Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der innern Planeten.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 1. Dezember.)

Nur in ganz wenigen Fällen ist es bisher der Astronomie nicht gelungen, die beobachteten Bewegungen, der erlangten Genauigkeit entsprechend, als reine Folge der Newtonschen Gravitation darzustellen. Beschränkt man sich auf die Bewegungen der großen Planeten, so ist insbesondere in einem Fall eine allerdings erhebliche Differenz zwischen Theorie und Beobachtung hervorgetreten. Auf ihn bezieht sich die vielbesprochene Entdeckung Leverriers, der vor mehr als 40 Jahren fand, daß die Perihellänge der Merkurbahn sich im Jahrhundert um rund 40″ schneller vorwärts bewegt, als die allein auf die gegenseitige Anziehung der Planeten gegründete Theorie ergibt. Diese Leverriersche Entdeckung ist von vielen Seiten nachgeprüft worden. Stets ergab sich eine Bestätigung auch in quantitativer Beziehung, so daß man das tatsächliche Vorhandensein dieser Anomalie als absolut feststehend bezeichnen muß. Die eingehendsten Nachforschungen in dieser Richtung verdankt man S. Newcomb, der über Leverrier hinausgehend, bei allen vier inneren Planeten und zwar in allen Bahnelementen nach etwaigen anderen empirischen Gliedern suchte, indem er die Säkularveränderungen der Bahnelemente einerseits empirisch bestimmte, andererseits nach der Newtonschen Theorie berechnete. Die so gefundenen Differenzen in den hundertjährigen

Veränderungen im Sinne Beobachtung—Theorie, nebst ihren wahrscheinlichen Fehlern sind folgende:[1])

	Merkur	Venus	Erde	Mars
$\frac{de}{dt} =$	$-0''88 \pm 0''50$	$+0''21 \pm 0''31$	$+0''02 \pm 0''10$	$+0''29 \pm 0''27$
$e\,\frac{d\pi}{dt} =$	$+8.48 \pm 0.43$	-0.05 ± 0.25	$+0.10 \pm 0.13$	$+0.75 \pm 0.34$
$\frac{di}{dt} =$	$+0.38 \pm 0.80$	$+0.38 \pm 0.33$	—	-0.01 ± 0.2[illegible]
$\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} =$	$+0.61 \pm 0.52$	$+0.60 \pm 0.17$	—	$+0.03 \pm 0.22$

Die angeführten wahrscheinlichen Fehler mögen vielleicht nicht die ganze Unsicherheit der Resultate angeben. Immerhin wird man doch zugeben müssen, daß einige dieser Glieder nicht ohne weiteres als nicht reell angesehen werden dürfen. In jedem Falle werden solche Annahmen, welche etwa zur Erklärung der Bewegung des Merkurperihels gemacht werden, den Vorzug verdienen, welche auch die anderen Newcombschen Glieder ihren Fehlern entsprechend miterklären. Nur das Glied in der Exzentrizität der Merkurbahn und ebenso der anderen Planetenbahnen muß zunächst unberücksichtigt bleiben, da zu seiner Erklärung andere Annahmen, als bis jetzt gebraucht worden sind, nötig wären. Newcomb selbst ist der Meinung, daß bei Merkur der wahrscheinliche Fehler zu klein herausgekommen ist und dieses Glied, zunächst wenigstens, als nicht reell angesehen werden darf.

2.

Die Zahl der Hypothesen, welche zur Erklärung der Bewegung des Merkurperihels aufgestellt worden sind, ist nicht klein. Sie sind zum Teil von Newcomb a. a. O. erwähnt und in einer Weise kritisiert worden, der man in den meisten Punkten beistimmen wird können. Lange Zeit wurde, namentlich im

[1]) S. Newcomb, the Elements of the four inner Planets etc. Washington 1895, S. 108.

Anschluß an Leverrier selbst, die Annahme intramerkurieller Planeten in kleiner oder größerer Zahl oder selbst in volle Planetenringe aufgelöst, bevorzugt. Die formale Seite der Frage wurde öfters, so von Newcomb und Bauschinger,[1]) untersucht. In dieser Beziehung genügt die erwähnte Annahme den zu stellenden Anforderungen ziemlich befriedigend, wenn man sie in Verbindung mit einer säkularen Drehung des empirischen, in der Astronomie gebrauchten Koordinatensystems zur Anwendung bringt. Sie rechnet aber, abgesehen vielleicht noch von anderen Bedenken, mit Verhältnissen, wenigstens wenn man den allerdings negativen Aussagen der Beobachtung entsprechend die Anzahl der einzelnen Massen des Ringes groß annimmt, welche sich zunächst weder erweisen noch widerlegen lassen, und die also zu derjenigen Klasse von Hypothesen gerechnet werden muß, die man als unnötige bezeichnen kann. Vorausgesetzt natürlich, daß man eine mehr ansprechende Annahme machen kann.

Nicht so gut entspricht in formaler Beziehung die Annahme ungleicher Hauptträgheitsmomente des Sonnenkörpers, die ebenfalls vielfach, besonders eingehend von P. Harzer[2]) untersucht worden ist, da der Sonnenäquator seiner Lage nach ziemlich sicher bekannt ist und man doch wohl annehmen muß, daß die Hauptachsen im Äquator und in der Rotationsachse liegen. Aber dieser Annahme wird durch die Beobachtungen an der Sonne entschieden widersprochen, denen zufolge die in verschiedenen Richtungen gemessenen Durchmesser sich kaum um mehr als etwa 0.″1 voneinander unterscheiden können. Dagegen erfordert die obige Annahme, daß der äquatoriale Sonnendurchmesser um etwas mehr als 1″ größer als der polare sein muß. Dieses Resultat läßt sich streng aus gewissen Voraussetzungen mit wenigen Worten ableiten, weshalb ich kurz darauf eingehe, obwohl ja die Frage durch die Rechnungen des Herrn Harzer

---

[1]) J. Bauschinger, Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur. München 1884.

[2]) Paul Harzer, Über die Bewegung des Merkurperihels. Astron. Nachr. Nr. 3030 (1891).

als erledigt betrachtet werden darf. Sind C und A die beiden Hauptträgheitsmomente der Sonne in Bezug auf die Drehachse und in Bezug eine im Äquator gelegene Achse, wobei das dritte Trägheitsmoment dem A gleich angenommen wird, M die Sonnenmasse, n, a, π die mittlere Bewegung, mittlere Entfernung von der Sonne und Länge des Perihels eines Planeten, so ist für hinreichend kleine Exzentrizitäten und Neigungen bekanntlich die säkulare Veränderung von π gegeben durch:

$$\frac{d\pi}{dt} = \tfrac{3}{2}(C - A) \cdot \frac{n}{a^2 M}.$$

Die Abplattung ε der Sonnenoberfläche ist andererseits nach einem vielgebrauchten Satze der Himmelsmechanik gegeben durch:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{3}{2}\frac{C - A}{R^2 M},$$

wo R der Sonnenradius und Φ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Anziehung im Äquator ist. Diese Formel setzt nichts über die Dichtigkeitszunahme in der Richtung zum Zentrum des Sonnenkörpers voraus, nur wird angenommen, daß sich das Innere der rotierenden flüssigen Masse im Gleichgewicht befindet. Daraus folgt aber für die Abplattung des Sonnenkörpers:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\Phi + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{d\pi}{dt}.$$

Soll demnach die Bewegung des Merkurperihels durch eine Verschiedenheit der Trägheitsmomente der Sonne erklärt werden, so muß $\frac{d\pi}{dt} = 40''$ im Jahrhundert gesetzt werden und da $\Phi = 0.000020$ ist, folgt $\varepsilon = 0.000525$. Danach muß der äquatoriale Sonnendurchmesser (α) $1''.01$ größer sein als der polare (β), was mit den Angaben des Herrn Harzer gut stimmt. Die Messungen an der Sonne geben sicherlich kaum $\alpha - \beta = 0''.1$.

