Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1908. Heft II.

München

Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften

1909.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes.

Von **Oskar Perron.**

(*Eingelaufen 5. Dezember.*)

Der sogenannte Legendresche Irrationalitätssatz läßt sich folgendermaßen formulieren:

Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

die Teilzähler und -nenner ganze rationale Zahlen sind, welche von einem gewissen Index ν ab der Ungleichung

$$b_\nu \geqq |a_\nu| + 1$$

genügen, so hat der Kettenbruch einen irrationalen Wert; nur wenn von einem bestimmten ν an durchweg $a_\nu < 0$, $b_\nu = |a_\nu| + 1$ ist, so ist er rational.

In dieser Formulierung sind die b_ν als positiv angenommen, was man ja stets erreichen kann. Wenn nun aber gleichzeitig auch die a_ν (von einem gewissen Index an) alle positiv sind, so genügt, wie Stolz[1]) erkannt hat, für die Irrationalität des Kettenbruches an Stelle der obigen Ungleichung schon die folgende:

$$b_\nu \geqq a_\nu.$$

Den Legendreschen Irrationalitätssatz habe ich kürzlich auf diejenigen Verallgemeinerungen der Kettenbrüche ausge-

[1]) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. II, p. 297.

dehnt, welche ich Jacobi-Ketten genannt habe.[1]) In dieser Note will ich nun auch den Stolzschen Satz in gleicher Richtung verallgemeinern. Obwohl mir dies zunächst leider nur für Ketten bis zur vierten Ordnung gelungen ist, so dürfte die Veröffentlichung doch nicht überflüssig erscheinen. Um so mehr, als meine Untersuchungen auch für Differenzengleichungen und Ketten beliebiger Ordnung wenigstens ein ganz bemerkenswertes Teilresultat zutage förderten. Anderseits aber konnte ich auch durch ganz verwandte Überlegungen in § 3 zwei Fragen zur Erledigung bringen, die ich bereits in meiner Habilitationsschrift[2]) aufgeworfen habe, aber damals noch unentschieden lassen mußte.

§ 1.

In der Differenzengleichung r^{ter} Ordnung

$$D_{\nu+r} + b_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + b_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + b_r^{(\nu)} D_\nu = 0 \tag{1}$$

mögen die Koeffizienten $b_i^{(\nu)}$ reell sein und für alle ν $(= 0, 1, 2, \ldots)$ den folgenden Ungleichungen genügen:

$$1 > b_1^{(\nu)} > b_2^{(\nu)} > \cdots > b_r^{(\nu)} > 0\,. \tag{2}$$

Aus den Anfangswerten $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ läßt sich D_ν rekursorisch für jeden einzelnen Wert von ν berechnen, und es soll jetzt gezeigt werden, daß der absolute Wert von D_ν, wie auch die Anfangswerte gewählt sein mögen, unter einer von ν unabhängigen Schranke bleibt.

Beim Beweis dieses Satzes genügt es, sich auf reelle D_ν zu beschränken, indem ja andernfalls offenbar der reelle und imaginäre Teil jeder für sich die obige Differenzengleichung

---

[1]) Über die Convergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen. Diese Sitzungsberichte, Bd. 37 (1907). Die dort entwickelten Begriffsbildungen muß ich hier als bekannt voraussetzen. Die Arbeit wird im folgenden unter „Jacobi-Ketten" zitiert.

[2]) Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Mathematische Annalen, Bd. 64 (1907). Zitiert unter „Grundlagen".

erfüllen müssen. Wenn es r aufeinanderfolgende Indices ν gibt, für welche D_ν verschwindet, so ist wegen (1) für alle größeren Indices erst recht $D_\nu = 0$, und somit der Satz in diesem Falle evident.

Im anderen Falle aber kann man unter je r aufeinander folgenden Werten von ν mindestens einen finden, für den $D_{\nu+r} \neq 0$ ist. Wegen (1) und (2) muß dann auch unter den Zahlen

$$D_{\nu+r-1}, \quad D_{\nu+r-2}, \quad \ldots \quad D_\nu$$

mindestens eine $\neq 0$ und von entgegensetztem Zeichen wie $D_{\nu+r}$ sein.

