl. (12) darstellen. Denn auf Grund der Voraussetzung (2) und (3) hat man stets $\varphi(u_2)\neq\varphi(u_1)$. Zugleich ist aber auch $\varphi(u_3)\neq\varphi(u_1)$ und $\varphi(\varphi u_3)\neq\varphi(u_2)$, außer wenn $u_2\equiv-2u_1$ oder $u_2\equiv-\frac{u_1}{2}$ (mod $2\omega$, $2\omega'$), in welchen Spezialfällen dann $\varphi(u_3)=\varphi(u_1)$ bzw. $\varphi(u_3)=\varphi(u_2)$ als Doppelwurzel auftritt.

## § 2.

### Additions-Theorem der Funktion $\wp u$.

Die Funktion $\wp u$ besitzt offenbar genau den Charakter $\varphi(u)$. Man findet also zunächst, indem man in Gl. (9) $\varphi(u) = \wp u$ setzt:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \wp' u_1 & \wp u_1 & 1 \\ \wp' u_2 & \wp u_2 & 1 \\ \wp' u_3 & \wp u_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (wenn } u_1 + u_2 + u_3 = 0 \text{ bzw. } \equiv 0),$$

eine Relation, welche sonst gewöhnlich als Folgerung aus dem Additions-Theorem der Funktion $\wp u$ hergeleitet wird[1]) und einer bekannten geometrischen Deutung (geradlinige Lage dreier Punkte der Kurve dritter Ordnung: $x = \wp u$, $y = \wp' u$) fähig ist.

Da die Gl. (11) hier die Form annimmt:

$$(16) \qquad (\wp' u)^2 = 4 \wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

so daß also:

$$(17) \qquad a_0 = 4, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -g_2, \quad a_3 = -g_3,$$

so liefert die Gleichung (I), wenn man noch $\wp u_3$ durch $\wp(u_1 + u_2)$ ersetzt, das Additions-Theorem in der bekannten Form:

$$(18) \qquad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\right)^2,$$

welche mit Benützung von Gl. (13) in die folgende, auch im Falle $u_2 = u_1$ brauchbare übergeht:

$$(19) \quad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{4(\wp^2 u_1 + \wp u_1 \cdot \wp u_2 + \wp^2 u_2) - g_2}{\wp' u_1 + \wp' u_2}\right)^2.$$

Die andere bekannte Form des Additions-Theorems resultiert sowohl aus Gl. (II), als aus Gl. (III). Man findet z. B. aus Gl. (III):

---

[1]) S. z. B. H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, p. 62.

$$\wp u_1 \cdot \wp u_2 \cdot \wp u_3 = \frac{1}{4}(R^2 + g_3),$$

wo:

$$R^2 + g_3 = \frac{\wp^2 u_1 (\wp' u_2)^2 + \wp^2 u_2 (\wp' u_1)^2 - 2\wp u_1 \wp u_2 \cdot \wp' u_1 \wp' u_2}{(\wp u_1 - \wp u_2)^2} + g_3$$

$$= \wp u_1 \wp u_2 \frac{(4\wp u_1 \wp u_2 - g_2)(\wp u_1 + \wp u_2) - 2\wp' u_1 \wp' u_2 - 2 g_3}{(\wp u_1 - \wp u_2)^2},$$

sodaß sich ergibt:

$$(20)\quad \wp(u_1 + u_2) = \frac{\left(2\wp u_1 \wp u_2 - \frac{1}{2} g_2\right)(\wp u_1 + \wp u_2) - \wp' u_1 \wp' u_2 - g_3}{2(\wp u_1 - \wp u_2)^2}.$$