Wird die Sonne als homogen betrachtet, so gibt bekanntlich die Gleichgewichtstheorie $\alpha - \beta = 0''.05$. Nimmt man andererseits das andere Extrem an, nämlich, daß die Masse unendlich zusammendrückbar ist, daß also die ganze übrige Sonnenmasse gegenüber der in der Nähe des Zentrums befindlichen zu vernachlässigen ist, so ergibt sich leicht $\alpha - \beta = 0\overset{''}{.}02$. Nach diesen Daten dürfte es jedenfalls aussichtslos sein, die Merkurperihelbewegung durch ungleiche Verteilung der Masse der Sonne in ihrem Innern zu erklären, selbst wenn man von den Bedingungen des Gleichgewichts absieht.

Von physikalischer Seite beeinflußt, hat man bald nach der Leverrierschen Entdeckung und seit jener Zeit in den verschiedensten Formen durch mehr oder weniger ansprechende Überlegungen eine Modifikation des Newtonschen Fernwirkungsgesetzes zu finden gesucht, welche die Anomalie in der Bewegung des Merkurperihels zu erklären imstande wäre. Der Erfolg ist in formaler Beziehung im ganzen ausgeblieben, d. h. es gelang in den meisten Fällen nicht, den festgestellten Betrag dieser Bewegung herzuleiten. Überdies hat man hierbei von vornherein darauf verzichtet oder verzichten müssen, die anderen Newcombschen empirischen Glieder zu erklären. Das letztere dürfte allerdings, in erster Annäherung, vielleicht als zulässig angesehen werden können. Wie dem auch sein möge, als besonders geeignet wurde in letzter Zeit eine Modifikation des Newtonschen Gesetzes betrachtet, derzufolge der Exponent 2 der reziproken Entfernung durch einen um eine sehr kleine Größe vermehrten $2 + \lambda$ zu ersetzen wäre. Schon in Newtons Prinzipien ist der Satz abgeleitet, daß hierdurch eine säkulare Bewegung des Perihels in positivem Sinne entsteht und die Mathematiker Green und Carl Neumann[1]) haben sich dieses Gesetzes angenommen und es im Gebiete der Elektrizität verwertet. Der Verwendung eines solchen Gesetzes in der Astronomie stehen indessen ernstliche Bedenken entgegen. Bleibt man auf dem Boden der Fernwirkungstheorie, so wird ein solches allerdings akzeptabel sein, da es in der Tat bei passender Wahl von λ die Bewegung des Merkurperihels in gewünschtem Betrage

[1]) Carl Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig 1896.

ergibt ohne bei den anderen Planeten Beträge für ähnliche Glieder zu erfordern, die den Beobachtungen widersprechen. Dagegen stellen sich Bedenken allgemeinerer Art ein. Ich habe zu wiederholten Malen [1]) darauf aufmerksam gemacht, daß das Newtonsche Gesetz kein strenger und unbedingt geltender Ausdruck für die im Weltall herrschenden Anziehungen sein kann, indem man auf lästige, wenn nicht unüberwindliche Schwierigkeiten stößt, wenn man dieses Gesetz auf beliebig große, mit Masse erfüllte Räume anwendet. Letzteres muß aber erlaubt sein, da das Newtonsche Gesetz ein Universalgesetz, d. h. unter allen Umständen genau gültig sein soll. Diese Bedenken sind, wie ich glaube, durch die dagegen erhobenen Einwände, nur gewichtiger geworden. Nach meiner Meinung müßte demnach, wenn man an eine solche rein formale Modifikation des Ausdrucks für die Newtonsche Fernwirkung denken will, diesen Bedenken Rechnung getragen werden. Das Greensche Gesetz ist aber, wie ich nachgewiesen habe, nicht geeignet, dies zu leisten.

Verläßt man aber den Boden der Fernwirkungstheorie, so wird man kaum erwarten dürfen, durch irgendwelche physikalische Überlegungen oder Annahmen zu einem ähnlich einfachen Gesetze zu gelangen, wie das Greensche. Ich kann mich deshalb nicht der Meinung anschließen, wonach durch die Annahme dieses Gesetzes eine brauchbare oder befriedigende Erklärung der Bewegung des Merkurperihels angebahnt sein soll.

3.

Die theoretische Astronomie hat die Bewegungen im Planetensystem mit Berücksichtigung aller vorhandenen Massen zu erklären und in dieser Beziehung alles zu versuchen, ehe sie zu einer Modifikation ihrer Grundlagen oder zur Annahme unsichtbarer Massen oder dergleichen greift. Zu diesen jedenfalls vorhandenen, weil sichtbaren Massen gehören aber die Massen,

---

[1]) Über das Newtonsche Gravitationsgesetz. Astron. Nachrichten Nr. 3273 und Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1896.

welche das Zodikallicht erzeugen oder kurz gesagt das Zodiakallicht.

Ich hatte bei verschiedenen Gelegenheiten[1]) Veranlassung, mich der Ansicht anzuschließen, nach der die Erscheinung des Zodiakallichts auf fein zerstreute Materie zurückzuführen ist, die um die Sonne herumgelagert ist und nachweisbar über die Erdbahn hinausreicht. Über die Dichtigkeitsverteilung in dieser Masse läßt sich zur Zeit Genaueres nicht aussagen; aber nichts spricht dagegen, daß die Flächen gleicher Dichtigkeit scheibenförmige Rotationsflächen sind und die Dichtigkeit mit der Entfernung von der Sonne abnimmt. Früher nahm man den Äquator dieser Flächen als nahezu in der Ekliptik liegend an, neuere Beobachter dagegen sind geneigt, ihn mit größerer Annäherung mit dem Sonnenäquator zusammenfallen zu lassen. Damit soll nicht gesagt sein, daß alle Flächen gleicher Dichtigkeit genau dieselbe Rotationsachse haben, denn wie sich die der Sonne nächsten Teile des Zodiakallichts in dieser Richtung verhalten, wird sich wohl schwerlich feststellen lassen, ist jedenfalls bisher völlig unaufgeklärt geblieben, da man die Erscheinung des Zodiakallichtes sicher nicht bis zu kleineren Winkelabständen von der Sonne, als 20 oder 30 Grad, verfolgen kann. Zudem kann die Massendichtigkeit aus der beobachteten Lichtverteilung keineswegs hypothesenfrei abgeleitet werden, denn die letztere ist nicht nur von der Dichtigkeit der Massenverteilung sondern auch von dem Volumen der einzelnen Teilchen, welche das Zodiakallicht bilden, abhängig. Je größer die Anzahl der Teilchen ist, in welche dieselbe Masse zerteilt ist, desto größer ist unter sonst gleichen Umständen die Flächenhelligkeit des zurückgeworfenen Sonnenlichts.

Man hat demnach eigentlich kein anderes Mittel zur Bestimmung der Massendichtigkeit im Zodiakallicht, als das Studium der von ihm ausgehenden Anziehungskräfte. Daß solche vor-

[1]) U. A. a) Über allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Verlag der Münchener Akademie, 1892.

b) Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht. Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1901.

handen sein und die Bewegungen der Planeten beeinflussen müssen, ist selbstverständlich zweifellos und nur über die Größe dieser Einwirkung können die Meinungen auseinandergehen.