Man kann daher die Zahlen D_ν nach ihren Vorzeichen in Gruppen von höchstens r gleichbezeichneten zusammenfassen:

$$\begin{array}{llll} D_0, & D_1, & \ldots & D_{s_0} \\ D_{s_0+1}, & D_{s_0+2}, & \ldots & D_{s_1} \\ - & - & - & - \\ D_{s_\lambda+1}, & D_{s_\lambda+2}, & \ldots & D_{s_{\lambda+1}} \\ - & - & - & - , \end{array} \qquad 1 \leqq s_{\lambda+1} - s_\lambda \leqq r$$

derart, daß die Zahlen einer Gruppe (Zeile des Schemas) gleiches Zeichen haben, und insbesondere die letzte Zahl jeder Gruppe auch wirklich von Null verschieden ist, während die Zeichen von einer Gruppe zur folgenden wechseln. Es bilden also die Größen

$$D_{s_0}, \quad D_{s_1}, \quad D_{s_2}, \ldots \tag{3}$$

eine Reihe von Null verschiedener Zahlen mit alternierenden Vorzeichen. Ebenso sind, wenn man

$$D_{s_\lambda} + D_{s_\lambda-1} + D_{s_\lambda-2} + \cdots + D_{s_{\lambda-1}+1} = M_\lambda \tag{4}$$

setzt, auch die Zahlen

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \ldots$$

von Null verschieden und haben gleichfalls alternierende Vorzeichen.

Aus Gleichung (1) folgt speziell für $\nu + r = s_\lambda$:

$$\sum_{i=0}^{r} b_i^{(s_\lambda - r)} D_{s_\lambda - i} = 0 \qquad (\text{wobei } b_0^{(s_\lambda - r)} = 1).$$

Wir wollen diese Summe statt von $i = 0$ bis r ausdehnen auf die Werte von $i = 0$ bis $i = s_\lambda - s_{\lambda - r - 1} - 1$, was ohne Schaden geschehen kann, wenn wir den dadurch neu eingeführten Koeffizienten b (mit unterem Index $> r$) den Wert Null beilegen. Die so erweiterte Summe zerlegen wir dann in $r + 1$ Partialsummen:

$$\sum_{i=0}^{s_\lambda - s_{\lambda-r-1} - 1} b_i^{(s_\lambda - r)} D_{s_\lambda - i}$$

$$= \sum_{i=0}^{s_\lambda - s_{\lambda-1} - 1} + \sum_{i = s_\lambda - s_{\lambda-1}}^{s_\lambda - s_{\lambda-2} - 1} + \sum_{i = s_\lambda - s_{\lambda-2}}^{s_\lambda - s_{\lambda-3} - 1} + \cdots + \sum_{i = s_\lambda - s_{\lambda-r}}^{s_\lambda - s_{\lambda-r-1} - 1}.$$

Hier sind nun die D_ν in jeder einzelnen Partialsumme gleichbezeichnet, während die Zeichen von einer zur folgenden wechseln. Da das erste D_ν in jeder Partialsumme eine Zahl der Reihe (3), also von Null verschieden ist, so kann eine solche Partialsumme nur dann verschwinden, wenn ihr erster Koeffizient b verschwindet. Da aber dann die b mit größerem unteren Index erst recht gleich Null sind, so verschwinden dann auch alle folgenden Partialsummen.

Nun ist die erste wegen ihres Anfangsgliedes D_{s_λ} offenbar von Null verschieden. Daher ist es auch die zweite, weil sonst jede folgende gleich Null wäre, und also die Totalsumme nicht verschwinden könnte. Die dritte Partialsumme aber kann sehr wohl bereits verschwinden. Unter Umständen können aber auch alle von Null verschieden sein und bestehen dann nur aus je einem Glied.