## § 3.

### Die Additions-Theoreme der Funktionen *snu*, *cnu*, *dnu*.

Aus den Beziehungen

$$sn(u + 2K) = -snu \qquad sn(u + 2iK') = snu$$
$$sn(2mK + 2niK') = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

erkennt man, daß $sn^2 u$ die Perioden $2K$, $2iK'$ und somit im ersten Perioden-Parallelogramm die einzige Nullstelle $u = 0$ und zwar als zweifache Nullstelle besitzt. Es ist somit $sn^{-2} u$ wiederum eine Funktion vom Charakter $\varphi(u)$[1]) (wenn noch gesetzt wird: $\omega = K$, $\omega' = iK'$). Aus Gl. (9) folgt dann durch die Substitution von $\varphi(u) = sn^{-2} n$, also: $\varphi'(u) = -2sn^{-3}u \cdot sn' u$, wenn man die betreffende Gleichung noch mit $-\frac{1}{2} sn^3 u$ multipliziert:

$$(21)\quad \begin{vmatrix} sn' u_1 & sn\, u_1 & sn^3 u_1 \\ sn' u_2 & sn\, u_2 & sn^3 u_2 \\ sn' u_3 & sn\, u_3 & sn^3 u_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (wenn } u_1 + u_2 + u_3 = 0 \text{ bzw. } \equiv 0).$$

---

[1]) Dies würde natürlich auch unmittelbar aus der Formel:

$$sn^{-2} u = \frac{1}{e_1 - e_3} \cdot \wp\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)$$

folgen, von welcher ich aber absichtlich keinen Gebrauch machen will.

eine Relation, welche in analogem Zusammenhange, wie die Gl. (15) auftritt, wenn man die Theorie der Kurven dritter Ordnung mit homogenen statt mit rechtwinkeligen Koordinaten behandelt.[1])

Aus der Differentialgleichung:

$$(sn'u)^2 = (1 - sn^2 u)(1 - k^2 sn^2 u)$$

folgt sodann durch Multiplikation mit $(-2sn^{-3}u)^2 = 4sn^{-6}u$:

$$(-2sn^3 u \cdot sn' u)^2 = 4sn^{-2}u(sn^{-2}u - 1)(sn^{-2}u - k^2),$$

sodaß also die Differential-Gleichung für $\varphi(u) = sn^{-2}u$ folgendermaßen lautet:

$$(22) \qquad \varphi'(u)^2 = 4\varphi(u)^3 - 4(1+k^2)\varphi(u)^2 + 4k^2\varphi(u).$$

Man übersieht unmittelbar, daß die einfachste Form des Additions-Theorems hier durch Anwendung der Formel (III) resultieren muß. Man findet (wegen $a_3 = 0$) auf diese Weise:

$$sn^{-2}u_1 \cdot sn^{-2}u_2 \cdot sn^{-2}u_3$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-2sn^{-2}u_1 \cdot sn^{-3}u_2 \cdot sn'u_2 + 2sn^{-2}u_2 \cdot sn^{-3}u_1 \cdot sn'u_1}{sn^{-2}u_1 - sn^{-2}u_2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{snu_1 \cdot sn'u_2 - snu_2 \cdot sn'u_1}{snu_1 \cdot snu_2(sn^2u_2 - sn^2u_1)}\right)^2$$

und daher:

$$(23) \qquad sn^2u_3 = \left(\frac{sn^2u_2 \cdot sn^2u_1}{snu_1 \cdot sn'u_2 - snu_2 \cdot sn'u_1}\right)^2.$$

Daraus folgt, wegen $snu_3 = -sn(u_1+u_2)$, zunächst:

$$(24) \qquad sn(u_1+u_2) = \varepsilon \cdot \frac{sn^2u_1 - sn^2u_2}{snu_1 \cdot sn'u_2 - snu_2 \cdot sn'u_1},$$

---

[1]) S. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I (1876), p. 605, Gl. (8). (Es muß dort übrigens p. 604, Gl. (5) statt:

$$\varrho x_1 = \sin^3 \operatorname{am} u$$

heißen:

$$\varrho x_1 = k^2 \sin^3 \operatorname{am} u).$$

wo $\varepsilon = \pm 1$. Da aber Gl. (23) und somit Gl. (24) infolge der Stetigkeit von $sn\, u$ bei $u = 0$ auch noch für den ursprünglich ausgeschlossenen Fall $u_2 = 0$ gilt, so folgt, wegen $sn'\,0 = 1$:

$$sn\, u_1 = \varepsilon \cdot \frac{sn^2 u_1}{sn\, u_1}, \text{ also } \varepsilon = +1,$$

und somit schließlich:

$$sn(u_1 + u_2) = \frac{sn^2 u_1 - sn^2 u_2}{sn\, u_1 \cdot sn' u_2 - sn\, u_2 \cdot sn' u_1}. \tag{25}$$