Mit einiger Sicherheit darf behauptet werden, daß sich die Masse des Zodiakallichts symmetrisch um eine Ebene gruppiert, von der wir allerdings nicht wissen, ob sie der Ekliptik oder dem Sonnenäquator näher liegt. Es ist ferner ziemlich sicher, daß in der Erscheinung des Zodiakallichts die Jahreszeit so gut wie keine Rolle spielt. Man wird danach die Dichtigkeit q als Funktion nur von der Entfernung von der Sonne (ϱ) und des Winkelabstandes ϑ von dem Pole der Symmetrieebene ansehen dürfen. Es kann also q als eine Kugelfunktionsreihe:

$$q = {}_n\sum_0^\infty A_n P^n(\cos\vartheta)$$

angenommen werden, in der die Koeffizienten A_n Funktionen von ϱ sind. Wegen der erwähnten Symmetrie wird ferner n eine gerade ganze Zahl sein. Nimmt man nun an, daß die genannte Reihenentwicklung für q so aufgestellt werden kann, daß sie für alle innerhalb einer Kugel vom Radius r_1 liegenden Punkte gilt, wo also r_1 die Maximalausdehnung des Zodiakallichts ist, dann läßt sich die Störungsfunktion Ω, welche bei der Bewegung des inneren Planeten in Betracht zu ziehen ist, sehr einfach darstellen. Denn es ist zunächst:

$$\Omega = k^2 \int_0^r \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{r_1} \varrho^2 q\, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta},$$

wo Δ die Entfernung des Planeten ($r\, \vartheta_1\, \varphi_1$) und eines Massenteilchens ($\varrho\, \vartheta\, \varphi$) ist und k die Gaußsche Konstante bedeutet. Ist noch γ der Winkel zwischen ϱ und r, so hat man:

$$\frac{1}{\Delta} = {}_i\sum_0^\infty \frac{\varrho^i}{r^{i+1}} P^i(\cos\gamma) \ldots \varrho < r$$

$$\frac{1}{\Delta} = {}_i\sum_0^\infty \frac{r^i}{\varrho^{i+1}} P^i(\cos\gamma) \ldots \varrho > r.$$

Setzt man dies und die Reihe für q in den Ausdruck für Ω ein, so ergibt die Anwendung sehr bekannter Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen:

$$\Omega = 4\pi k^2 \cdot {}_n\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} P^n(\cos\vartheta)\left\{\int_0^r \frac{\varrho^{n+2}}{r^{n+1}} A_n\, d\varrho + \int_r^{r_1} \frac{r^n}{\varrho^{n-1}} A_n\, d\varrho\right\}.$$

Die weitere Entwicklung hängt von der Form ab, welche die A_n als Funktionen von ϱ haben. Man könnte gegebenenfalls sich die A_n stets als Potenzreihen, welche nach ganzen positiven und negativen Potenzen von ϱ fortschreiten (da die Umgebung des Punktes $\varrho = 0$ ausgeschlossen erscheint), denken, und da man nur den säkularen Teil von Ω brauchen wird, wären die säkularen Teile von:

$$r^m P^n(\cos\vartheta), \quad \log r \cdot P^n(\cos\vartheta),$$

wo m positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, zu entwickeln. Das ist leicht in der gewöhnlichen Weise durch Rechenentwicklungen und in mathematisch annehmbarerer Form durch Einführung von Funktionen, die den Kugelfunktionen verwandt sind, auszuführen. Doch hätte die Mitteilung der betreffenden Formeln für die vorliegenden Fragen keine Bedeutung, denn es ist gegenwärtig unmöglich die Entwicklung von q etwa anderswoher zu nehmen und andererseits ist die Einwirkung des Zodiakallichts auf die Bewegung der Planeten so klein und dergestalt, daß eine Bestimmung der wirksamen Koeffizienten durch diese Störungen nicht wohl auszuführen wäre. Man wird vielmehr nur zu einem befriedigenden Ziele gelangen, wenn man von vornherein über die Gestalt der Flächen gewisse Annahmen macht, die man natürlich, dem Gesagten zufolge, als mehr oder weniger plausibel ansehen mag. Hält man daran fest, daß die genannten Flächen ähnlich plattgedrückten Scheiben aussehen müssen, dann kann man die näheren Bestimmungsstücke innerhalb gewisser Grenzen variieren, ohne einen schlechteren Anschluß an die Beobachtungsdaten befürchten zu müssen. Man wird deshalb die spezielleren Daten so wählen können, daß die auszuführende Rechnung verhältnismäßig einfach wird.

Da bietet sich nun zunächst die Annahme dar, daß man das Zodiakallicht aus lauter Schichten, welche zwischen zwei Umdrehungsellipsoiden mit großen Abplattungen liegen, bestehen läßt. Man kann jedenfalls eine, vielleicht auch mehrere stetige Dichtigkeitsänderungen von Schicht zu Schicht so wählen, daß das Potential der ganzen Masse auf innere Punkte durch weitere Entwicklung auch für die numerische Rechnung brauchbar zum Ausdrucke gebracht wird. Indessen wird man in gewissem Sinne allgemeiner und zweckmäßiger so verfahren, daß man eine endliche Zahl beliebiger homogener Ellipsoide mit gleichem Mittelpunkt in der Sonne übereinanderlegt und die Dichtigkeit dieser Ellipsoide ebenso wie ihre Lage und Größenverhältnisse so wählt, wie den darzustellenden Anomalien in den Bewegungen der inneren Planeten angemessen ist. Die einzelnen Ellipsoide müssen so gelegt werden, daß ihre Oberflächen von keiner Planetenbahn geschnitten werden. Diesen Weg habe ich vor 13 Jahren beschritten, mußte damals aber den Abschluß meiner Rechnungen aufgeben, da die Newcombschen Zahlen noch nicht vorlagen, somit irgendwelche Handhabe zu einer Prüfung nicht vorhanden war.

4.

Man muß also die säkularen Störungen, denn diese kommen allein in Betracht, in angemessener Form berechnen, welche ein homogenes Rotationsellipsoid auf innere und äußere planetarisch bewegte Punkte ausübt. Zu diesem Zwecke ist der säkulare Teil des Potentiales eines homogenen aber beliebig stark abgeplatteten Ellipsoides abzuleiten. Bei dieser Rechnung kann man von den Potentialen V_a und V_i eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit den Axen a, a und b und der homogenen Dichtigkeit q auf äußere und innere Punkte in der integrierten Form ausgehen. Viel einfacher ist es aber, wenn man zuerst die Ausdrücke unter dem Integral entwickelt und dann erst die Integration ausführt, wobei nur bekannte Formeln anzuwenden sind. Beide Methoden geben selbstverständlich übereinstimmende Resultate.

Ist noch k die Gaußsche Konstante und setzt man:

$$\frac{V}{k^2 \pi q a^2 b} = \Omega,$$

so ist bekanntlich für äußere Punkte:

$$\Omega_a = \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2}{b^2 + \sigma}\right) \cdot \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}},$$

wo λ_1 bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{b^2 + \lambda_1} = 1.$$

Für innere Punkte ergibt sich Ω_i, wenn in Ω_a $\lambda_1 = 0$ gesetzt wird. Setzt man hierin noch:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so wird also:

$$\Omega_a = \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2(a^2 - b^2)}{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)}\right) \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)(\sqrt{b^2 + \sigma})} \quad (1)$$

und:

$$\frac{r^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{z^2 \cdot (a^2 - b^2)}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)} = 1. \quad (2)$$

Für innere Punkte ist dagegen das zugehörige Potential:

$$\Omega_i = \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{r^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2(a^2 - b^2)}{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)}\right] \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}}.$$

Die Berechnung der säkularen Störungen, welche die inneren Planeten durch diese Potentiale erleiden, kann nun dadurch ausgeführt werden, daß man die in den bekannten Ausdrücken für diese Störungen vorkommenden Differentialquotienten von Ω nach den Elementen bildet und dann die Integrale in Bezug auf den ganzen Umkreis der mittleren Anomalie auf mechanischem Wege ermittelt. In einem gegebenen speziellen Falle wäre dieses Verfahren rechnerisch vielleicht das einfachere. Will man aber wiederholt ähnliche

Rechnungen mit abgeänderten Daten ausführen, dann ist es angemessen, die Unbequemlichkeit einer allgemeinen analytischen Entwicklung nicht zu scheuen.