Für die erste Partialsumme kann man schreiben:

$$\beta_0^{(\lambda)} (D_{s_\lambda} + D_{s_\lambda - 1} + D_{s_\lambda - 2} + \cdots + D_{s_{\lambda-1} + 1}) = \beta_0^{(\lambda)} M_\lambda,$$

wobei $\beta_0^{(\lambda)}$ ein Mittelwert der $s_\lambda - s_{\lambda-1}$ Koeffizienten

(5) $\qquad b_i^{(s_\lambda - r)} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots s_\lambda - s_{\lambda-1} - 1$

ist. Ebenso wird die zweite Partialsumme gleich:

$$\beta_1^{(\lambda)}(D_{s_{\lambda-1}} + D_{s_{\lambda-1}-1} + D_{s_{\lambda-1}-2} + \cdots + D_{s_{\lambda-2}+1}) = \beta_1^{(\lambda)} M_{\lambda-1},$$

wobei nun $\beta_1^{(\lambda)}$ ein Mittelwert ist von:

(6) $b_i^{(s_\lambda - r)}$ für $i = s_\lambda - s_{\lambda-1},\ s_\lambda - s_{\lambda-1} + 1, \ldots\ s_\lambda - s_{\lambda-2} - 1.$

Da wegen (2) die Zahlen (5) größer sind als die Zahlen (6), so ist gewiß auch:

$$\beta_0^{(\lambda)} > \beta_1^{(\lambda)}.$$

In analoger Weise kann man nun auch alle folgenden Partialsummen ausdrücken, so daß wir schließlich, da die Totalsumme verschwinden muß, die Gleichung erhalten:

(7) $$\beta_0^{(\lambda)} M_\lambda + \beta_1^{(\lambda)} M_{\lambda-1} + \beta_2^{(\lambda)} M_{\lambda-2} + \cdots + \beta_r^{(\lambda)} M_{\lambda-r} = 0,$$

wobei

$$\beta_0^{(\lambda)} > \beta_1^{(\lambda)} > \beta_2^{(\lambda)} \geqq \beta_3^{(\lambda)} \geqq \beta_4^{(\lambda)} \geqq \cdots \geqq \beta_r^{(\lambda)} \geqq 0$$

ist. Hier konnte von der dritten Ungleichung ab nur $\geqq$ geschrieben werden, weil eventuell schon die dritte Partialsumme verschwindet, und dann ist $\beta_i^{(\lambda)} = 0$ von $i = 2$ ab. Wesentlich ist aber für unsere Zwecke, daß jedenfalls in der ersten Ungleichung die Gleichheit ausgeschlossen ist. Setzt man

$$\frac{\beta_i^{(\lambda)}}{\beta_0^{(\lambda)}} = \gamma_i^{(\lambda)}$$

und berücksichtigt, daß die M_λ alternierende Vorzeichen haben, so folgt schließlich aus (7):

(8) $$|M_\lambda| - \gamma_1^{(\lambda)} |M_{\lambda-1}| + \gamma_2^{(\lambda)} |M_{\lambda-2}| - \cdots + (-1)^r \gamma_r^{(\lambda)} |M_{\lambda-r}| = 0$$

wobei

(9) $$1 > \gamma_1^{(\lambda)} > \gamma_2^{(\lambda)} \geqq \gamma_3^{(\lambda)} \geqq \cdots \geqq \gamma_r^{(\lambda)} \geqq 0$$

ist.

Die linke Seite von (8) wird verkleinert, wenn man $\gamma_1^{(\lambda)}$ durch 1 ersetzt. Sie wird sodann weiter verkleinert oder wenigstens nicht mehr vergrößert, wenn man auch

$$\gamma_3^{(\lambda)},\ \gamma_5^{(\lambda)},\ \gamma_7^{(\lambda)}, \ldots$$

ersetzt durch bzw.:

$$\gamma_2^{(\lambda)},\ \gamma_4^{(\lambda)},\ \gamma_6^{(\lambda)}, \ldots$$

Endlich wird, falls r eine gerade Zahl ist, durch Weglassung des letzten Gliedes ebenfalls keine Vergrößerung herbeigeführt. Versteht man also unter q diejenige der zwei Zahlen r, $r-1$, welche ungerade ist, so kommt:

$$|M_\lambda| - |M_{\lambda-1}| + \gamma_2^{(\lambda)}|M_{\lambda-2}| - \gamma_2^{(\lambda)}|M_{\lambda-3}| + \gamma_4^{(\lambda)}|M_{\lambda-4}| - \gamma_4^{(\lambda)}|M_{\lambda-5}| \\ + - \cdots + \gamma_{q-1}^{(\lambda)}|M_{\lambda-q+1}| - \gamma_{q-1}^{(\lambda)}|M_{\lambda-q}| < 0.$$

Sind daher λ, ν zwei beliebige Indices, und $\lambda > \nu > r$, dann ist:

$$\begin{aligned}
&|M_\lambda| - |M_{\lambda-1}| + \gamma_2^{(\lambda)}|M_{\lambda-2}| - \gamma_2^{(\lambda)}|M_{\lambda-3}| + \cdots - \gamma_{q-1}^{(\lambda)}|M_{\lambda-q}| < 0 \\
&|M_{\lambda-1}| - |M_{\lambda-2}| + \gamma_2^{(\lambda-1)}|M_{\lambda-3}| - \gamma_2^{(\lambda-1)}|M_{\lambda-4}| + \cdots - \gamma_{q-1}^{(\lambda-1)}|M_{\lambda-q-1}| < 0 \\
&- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
&|M_\nu| - |M_{\nu-1}| + \gamma_2^{(\nu)}|M_{\nu-2}| - \gamma_2^{(\nu)}|M_{\nu-3}| + \cdots - \gamma_{q-1}^{(\nu)}|M_{\nu-q}| < 0.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichungen multiplizieren wir der Reihe nach mit den späterhin geeignet zu wählenden Multiplikatoren $\varrho_0 = 1$, ϱ_1, ϱ_2, ... $\varrho_{\lambda-\nu}$, und addieren sie dann. Es entsteht:

$$(10) \quad \begin{aligned} &|M_\lambda| + (d_1 - d_0)|M_{\lambda-1}| + (d_2 - d_1)|M_{\lambda-2}| + \cdots \\ &+ (d_{\lambda-\nu+q-1} - d_{\lambda-\nu+q-2})|M_{\nu-q+1}| - d_{\lambda-\nu+q-1}|M_{\nu-q}| < 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} d_0 &= \varrho_0 = 1 \\ d_1 &= \varrho_1 \\ d_2 &= \varrho_2 + \gamma_2^{(\lambda)}\varrho_0 \\ &- - - - - \end{aligned}$$

ist; allgemein wird:

$$(11) \quad \begin{gathered} d_\mu = \varrho_\mu + \gamma_2^{(\lambda-\mu+2)}\varrho_{\mu-2} + \gamma_4^{(\lambda-\mu+4)}\varrho_{\mu-4} + \cdots + \gamma_{q-1}^{(\lambda-\mu+q-1)}\varrho_{\mu-q+1} \\ (\mu = 0, 1, 2, \ldots \lambda - \nu + q - 1), \end{gathered}$$

sofern nur diejenigen ϱ, deren Index in dieser Formel negativ oder $> \lambda - \nu$ sein sollte, gleich Null gesetzt werden.

Nun versuchen wir, die Multiplikatoren ϱ_1, ϱ_2, ... $\varrho_{\lambda-\nu}$ derart zu bestimmen, daß die Größen $M_{\lambda-1}$, $M_{\lambda-2}$, ... M_ν aus der Ungleichung (10) herausfallen; es wird also:

$$d_0 = d_1 = d_2 = \cdots = d_{\lambda-\nu}.$$

Oder nach (11) und weil $d_0 = 1$ ist:

$$\varrho_\mu + \gamma_2^{(\lambda-\mu+2)} \varrho_{\mu-2} + \gamma_4^{(\lambda-\mu+4)} \varrho_{\mu-4} + \cdots + \gamma_{q-1}^{(\lambda-\mu+q-1)} \varrho_{\mu-q+1} = 1 \qquad (12)$$
$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots\ \lambda - \nu).$$