Um auch diese Formel zu einer für den bisher ebenfalls ausgeschlossenen Fall $u_2 = u_1$ brauchbaren umzugestalten, hat man wieder nur Zähler und Nenner der rechten Seite mit einem passenden Faktor, nämlich $(sn\, u_1 \cdot sn' u_2 + sn\, u_2 \cdot sn' u_1)$ zu multiplizieren und zu beachten, daß:

$$\begin{aligned} & sn^2 u_1 \cdot sn'^2 u_2 - sn^2 u_2 \cdot sn'^2 u_1 \\ = {} & sn^2 u_1 \cdot cn^2 u_2 \cdot (1 - k^2 sn^2 u_2) - sn^2 u_2 \cdot cn^2 u_1 \cdot (1 - k^2 sn^2 u_1) \\ = {} & (sn^2 u_1 - sn^2 u_2) \cdot (1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2), \end{aligned}$$

sodaß sich schließlich das fragliche Additions-Theorem in der zumeist üblichen Form ergibt:

$$sn(u_1 + u_2) = \frac{sn\, u_1 \cdot cn\, u_2 \cdot dn\, u_2 + sn\, u_2 \cdot cn\, u_1 \cdot dn\, u_1}{1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2} \tag{26}$$

Will man hieraus lediglich mit Hilfe der Beziehungen:

$$\begin{cases} cn^2(u_1 + u_2) = 1 - sn^2(u_1 + u_2) \\ dn^2(u_1 + u_2) = 1 - k^2 sn^2(u_1 + u_2) \end{cases} \tag{27}$$

auch noch die entsprechenden Formeln für $cn(u_1+u_2)$, $dn(u_1+u_2)$ herleiten, so läßt sich die erforderliche Rechnung etwa in folgender Weise ziemlich einfach durchführen.

Es werde gesetzt:

$$1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2 = N. \tag{28}$$

Die Substitution von $1 = cn^2 u_1 + sn^2 u_1 = cn^2 u_2 + sn^2 u_2$ liefert alsdann für $N$ die beiden Ausdrücke:

$$N = cn^2 u_1 + sn^2 u_1 \cdot dn^2 u_2 = cn^2 u_2 + sn^2 u_2 \cdot dn^2 u_1$$

und somit für $N^2$ dem symmetrischen Ausdruck:

$$(29) \qquad N^2 = (cn^2 u_1 + sn^2 u_1 \;\; dn^2 u_2)(cn^2 u_2 + sn^2 u_2 \cdot dn^2 u_1).$$

Ebenso ergibt sich aus dem Ausdrucke für $N$ durch Substitution von $1 = dn^2 u_1 + k^2 sn^2 u_1 = dn^2 u_2 + k^2 sn^2 u_2$:

$$(30) \quad N^2 = (dn^2 u_1 + k^2 sn^2 u_1 \cdot cn^2 u_2)(dn^2 u_2 + k^2 sn^2 u_2 \cdot cu^2 u_1).$$

Durch Einführung von (29) bzw. (30) in die rechte Seite der mit $N^2$ multiplizierten Beziehungen (27) findet man dann aber ohne weiteres:

$$(31) \quad \begin{cases} N^2 \cdot cn^2(u_1 + u_2) = (cn u_1 \cdot cn u_2 - sn u_1 \cdot dn u_1 \cdot sn u_2 \cdot dn u_2)^2 \\ N^2 \cdot dn^2(u_1 + u_2) = (dn u_1 \cdot dn u_2 - k^2 \cdot sn u_1 \cdot cn u_1 \cdot sn u_2 \cdot cn u_2)^2 \end{cases}$$

und, da sich das Vorzeichen der Quadratwurzeln wieder unmittelbar durch Substitution von $u_2 = 0$ bestimmen läßt, so erhält man auf diese Weise in der Tat die bekannten Formeln für $cn(u_1 + u_2)$, $dn(u_1 + u_2)$.

---

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1906

Band/Volume: 1906

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Über das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen 415-423