Im vorliegenden Falle, wo es sich um die inneren Planeten handelt, dürfen nun die Bahnexzentrizitäten und die Bahnneigungen gegen die Ekliptik oder andere gegen sie nicht beträchtlich geneigte Ebenen als kleine Größen betrachtet werden, nach deren Potenzen brauchbare Entwicklungen von Ω fortschreiten werden. Für die Planeten Venus, Erde und Mars wird man dann, da es sich doch nur um mäßig genaue Entwicklungen handelt, bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleiben können. Es ist leicht einzusehen, daß die Endresultate kaum wesentlich sich ändern werden, wenn man auch in Bezug auf die Merkurbahn dieselbe Einschränkung der Entwicklung gelten läßt und ich habe vorläufige Rechnungen tatsächlich so ausgeführt. Jetzt soll die Entwicklung auf breiterer Grundlage ausgeführt werden und zwar so, daß auch für Merkur die größten Glieder bis auf 3 bis 4 Stellen genau herauskommen.

Im folgenden wird die sogenannte Elliptizität λ:

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \tag{3}$$

eingeführt. Damit bestimmt sich der hier in Frage kommende Wert von λ_1 nach (2):

$$\lambda_1 + b^2 = \frac{r^2 - \lambda^2 b^2}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 + \lambda^2 b^2)^2 + 4 z^2 \lambda^2 b^2}.$$

Bezeichnet man mit a_1 die mittlere Entfernung des in Betracht zu ziehenden Planeten und setzt man:

$$r^2 = \varrho = a_1^2 + u,$$

so wird u eine kleine Größe sein und es soll also das Potential Ω nach Potenzen und Produkten von u und $z^2 = \zeta$ entwickelt werden.

Bezeichnet man die Werte der Differentialquotienten für $u = 0$ und $z = 0$ durch Hinzufügung des Index 0, so wird:

$$\left.\begin{array}{l}
\Omega = \Omega_0 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}\right)_0 u + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_0 \cdot z^2 \\
\quad + \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho^2}\right)_0 u^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho \partial \zeta}\right)_0 u z^2 + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho^2}\right)_0 z^4\right] \frac{1}{1 \cdot 2} \\
\quad + \left\{\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho^3}\right)_0 u^3 + 3\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho^2 \partial \zeta}\right)_0 u^2 z^2 + 3\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho \partial \zeta^2}\right)_0 u z^4 \right. \\
\qquad \left. + \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \zeta^3}\right) \cdot z^6\right\} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
\quad + - - - - - - - - - -
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Bei der Differentiation des Integrals für Ω_a kann man die Grenze λ_1 konstant halten, weil für $\sigma = \lambda_1$ der Ausdruck unter dem Integral nach (2) verschwindet, wodurch die weitere Ausrechnung wesentlich vereinfacht wird. Das Glied:

$$\Omega_0 = \mathrm{I} - a_1^2\,\mathrm{II},$$

wo:

$$\mathrm{I} = \int\limits_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2+\sigma)\sqrt{b^2+\sigma}}; \quad \mathrm{II} = \int\limits_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2+\sigma)^2\sqrt{b^2+\sigma}},$$

kann man ganz fortlassen, da es nur vom Bahnelement a_1 abhängt und Differentialquotienten nach a_1 im folgenden nicht vorkommen. Es tritt noch das Integral:

$$\mathrm{III} = \int\limits_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2+\sigma)^2(b^2+\sigma)^{\frac{3}{2}}}$$

auf. Hier ist λ_1^0 der Wert von λ_1 für $u = z^2 = 0$, also:

$$(\lambda_1^0)^2 + b^2 = a_1^2 - a^2 + b^2 = a_1^2 - \lambda^2 b^2.$$

Am einfachsten für die numerische Rechnung scheinen sich die Formeln zu gestalten, wenn man:

$$\xi^2 = \frac{\lambda^2 b^2}{a_1^2 - \lambda^2 b^2} \quad (5)$$

einführt, woraus u. a. folgt:

$$a_1^2 = \lambda^2 b^2 \cdot \frac{1+\xi^2}{\xi^2}.$$

Die oben erwähnten Integrale I, II und III sind bekanntlich leicht ausführbar und man findet:

$$\mathrm{I} = \frac{2}{b\lambda} \operatorname{arctg} \xi; \quad \mathrm{II} = \frac{1}{b^3\lambda^3}\left[\operatorname{arctg} \xi - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right]$$

$$(a^2 - b^2)\,\mathrm{III} = -\frac{3}{b^3\lambda^3} \operatorname{arctg} \xi + \frac{1}{b^3\lambda^3} \cdot \frac{3\xi + 2\xi^3}{1+\xi^2}.$$

Ich habe im folgenden noch die Bezeichnung benutzt:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\xi) &= 3 \operatorname{arctg} \xi - \frac{3\xi + 2\xi^3}{1+\xi^2} \\ \Psi_1(\lambda) &= 3\left(\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Berechnung des Differentialquotienten in (4) bietet nun höchstens einige Umständlichkeiten, aber keine Schwierigkeiten dar. Es wird genügen, ihre Werte in der definitiven Form anzuführen.

$$\left(\frac{\partial^1 \Omega_a}{\partial \varrho}\right)_0 = -\frac{1}{3b^3\lambda^3}\left[\Psi(\xi) + 2\xi\frac{\lambda^2 b^2}{a_1^2}\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_a}{\partial \varrho^2}\right)_0 = \frac{\xi}{\lambda b a_1^4}$$

$$\left(\frac{\partial^3 \Omega_a}{\partial \varrho^3}\right)_0 = -\frac{\xi}{\lambda b a_1^6}\left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\xi^2\right]$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Omega_a}{\partial \varrho^4}\right)_0 = +\frac{\xi}{\lambda b a_1^8}\left[\frac{35}{4} + \frac{7}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^4\right]$$

$$\left(\frac{\partial^5 \Omega_a}{\partial \varrho^5}\right)_0 = -\frac{\xi}{\lambda b a_1^{10}}\left[\frac{315}{8} + \frac{189}{8}\xi^2 + \frac{81}{8}\xi^4 + \frac{15}{8}\xi^6\right]$$

$$\left(\frac{\partial^6 \Omega_a}{\partial \varrho^6}\right)_0 = +\frac{\xi}{\lambda b a_1^{12}}\left[\frac{3465}{16} + \frac{693}{4}\xi^2 + \frac{891}{8}\xi^4 + \frac{165}{4}\xi^6 + \frac{105}{16}\xi^8\right].$$

Für die Differentialquotienten nach ζ findet man:

$$\left(\frac{\partial\,\Omega_a}{\partial\,\zeta}\right)_0 = \frac{1}{b^3\,\lambda^3}\,\Psi(\xi)$$

$$\left(\frac{\partial^2\,\Omega_a}{\partial\,\zeta^2}\right)_0 = +\frac{1}{b\,\lambda\,a_1^4}\,\xi^5$$

$$\frac{\partial^2\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho} = +\frac{1}{b\,\lambda\,a_1^4}\,\xi^3$$

$$\frac{\partial^3\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho^2} = -\frac{\xi^3}{b\,\lambda\,a_1^6}\left[\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\,\xi^2\right]$$

$$\frac{\partial^3\,\Omega_a}{\partial\,\zeta^2\,\partial\,\varrho} = -\frac{\xi^5}{\lambda\,b\,a_1^6}\left[\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\,\xi^2\right]$$

$$\frac{\partial^4\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho^3} = +\frac{\xi^3}{b\,\lambda\,a_1^8}\left[\frac{63}{4}+\frac{27}{2}\,\xi^2+\frac{15}{4}\,\xi^4\right]$$

$$\frac{\partial^4\,\Omega_a}{\partial\,\zeta^2\,\partial\,\varrho^2} = +\frac{\xi^5}{\lambda\,b\,a_1^8}\left[\frac{99}{4}+\frac{55}{2}\,\xi^2+\frac{35}{4}\,\xi^4\right]$$

$$\frac{\partial^5\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho^4} = -\frac{\xi^3}{\lambda\,b\,a_1^{10}}\left[\frac{693}{4}+\frac{891}{8}\,\xi^2+\frac{495}{8}\,\xi^4+\frac{105}{8}\,\xi^6\right].$$