Aus diesen $\lambda - \nu$ Gleichungen gewinnt man rekursorisch ϱ_1, $\varrho_2, \ldots \varrho_{\lambda-\nu}$, und die Ungleichung (10) geht dann über in:

$$|M_\lambda| < (1 - d_{\lambda-\nu+1}) |M_{\nu-1}| + (d_{\lambda-\nu+1} - d_{\lambda-\nu+2}) |M_{\nu-2}| + \cdots \qquad (13)$$
$$+ d_{\lambda-\nu+q-1} |M_{\nu-q}|.$$

Indes ist zu bedenken, daß wir mit ϱ_μ nicht Gleichungen, sondern Ungleichungen multipliziert haben, was nur für positive ϱ_μ gestattet ist. Daher muß unser Verfahren noch dadurch nachträglich legitimiert werden, daß wir die aus den Gleichungen (12) zu berechnenden Zahlen ϱ_μ ausdrücklich als positiv nachweisen; erst dann wird Ungleichung (13) verbürgt sein. Nun ist aber $\varrho_0 = 1$, und nach (12):

$$\varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = 1 - \gamma_2^{(\lambda)},$$

also wegen (9) positiv. Nehmen wir an, es seien bereits alle ϱ als positiv erkannt, deren Index $< \mu$ ist, so folgt, indem man in (12) $\mu - 2$ an Stelle von μ setzt und die entstehende Gleichung dann von (12) subtrahiert:

$$\varrho_\mu = (1 - \gamma_2^{(\lambda-\mu+2)}) \varrho_{\mu-2} + (\gamma_2^{(\lambda-\mu+4)} - \gamma_4^{(\lambda-\mu+1)}) \varrho_{\mu-4} + \cdots$$
$$+ (\gamma_{q-3}^{(\lambda-\mu+q-1)} - \gamma_{q-1}^{(\lambda-\mu+q-1)}) \varrho_{\mu-q+1} + \gamma_{q-1}^{(\lambda-\mu+q+1)} \varrho_{\mu-q-1},$$

so daß wegen (9) auch ϱ_μ positiv ist. W. z. b. w.

Dies gilt für die aus (12) berechneten ϱ_μ, also für $\mu \leq \lambda - \nu$, während für $\mu > \lambda - \nu$ bereits oben $\varrho_\mu = 0$ festgesetzt wurde.

Was die d_μ für $\mu > \lambda - \nu$ anbelangt, so gilt für sie:

$$0 < d_\mu \leq 1 \quad (\text{für } \mu > \lambda - \nu). \qquad (14)$$

Denn die erste dieser zwei Ungleichungen ergibt sich, nachdem ja die ϱ nicht negativ sind, aus der Definition (11); aber außerdem folgt aus (11) noch weiter:

$$d_\mu - d_{\mu-2} = \varrho_\mu - (1 - \gamma_2^{(\lambda-\mu+2)}) \varrho_{\mu-2} - (\gamma_2^{(\lambda-\mu+4)} - \gamma_4^{(\lambda-\mu+4)} \varrho_{\mu-4} - \cdots$$
$$- \gamma_{q-1}^{(\lambda-\mu+q+1)} \varrho_{\mu-q-1}.$$

Für $\mu > \lambda - \nu$ mußten wir aber $\varrho_\mu = 0$ setzen; folglich wird dann:

$$d_\mu \leqq d_{\mu-2}.$$

Wegen $d_{\lambda-\nu} = d_{\lambda-\nu-1} = d_0 = 1$ ergibt sich also:

$$d_\mu \leqq 1 \quad \text{für} \quad \mu > \lambda - \nu; \text{ w. z. b. w.}$$

Aus (13) erhält man daher insbesondere auch:

$$|M_\lambda| < |M_{\nu-1}| + |M_{\nu-2}| + \cdots + |M_{\nu-q}|.$$

Hält man hier ν unverändert fest, so besagt dies, daß M_λ, also erst recht auch D_λ absolut unter einer von λ unabhängigen Schranke bleibt. Soweit gilt nun unsere ganze Betrachtung auch noch, wenn in den Voraussetzungen (2) Gleichheit zugelassen wird. Es ist dann nur in allen unseren Ungleichungen das Zeichen „$<$" zu ersetzen durch „$\leqq$". Man erhält somit:

Satz 1. Wenn die Koeffizienten der Differenzengleichung

$$D_{\nu+r} + b_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + b_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + b_r^{(\nu)} D_\nu = 0$$

reell sind und den Ungleichungen

$$1 > b_1^{(\nu)} \geqq b_2^{(\nu)} \geqq \cdots \geqq b_r^{(\nu)} \geqq 0$$

genügen, so bleibt D_ν, wie auch die Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ gewählt sein mögen, absolut unter einer von ν unabhängigen Schranke.

Von jetzt ab soll Gleichheit wieder ausgeschlossen sein. Ferner seien alle D_ν ganze rationale Zahlen, und

$$r \leqq 4.$$

Dann behaupte ich, daß identisch $D_\nu = 0$ ist.

Es genügt, dies für $\nu \geqq N$ nachzuweisen; denn für $\nu < N$ folgt es dann ohne weiteres aus (1), weil ja $b_r^{(\nu)} \neq 0$ ist. Nehmen wir also an, die D_ν verschwinden nicht für alle hinreichend großen Werte von ν. Dann lassen sich wieder die Zahlen M_λ bilden, welche aber jetzt von Null verschiedene ganze rationale Zahlen sind. Die Ungleichung (13) wird nun für $r = 3$ oder $r = 4$, d. h. für $q = 3$:

$$(15)\quad \begin{aligned} |M_\lambda| < (1 - d_{\lambda-\nu+1})\,|M_{\nu-1}| + (d_{\lambda-\nu+1} - d_{\lambda-\nu+2})\,|M_{\nu-2}| \\ + d_{\lambda-\nu+2}\,|M_{\nu-3}|, \end{aligned}$$

wobei nach (14) die d zwischen 0 und 1 liegen, so daß der erste und dritte Koeffizient der rechten Seite jedenfalls $\geqq 0$ sind. Die gleiche Formel gilt auch für $r < 3$, wobei dann die d genau gleich Null sind.

Da die positiven ganzen Zahlen

$$|M_0|,\quad |M_1|,\quad |M_2|,\ \ldots$$

unter einer endlichen Schranke bleiben, so gibt es unter ihnen eine größte, welche unendlich oft vorkommt. Sei M diese Zahl, so daß gewiß für große ν

$$|M_{\nu-1}| \leqq M, \qquad |M_{\nu-3}| \leqq M$$

ist. Dann kann man die Indices ν und $\lambda\,(>\nu)$ derart auswählen, daß

$$|M_{\nu-2}| = M, \qquad |M_\lambda| = M$$

wird. Aus (15) folgt dann:

$$M < (1-d_{\lambda-\nu+1})\,|M_{\nu-1}| + (d_{\lambda-\nu+1} - d_{\lambda-\nu+2})\,M + d_{\lambda-\nu+2}\,|M_{\nu-3}|.$$

Diese Ungleichung wird noch verstärkt, wenn man $|M_{\nu-1}|$ und $|M_{\nu-3}|$, deren Koeffizienten ja $\geqq 0$ sind, durch die mindestens ebenso große Zahl M ersetzt. Dann erhält man aber $M < M$, was nicht sein kann. Unsere Annahme $D_\nu \neq 0$ führt also auf einen Widerspruch. Daher folgt

Satz 2. Wenn eine unbegrenzte Reihe von **ganzen rationalen Zahlen** $D_0, D_1, D_2, \ldots$ einer Rekursionsformel der Gestalt

$$D_{\nu+r} + b_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + b_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + b_r^{(\nu)} D_\nu = 0$$

genügt, wobei

$$1 > b_1^{(\nu)} > b_2^{(\nu)} > \cdots > b_r^{(\nu)} > 0$$

sein soll, so ist, wenn $r \leqq 4$, notwendig $D_\nu = 0$ für alle ν.