— — — — — — — — — — —

In Rücksicht auf die im Folgenden auftretenden Verhältnisse, denen zufolge bei Merkur zwar u beträchtlich, dagegen aber ζ sehr klein und bei den übrigen inneren Planeten, wo ζ merkbarer als u ist, reichen die angegebenen Werte zu einer für die vorliegenden Zwecke genügend sicheren Berechnung der säkularen Störungen sicherlich aus. Es sind nunmehr die **säkularen** Teile der Potenzen und Produkte von u und ζ zu berechnen. Ich bezeichne diese durch ein vorgesetztes S. Am einfachsten gewinnt man in den vorliegenden Fällen den säkularen Teil einer Funktion f von u und ζ durch Ausführung des Integrals:

$$S f(u,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,\zeta)\cdot(1 - e\cos E)\,d\,E,$$

worin selbstverständlich:

$$u = r^2 - a_1^2 \text{ und } \zeta$$

durch die exzentrische Anomalie E auszudrücken sind.

Auf diesem Wege findet man:

$$S(u) = \frac{3}{2} a_1^2 e^2$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} S(u^2) = a_1^4 \left(e^2 + \frac{15}{16} e^4\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} S(u^3) = a_1^6 \left(\frac{5}{4} e^4 + \frac{35}{96} e^6\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} S(u^4) = a_1^8 \left(\frac{1}{4} e^4 + \frac{35}{48} e^6 + \frac{105}{1024} e^8\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} S(u^5) = a_1^{10} \left(\frac{7}{24} e^6 + \frac{35}{128} e^8 \ldots\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} S(u^6) = a_1^{12} \left(\frac{1}{36} e^8 \ldots\right).$$

Bei der Entwicklung der säkularen Teile von Größen, welche mit Potenzen von z^2 behaftet sind, soll bis zu Gliedern 6. Ordnung gegangen werden, wobei indessen Glieder von der Ordnung $z^4 e^2$ und z^6 und kleinere als unmerklich fortzulassen sind. Man kann nun weiter z in die Form bringen:

$$z = B_1 r \sin v + C_1 r \cos v,$$

wo v die wahre Anomalie bedeutet. Man kann dann sofort z als Funktion der exzentrischen Anomalie darstellen und die obigen Integrale für $f(u \zeta) = u^m z^n$ entwickeln. Bis zum angegebenen Genauigkeitsgrad findet sich dann:

$$S(z^2) = a_1^2 \left[B_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2\right) + C_1^2 \left(\frac{1}{2} + 2 e^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{2} S(z^4) = a_1^4 \cdot \frac{3}{16} (B_1^2 + C_1^2)^2$$

$$S(z^2 u) = a_1^4 e^2 \left[B_1^2 \frac{3}{8} + C_1^2 \frac{25}{8} - e^2 B_1^2 \frac{3}{8} + e^2 C_1^2 \cdot \frac{9}{4}\right]$$

$$\frac{1}{2} S(z^2 u^2) = a_1^6 e^2 \left[B_1^2 \frac{1}{4} + C_1^2 \frac{3}{4} - e^2 B_1^2 \frac{3}{32} + e^2 C_1^2 \frac{153}{32}\right]$$

$$\frac{1}{6} S(\varepsilon^2 u^3) = a_1^8 \, e^4 \left[B_1^2 \frac{5}{24} + C_1^2 \frac{49}{24} \right]$$

$$\frac{1}{24} S(\varepsilon^2 u^4) = a_1^{10} e^4 \left[B_1^2 \frac{1}{24} + C_1^2 \frac{5}{24} \right].$$

Bei der Zusammenfassung des Resultats für Ω_a nach Formel (4) empfiehlt sich folgende Schreibweise. Es sei q_0 die mittlere Dichtigkeit der Sonnenkugel, ϱ ihr Radius, n_1 die mittlere Bewegung des Planeten und $\mu = k^2$ die Anziehungskonstante, c eine passend zu wählende ganze Zahl derart, daß nicht zu große und nicht zu kleine Werte für die Koeffizienten hervorgehen. Ich setze dann:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{3}{4} \cdot \frac{q}{q_0} \cdot \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} 10^c \ldots \\ A_1 &= \left(\frac{a_1}{\varrho}\right)^3 \cdot \beta \cdot 10^{-c} \end{aligned} \right\}. \tag{7}$$

Dann ergibt sich für die in den Störungsformeln für die Elemente vorkommende Größe $\frac{a_1 n_1}{\mu} V_a$ folgender Ausdruck, wobei, wie schon erwähnt, die Glieder, welche nur das Element $\mathfrak{z}_1$ enthalten, der Einfachheit wegen fortgelassen worden sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1 n}{\mu} V_a\Big) &= A_1 n_1 \Big\{ \Psi(\xi) \Big[-\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}(B_1^2 + C_1^2) + \Big(2C_1^2 - \frac{1}{2}B_1^2\Big) e^2 \Big]\Big\} \\ &+ A_1 n_1 \frac{\xi^5}{1+\xi^2} \Big\{ \frac{e^4}{4}\Big(1 + \frac{3}{4}\xi^2\Big) + e^6 \Big[\frac{7}{24} + \frac{11}{16}\xi^2 + \frac{115}{192}\xi^4 \\ &+ \frac{35}{192}\xi^6\Big] + (B_1^2 + C_1^2)^2 \cdot \frac{3}{16}\xi^2 \\ &- e^2 B_1^2 \Big(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\xi^2\Big) + e^2 C_1^2 \Big(\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\xi^2\Big) \\ &- \frac{e^4 B_1^2}{64}(24 + 108\,\xi^2 + 115\,\xi^4 + 35\,\xi^6) \\ &- \frac{e^4 C_1^2}{64}(24 + 180\,\xi^2 + 335\,\xi^4 + 175\,\xi^6) \Big\}. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Für innere Punkte stellt sich die Endformel völlig streng in sehr viel einfacherer Gestalt dar. Man findet sofort:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_1 \varkappa}{\mu} S(V_i) = A_1 n_1 \Big\{ & -\tfrac{1}{2} e^2 \Psi_1(\lambda) + \tfrac{1}{2}(B_1^2 + C_1^2)\, \Psi(\lambda) \\ & + e^2 (2 C_1^2 - \tfrac{1}{2} B_1^2)\, \Psi(\lambda) \Big\}\end{aligned}\right\} . \tag{9}$$

Um alles beisammen zu haben sind nun noch die Größen B_1 und C_1 und ihre Differentialquotienten nach den Elementen: Länge des Perihels π, Länge des aufsteigenden Knoten Ω, Neigung der Bahnebene i zu berechnen, welche Elemente sich in üblicher Weise auf die Ekliptik und den Widderpunkt beziehen. Da sich z auf die Äquatorebene des Ellipsoids bezieht, ist:

$$z = r \sin i_1 \sin(v + \pi - \Omega - \delta) = B_1 r \sin v + C_1 r \cos v.$$

Hierbei bedeutet i_1 die Neigung der Ebene der Planetenbahn gegen den Äquator des Ellipsoids, δ ist die Winkeldistanz des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der Äquatorebene von dem aufsteigenden Knoten derselben Bahnebene auf der Ekliptik in demselben Sinne wie π und Ω gezählt. Nennt man noch J die Neigung des Äquators und Φ die Länge seines aufsteigenden Knotens in Bezug auf die Ekliptik, so sind die drei Winkel in dem von den drei in Frage kommenden Kreisen gebildeten sphärischen Dreieck: i_1, J und $180^0 - i$ und die den zwei ersten Winkeln gegenüberliegenden Seiten und $\Omega - \Phi$ und δ. Man hat demnach:

$$\left.\begin{aligned}\sin i_1 \sin\delta &= \sin J \sin(\Omega - \Phi) \\ \sin i_1 \cos\delta &= \cos J \sin i - \sin J \cos i \cos(\Omega - \Phi)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und damit ergibt sich sofort:

$$B_1 = \sin i_1 \cos(\pi - \Omega - \delta); \quad C_1 = \sin i_1 \sin(\pi - \Omega - \delta). \tag{11}$$

Die zweite Formel (10) wird für kleine Werte von $J - i$ und $\Omega - \Phi$, wie solche in der Tat bei Merkur vorkommen, praktisch unbrauchbar. Sie ist dann durch:

$$\sin i_1 \cos\delta = \sin(i - J) + 2 \sin J \cos i \sin^2 \frac{\Omega - \Phi}{2}$$

zu ersetzen.

Aus (11) ergibt sich nun sehr einfach:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \pi} = -C_1; \quad \frac{\partial C_1}{\partial \pi} = +B_1$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial i} = \cos i_1 \cos(\pi - \Omega); \quad \frac{\partial C_1}{\partial i} = \cos i_1 \sin(\pi - \Omega)$$

und, was auch zur Kontrolle benutzt werden kann:

$$\frac{\partial (B_1^2 + C_1^2)}{\partial i} = 2 \sin i_1 \cos i_1 \cos \delta.$$

Ferner ergibt eine einfache Rechnung:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \Omega} = +C_1 + \sin J \sin(\pi - \Phi) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin i_1 \sin \delta \cos(\pi - \Omega)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \Omega} = -B_1 - \sin J \cos(\pi - \Phi) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin i_1 \sin \delta \sin(\pi - \Omega).$$

Als Kontrollformel wird man die sehr einfache Relation zu verwenden haben:

$$\frac{\partial (B_1^2 + C_1^2)}{\partial \Omega} = 2 \sin i_1 \cos i_1 \sin i \cdot \sin \delta.$$

Nunmehr sind alle im Folgenden benutzten Formeln abgeleitet.

Es sei gleich bemerkt, daß für die innern Planeten folgende Daten benutzt worden sind, wobei das Jahrhundert als Zeiteinheit angesetzt ist:

	i	π	Ω	$\log e$	$\log \left(\frac{a_1}{\varrho}\right)^2 n_1$
Merkur	7°.003	75°.896	47°.147	9.3131	14.4912
Venus	3.394	130.164	75.780	7.8320	14.8984
Erde	—	101.219	—	8.2241	15.1095
Mars	1.850	334.218	48.786	8.9699	15.3841.

Die in Frage kommenden Säkularänderungen der Planetenbahnelemente ergeben sich aus den bekannten Gleichungen:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$e\frac{d\pi}{dt} = +\sqrt{1-e^2} \cdot \frac{\partial}{\partial e} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right) + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial i} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$\sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial i} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial}{\partial \pi} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial}{\partial \Omega} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right).$$

5.

Will man nun die angegebenen Formeln zur Darstellung der empirischen Glieder in den säkularen Bewegungen der Bahnelemente der inneren Planeten benutzen, so hat man, den früheren Bemerkungen gemäß, eine Anzahl konzentrischer Ellipsoide, die mit 1, 2, 3 etc. bezeichnet werden mögen, passend zu wählen. Unbekannt sind zunächst die Dichtigkeiten innerhalb der einzelnen Ellipsoide q_1, q_2, q_3 etc., ebenso die Elliptizitäten $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ etc., die Neigungen $J_1\ J_2 \ldots$, die Knotenlängen $\Phi_1\ \Phi_2$ etc. ihrer Äquatorebenen. Selbstverständlich wird man die Zahl der Unbekannten möglichst klein wählen, denn eine durch eine genügend große Anzahl von Unbekannten erzwungene Darstellung der empirisch gegebenen Daten hätte keine Bedeutung. Sind die einzelnen q bekannt, so muß die Gesamtdichtigkeit innerhalb des ersten Ellipsoids $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$ angenommen werden. Zwischen dem ersten und zweiten Ellipsoid herrscht die Dichtigkeit $q_2 + q_3 + \cdots$, zwischen dem zweiten und dritten $q_3 + q_4 + \cdots$ u. s. f. Zu bemerken ist noch, daß die Massen innerhalb der Sonnenkugel eigentlich nicht in Betracht gezogen werden sollten. Indessen tritt, wenn hierauf nicht Rücksicht genommen wird, nur eine Vergrößerung der Sonnenmasse ein, was natürlich umsomehr gleichgültig ist, als sich die einzelnen q gegenüber der Sonnendichtigkeit q_0 verschwindend klein ergeben.

Ursprünglich hatte ich fünf Ellipsoide mit den großen Halbachsen:

$$a_1 = 0.10, \quad 0.17, \quad 0.24, \quad 0.60, \quad 1.20$$

angenommen. Die Rechnung ergibt aber, daß die Koeffizienten, welche die den drei ersten Ellipsoiden entsprechenden Beiträge zu den säkularen Veränderungen bestimmen, so nahe proportional verlaufen, daß gar nicht daran gedacht werden kann, die einzelnen $q_1\, q_2\, q_3$ zu bestimmen. Es ist demnach so gut wie ganz gleichgültig, wie die Dichtigkeit der Massenverteilung in der Nähe der Sonne bis zu etwa $^2/_3$ der Merkurentfernung verläuft. Man wird deshalb in jedem Falle mit der Annahme nur eines Ellipsoides, das zwischen Sonne und Merkurbahn liegt, auskommen müssen und es ist dabei ziemlich gleichgültig, wie groß man das zugehörige a wählt. Ich habe im Folgenden nur das Ellipsoid 3 beibehalten. Ebenso zeigt der Verlauf der Koeffizienten, daß das Ellipsoid 4 keinen nennenswerten Beitrag zur Darstellung der empirischen Glieder liefern kann und es fast ganz gleichgültig ist, ob man dieses beibehält oder nicht. Ich habe es schließlich fortgelassen, so daß nur die beiden Ellipsoide 3 und 5 übrig bleiben. Jedenfalls ergibt sich aus dem Gesagten, daß die Massenverteilung im Zodiakallicht nur in ganz allgemeinen Umrissen bestimmbar ist, was in jedem Falle nicht zu Ungunsten der ganzen Hypothese zu sprechen scheint. —

Was die Elliptizitäten λ betrifft, so zeigt sich ebenfalls, daß dieselben innerhalb weiter Grenzen willkürlich angenommen werden dürfen, ohne eine wesentliche Änderung in der Darstellung der empirischen Glieder zu veranlassen; nicht einmal die Werte der Unbekannten ändern sich sehr merklich. Da zunächst über die Dichtigkeitsflächen im Zodiakallicht nichts näheres angegeben werden kann und nur die Annahme, daß die Abplattungen sehr beträchtlich sind, einige Sicherheit hat, ist man tatsächlich zu diesen willkürlichen Annahmen gezwungen. Wichtig ist es, daß eine solche Willkür keine große Bedeutung hat. Ich habe nun für das Ellipsoid 3 $\lambda = 10$, für das Ellipsoid 5 dagegen $\lambda = 5$ gewählt. Auf diese Weise ist erreicht, daß die Erdbahn ganz innerhalb des Ellipsoids 5 liegt, was bei der Aufstellung der Formeln angenommen worden ist.