§ 2.

Wenn in einer Kette n^{ter} Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \cdots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \cdots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \cdots \end{bmatrix}$$

die Elemente $a_i^{(\nu)}$ ganze rationale Zahlen sind, welche den Ungleichungen genügen:

$$(16) \qquad 0 < a_0^{(\nu)} \leqq a_1^{(\nu)} \leqq a_2^{(\nu)} \leqq \cdots \leqq a_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist die Kette unbedingt konvergent. Setzt man demgemäß

$$(17) \qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \cdots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(0)} \end{cases}$$

und allgemein auch:

$$(18) \qquad \begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \cdots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(\lambda)} \end{cases} \qquad (\lambda = 0,\ 1\ 2, \ldots),$$

so besteht das Gleichungssystem:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \alpha_1^{(\lambda)} &= a_1^{(\lambda)} + \frac{a_0^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}} \\ \alpha_i^{(\lambda)} &= a_i^{(\lambda)} + \frac{\alpha_{i-1}^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}} \qquad (i = 2, 3, \ldots n). \end{aligned}$$

Die Zahlen $\alpha_i^{(0)}$ sind hiebei in folgender Weise als Grenzwerte definiert: Bestimmt man unendlich viele Zahlen $A_i^{(\nu)}$ durch die Rekursionsformeln:

$$(20) \qquad \begin{gathered} A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \\ (i = 0, 1, \ldots n; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots), \end{gathered}$$

ausgehend von den Anfangswerten:

$$(21)\qquad A_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \qquad (i,\ k = 0, 1, \ldots n),$$

so ist:

$$(22)\qquad \alpha_i^{(0)} = \alpha_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).^{1)}$$

Da die $\alpha_i^{(\nu)}$ und folglich auch $A_i^{(\nu)}$ positiv sind, so ist gewiß $\alpha_i^{(0)} \geqq 0$. In ganz entsprechender Weise sind die $\alpha_i^{(\lambda)}$ zu definieren, und daher ist auch $\alpha_i^{(\lambda)} \geqq 0$ für alle λ. Man kann aber gleich noch mehr beweisen. Aus der ersten der Gleichungen (19) folgt nämlich wegen der Voraussetzung (16):

$$\alpha_1^{(\lambda)} > a_1^{(\lambda)} \geqq a_0^{(\lambda)}; \quad \text{also} \quad \alpha_0^{(\lambda)} < \alpha_1^{(\lambda)}.$$

Da dies für alle λ gilt, so ist auch:

$$\alpha_0^{(\lambda+1)} < \alpha_1^{(\lambda+1)},$$

und aus (19) und (16) folgt dann weiter:

$$\alpha_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} + \frac{\alpha_0^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}} < a_2^{(\lambda)} + \frac{\alpha_1^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}} = \alpha_2^{(\lambda)}.$$

Dies gilt wiederum für alle λ; folglich ist auch:

$$\alpha_1^{(\lambda+1)} < \alpha_2^{(\lambda+1)},$$

so daß aus (19) und (16) ferner sich ergibt:

$$\alpha_2^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda)} + \frac{\alpha_1^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}} < a_3^{(\lambda)} + \frac{\alpha_2^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}} = \alpha_3^{(\lambda)}.$$

So fortschließend gewinnt man die Reihe von Ungleichungen:

$$(23)\qquad 0 < \alpha_0^{(\lambda)} < \alpha_1^{(\lambda)} < \alpha_2^{(\lambda)} < \cdots < \alpha_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Zahlen $\alpha_i^{(0)}$ drücken sich durch $\alpha_i^{(\lambda)}$ aus mittels der Formeln (Jacobi-Ketten, pag. 414, Formel 15):

---

1) Über die hier vorkommenden Begriffsbildungen siehe „Jacobi-Ketten", § 1. Die Konvergenz unter den obigen Voraussetzungen, d. h. die Existenz der Grenzwerte (22), folgt aus „Grundlagen", pag. 12, Satz II.