Die Lage der Äquatorebenen der Ellipsoide ist, wie von vornherein zu erwarten, nicht so unbestimmt, wie die anderen Daten. Es zeigt sich, daß die Lage des Ellipsoids 3 in ziemlich bestimmter Weise angenommen werden muß, dagegen die von 5, wegen des geringen Einflusses der hieraus hervorgehenden Störungen, ziemlich gleichgültig ist. Wichtig und nötig ist zu einer befriedigenden Darstellung der empirisch gefundenen Newcombschen Glieder die Einführung einer Drehung des in der Astronomie üblichen Koordinatensystems gegen ein im Sinne der Mechanik sogenanntes absolutes oder besser gesagt gegen ein Inertialsystem im Sinne der Untersuchungen Herrn E. Andings[1]) und meiner eigenen.[2])

Ich hatte mich bei einer provisorischen Rechnung, deren Resultate ich in der Versammlung der Astronomischen Gesellschaft in Jena[3]) vortrug, damit begnügt, die Störungsfunktion V_a bis auf Glieder zweiter Ordnung inklusive in Bezug auf Neigung und Exzentrizitäten zu benutzen, ein Verfahren, dessen Zulässigkeit wohl von Anfang an überblickt werden kann, das durch die folgenden Mitteilungen aber unzweifelhaft bestätigt wird. Einen detaillierten Nachweis über diese Rechnungen zu geben, hätte kein Interesse mehr, da sie jetzt nur noch als orientierende Grundlage für das Folgende benutzt worden sind. Ich begnüge mich deshalb hier nur die damals erhaltenen Resultate anzugeben.

Es gelang eine durchaus befriedigende Darstellung durch die Einführung von fünf Unbekannten, nämlich: Neigung J und Knoten Φ des Äquators des Ellipsoids 3 in Bezug auf die Ekliptik, die zwei Dichtigkeiten q_3 und q_5 und schließlich der Rotations-

[1]) E. Anding, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band VI 2, 1905.

[2]) Über die sogenannte absolute Bewegung. Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1906.

[3]) Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgang 41.

komponente r, welche sich auf die Orientierung des empirischen Koordinatensystems der Astronomie bezieht und die hundertjährige Drehung dieses Systems um eine auf der Ekliptik senkrechten Achse bedeutet. Es ist von vornherein nach der Art, wie sich die Orientierung des astronomischen Koordinatensystems mit der Zeit entwickelt hat, recht wenig wahrscheinlich, daß die beiden anderen Rotationskomponenten p und q außer r einen nennenswerten Betrag haben könnten. Deshalb wurden die p und q gar nicht eingeführt, weil sonst die Zahl der Unbekannten größer als wünschenswert geworden wäre. So handelte es sich um die Bestimmung von fünf Unbekannten aus zehn Bedingungsgleichungen und das Überwiegen der letzteren ist durchaus genügend. Bei der Beurteilung dieses Überschusses ist es bekanntlich ganz gleichgültig, ob die darzustellenden empirischen Glieder groß oder klein sind. Eine säkulare Veränderung der Exzentrizitäten wird erst durch die höheren Potenzen von Exzentrizität und Neigung, als in Betracht gezogen worden sind, erzeugt und man muß sich auf die obige Bemerkung beziehen, daß diese ebenfalls von Newcomb abgeleiteten Veränderungen zunächst wenigstens unberücksichtigt bleiben können.

Für die fünf genannten Unbekannten nebst ihren mittleren Fehlern ergab sich nun:

$$J = 6^\circ\!.95 \pm 0^\circ\!.97 \qquad \Phi = 40^\circ\!.03 \pm 7^\circ\!.3$$

$$\frac{q_3}{q_0} = (2.52 \pm 0.15)\, 10^{-11} \qquad \frac{q_5}{q_0} = (2.60 \pm 2.19)\, 10^{-15}$$

$$r = 5''\!.693 \pm 1''\!.68.$$

Hierbei wurde angenommen, daß der Äquator des Ellipsoids 5 mit dem Sonnenäquator zusammenfällt.

Für die Rechnung mit den im Vorigen gegebenen genaueren Formeln habe ich nun für J und Φ, sowie für die Lage des Ellipsoids 5 dieselben Annahmen gemacht, die eben erwähnt worden sind, da schon so ein guter Anschluß an die empirischen Daten in Aussicht stand. Als zu bestimmende Unbekannte wurde statt q_3 und q_5 eingeführt:

$$\beta_3 = \tfrac{8}{4}\frac{q_3}{q_0}\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}10^{12}; \quad \lambda = 10$$

$$\beta_5 = \tfrac{8}{4}\frac{q_5}{q_0}\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}10^{14}; \quad \lambda = \ \ 5.$$

Für das Ellipsoid 3, d. h. $a = 0.24$, ergibt sich nun:

	ξ	$\log \Psi(\xi)$
Merkur	0.7839	$8.7692_n - 10$
Venus	0.3498	$7.2360_n - 10$
Erde	0.2459	$6.5196_n - 10$
Mars	0.1587	$5.5894_n - 10.$

Ferner ist:

$$\log \Psi(10) = 1.1955_n, \quad \log \Psi_1(10) = 0.6145.$$

Für das Ellipsoid 5 habe ich aus äußeren Gründen, weil die früheren Rechnungen beim Mars mit einem Näherungswert für ξ ausgeführt worden waren und ich wegen der Kontrolle denselben Wert für ξ benutzen wollte, angenommen $a = 1.2235$ (früher 1.20). Hiermit ergibt sich für Mars:

$$\xi = 1.2773; \quad \log \Psi(\xi) = 9.5057_n$$

und:

$$\log \Psi(5) = 0.7833_n; \quad \log \Psi_1(\lambda) = 0.5494.$$

Mit diesen Daten kann nun an die Ausrechnung der im Artikel 4 gegebenen Formeln geschritten werden. Diese Ausrechnung ist nicht ganz einfach. Ich hoffe indessen mich durch wiederholte Kontrollen und wo solche nur auf diesem Wege zu erhalten waren, durch doppelte Rechnung vor Rechenfehlern geschützt zu haben, so daß ich die Sicherheit des Endergebnisses einigermaßen verbürgen kann. Die Mitteilung der Einzelheiten der Rechnung wäre danach wohl überflüssig und ich führe nur das Endresultat an. Zunächst ist zu bemerken, daß auch jetzt die Säkularstörungen in den Exzentrizitäten vollständig unmerklich sind. Das Weitere kann in die zehn Bedingungsgleichungen für die drei Unbekannten β_3, β_5, r zusammengefaßt werden, wobei die in Klammern gesetzten Zahlen

Logarithmen bedeuten und der Strich über der Kennziffer eine Verminderung um 10 andeutet:

						$\sqrt{g}$
$e\,\dfrac{d\pi}{dt}$	Merkur	$[0.6505\ ]\,\beta_8 +$	$[0.3538_n]\,\beta_5 +$	$[\bar{9}.3131]\,r$	$= +8''.48$	3
	Venus	$[\bar{7}.9629\ ]$	$[\bar{9}.2878_n]$	$[\bar{7}.8338]$	$= -0.05$	4
	Erde	$[\bar{7}.8418\ ]$	$[\bar{9}.8834_n]$	$[\bar{8}.2240]$	$= +0.10$	7
	Mars	$[\bar{7}.9369\ ]$	$[\bar{9}.8403\ ]$	$[\bar{8}.9699]$	$= +0.75$	3
$\sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt}$	Merkur	$[\bar{8}.4728_n]$	$[\bar{9}.5147_n]$	$[\bar{9}.0861]$	$= +0.61$	2
	Venus	$[\bar{8}.7263\ ]$	$[0.4791\ ]$	$[\bar{8}.7723]$	$= +0.60$	6
	Mars	$[\bar{7}.9285\ ]$	$[\bar{9}.7993\ ]$	$[\bar{8}.5091]$	$= +0.30$	5
$\dfrac{di}{dt}$	Merkur	$[\bar{9}.5404\ ]$	$[0.0809_n]$		$= +0.38$	1
	Venus	$[\bar{8}.9815\ ]$	$[\bar{9}.2588\ ]$		$= +0.38$	3
	Mars	$[\bar{7}.2369\ ]$	$[\bar{9}.6137_n]$		$= -0.01$	5.

Die Gewichte g sind den von Newcomb angegebenen wahrscheinlichen Fehlern entsprechend auf ganze Quadratzahlen abgerundet worden.

Von einer weiteren Verbesserung der Größen J und Φ habe ich abgesehen, denn es ergibt sich, daß man eine fast genau gleiche Darstellung wie früher erhält, wenn man β_8 der Perihelbewegung des Merkurs und β_5 dem Glied im Venusknoten entsprechend annimmt:

$$\log \beta_8 = 0.2207, \quad \log \beta_5 = \bar{8}.7084.$$

Es ist nun weiter nicht möglich die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler merkbar, d. h. die Genauigkeit der vierstelligen Rechnung wesentlich übersteigend, zu verkleinern und man könnte also mit dem erhaltenen Resultat sich begnügen. Indessen schien es mir wünschenswert die mittleren Fehler der Unbekannten zu ermitteln. Aus diesem Grunde wurde eine Ausgleichung der zehn Bedingungsgleichungen mit drei Unbekannten ausgeführt. Diese ergab die folgenden Werte nebst ihren mittleren Fehlern:

$$\beta_8 = 1.654 \pm 0.077; \quad \beta_5 = 0.0477 \pm 0.0263$$
$$r = 5''.85 \pm 1''.22$$

und nunmehr ergibt sich folgende Darstellung, wobei ich der Übersichtlichkeit wegen die einzelnen, von β_3, β_5 und r herrührenden Glieder anführe und ihrer Summe die Newcombschen Daten gegenüberstelle:

		β_3	β_5	r	Rechnung	Newcomb		$N-R$	
$e\dfrac{d\pi}{dt}$	Merkur	+7.″396	−0.108	+1.203	+8.″49	+8.″48	±0.″43	−0.″01	−0.″01
	Venus	+0.015	−0.009	+0.040	+0.05	−0.05	0.25	−0.10	−0.10
	Erde	+0.012	−0.037	+0.098	+0.07	+0.10	0.13	+0.03	+0.01
	Mars	+0.014	+0.033	+0.546	+0.59	+0.75	0.35	+0.16	+0.19
$\sin i\dfrac{d\Omega}{dt}$	Merkur	−0.049	−0.016	+0.713	+0.65	+0.61	0.52	−0.04	−0.01
	Venus	+0.088	+0.144	+0.346	+0.58	+0.60	0.17	+0.02	0
	Mars	+0.014	+0.030	+0.189	+0.23	+0.03	0.22	−0.20	−0.18
$\dfrac{di}{dt}$	Merkur	+0.574	−0.057	—	+0.52	+0.38	0.80	−0.14	−0.11
	Venus	+0.159	+0.009	—	+0.17	+0.38	0.33	+0.21	+0.18
	Mars	+0.003	−0.020	—	−0.02	−0.01	0.20	+0.01	0

In der letzten Rubrik steht noch die Darstellung, wie sie die provisorische Rechnung geliefert hat. Ein irgendwelcher in Betracht zu ziehender Unterschied ist nicht vorhanden und der Umstand, daß die frühere Darstellung ein wenig besser ist, hat keine Bedeutung, weil er sofort verschwinden würde, wenn eine Neubestimmung von i und Φ unternommen würde, was natürlich gegenwärtig ein ganz unnötiges Unternehmen wäre.

Aus den obigen Zahlen β_3 und β_5 ergibt sich noch:

$$\frac{q_3}{q_5} = 2.18 \times 10^{-11}; \quad \frac{q_5}{q_0} = 0.31 \times 10^{-14}.$$

Die Gesamtmasse der ganzen Massenverteilung ist hiernach gleich 3.1×10^{-7} Sonnenmassen.

Die Dichtigkeit der Massenverteilung ist also selbst in den der Sonne am nächsten liegenden Partien ganz außerordentlich klein. Sie entspricht der Massenverteilung, die man erhält, wenn man einen Würfel Wasser von weniger als $^1/_3$ Meter Seitenlänge in einem Raum von 1 Kubikkilometer verteilt.

Was die Darstellung der Newcombschen empirischen Glieder betrifft, so ist dieselbe geradezu überraschend gut. Sämtliche Glieder werden innerhalb ihres wahrscheinlichen Fehlers durch die Rechnung dargestellt und mit Ausnahme des Gliedes in $\sin i \frac{d\Omega}{dt}$ bei Mars weit innerhalb des wahrscheinlichen Fehlers. Bedenkt man nun weiter, daß diese Darstellung gleich beim ersten Versuche gelungen ist, so wird man den erreichten Erfolg wohl kaum nur einem glücklichen Zufall zuschreiben. Die Sache liegt eben so, daß die gemachten allgemeinen Annahmen einen weiten Spielraum für die speziellen Zahlenangaben, die zu Grunde gelegt wurden, gestatten. Da eine Einwirkung der das Zodiakallicht bildenden Massen auf die Bewegung der inneren Planeten unter allen Umständen stattfinden muß und man, wie schon oben erwähnt, nur über die Größe und Art dieses Einflusses im Zweifel sein kann, da weiter in der durchgeführten Rechnung nirgends Zahlen auftreten, die nach irgend einer Richtung Bedenken erregen können, so ist mit einiger Sicherheit anzunehmen, daß die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten tatsächlich auf die Massen des Zodiakallichts zurückzuführen sind.

Wesentlich für die gewonnene Darstellung ist die Lage des innersten Ellipsoides, die durch J und Φ bestimmt ist, während das Charakteristische in der Dichtigkeitsverteilung die schnelle Abnahme der Massendichtigkeit ist, die bereits in den Gegenden, wo sich die Merkurbahn befindet, eingetreten ist. Als ebenso wesentlich für die Darstellung der empirischen Glieder, mit Ausnahme des die Perihelbewegung des Merkur bestimmenden, hat sich die Einführung der Rotationsgröße r bewährt. Es war dies übrigens von vornherein zu erwarten. Was dieses r betrifft, wonach also eine säkulare Drehung des empirischen Koordinatensystems der Astronomie um das der Mechanik zu Grunde liegende im Betrag von $5\overset{''}{.}8 \pm 1\overset{''}{.}2$ im Jahrhundert stattfindet, so ist nicht uninteressant, daß sich sein Betrag gegen die früheren Darstellungen mit Ausschluß der Perihelbewegung und ohne Rücksicht auf die Einwirkungen der Massen des Zodiakallichts nicht unwesentlich verkleinert hat. Ich habe a. a. O. darauf hingewiesen, daß eine Verkleinerung des früher gefundenen Wertes $r = 7\rlap{.}''5$ angemessen zu sein scheint. Eine solche Verkleinerung ist jetzt schon eingetreten; es wäre aber vielleicht möglich diese Verkleinerung noch weiter zu treiben durch abgeänderte Anfangsdaten, die ja doch mehr oder weniger willkürlich waren, was eben als ein günstiges Zeichen für die Zulässigkeit der Grundlagen dieser Arbeit angesehen werden darf.

Die empirischen Glieder in den Exzentrizitäten konnten nicht in gleichem Maße, wie die übrigen, dargestellt werden. Wollte man dieses erreichen, so müßte wohl eine andere und voraussichtlich weniger einfache Anordnung der Massen des Zodiakallichts, wie hier angenommen worden, in Betracht gezogen werden. Daß namentlich in der Nähe der Planeten so einfache Verhältnisse gar nicht bestehen können, dürfte insoweit feststehen, als das Zodiakallicht als eine Massenanhäufung von stabiler Dichtigkeitsverteilung angesehen wird. Damit werden indessen Fragen berührt, zu deren Behandlung bisher noch kein Versuch gemacht worden ist.