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Multipliziert man mit dem Nenner herauf und setzt zur Abkürzung:

$$(24) \qquad a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)} = H_i^{(\lambda)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

so entsteht:

$$(25) \quad a_0^{(\lambda)} H_i^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+1)} + \cdots + a_n^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+n)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Oder auch, wenn man durch $a_n^{(\lambda)}$ dividiert und abkürzend

$$(26) \qquad \frac{a_0^{(\lambda)}}{a_n^{(\lambda)}} = b_n^{(\lambda)}, \quad \frac{a_s^{(\lambda)}}{a_n^{(\lambda)}} = b_{n-s}^{(\lambda)} \qquad (s = 1, 2, \ldots n-1)$$

setzt:

$$(27) \qquad \begin{gathered} H_i^{(\lambda+n)} + b_1^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+n-1)} + b_2^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+n-2)} + \cdots + b_n^{(\lambda)} H_i^{(\lambda)} = 0 \\ \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \end{gathered}$$

wobei wegen (23) die Ungleichungen bestehen:

$$(28) \quad 1 > b_1^{(\lambda)} > b_2^{(\lambda)} > \cdots > b_n^{(\lambda)} > 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nach dem Satz 1 des vorigen Paragraphen bleiben daher die Zahlen $H_i^{(\lambda)}$ absolut unter einer von λ unabhängigen Schranke; es ist also:

$$\left| a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)} \right| < C.$$

Da die Elemente $a_i^{(\lambda)}$ positive ganze Zahlen sind, so wachsen die $A_i^{(\lambda)}$ mit λ sehr rasch ins Unendliche; daher besagt die letzte Ungleichung, daß die Zahlen $a_i^{(0)}$ durch ihre „Näherungsbrüche“ verhältnismäßig gut approximiert werden; denn der Fehler ist:

$$\left| a_i^{(0)} - a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} \right| < \frac{C}{A_0^{(\lambda)}}.$$

Von jetzt ab nehmen wir an, die Kette sei höchstens von der vierten Ordnung, also $n \leqq 4$. Dann läßt sich zeigen, daß eine Relation der Form

$$P_0 a_0^{(0)} + P_1 a_1^{(0)} + P_2 a_2^{(0)} + \cdots + P_n a_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen Koeffizienten P_i, die nicht sämtlich verschwinden, nicht existieren kann. Denn angenommen, dies wäre der Fall, so können die P_i auch als ganze Zahlen vorausgesetzt werden. Multipliziert man dann mit $A_0^{(\lambda)}$, so entsteht:

$$P_0 a_0^{(0)} A_0^{(\lambda)} + \sum_{i=1}^{n} P_i a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)} = 0,$$

oder auch nach (24):

$$(29) \qquad P_0 a_0^{(0)} A_0^{(\lambda)} + \sum_{i=1}^{n} P_i (a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - H_i^{(\lambda)}) = 0.$$

Setzt man daher:

$$(30) \qquad a_0^{(0)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(\lambda)} = G_\lambda,$$

so sind die G_λ nach ihrer Definition ganze rationale Zahlen, und anderseits ist wegen (29):

$$G_\lambda = \sum_{i=1}^{n} P_i H_i^{(\lambda)}.$$

Wenn man daher Gleichung (27) mit P_i multipliziert und dann nach i summiert, ergibt sich für G_λ die Differenzengleichung:

$$G_{\lambda+n} + b_1^{(\lambda)} G_{\lambda+n-1} + b_2^{(\lambda)} G_{\lambda+n-2} + \cdots + b_n^{(\lambda)} G_\lambda = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

deren Koeffizienten den Ungleichungen (28) Genüge leisten.

Für $n \leqq 4$ folgt aber hieraus nach Satz 2 des vorigen Paragraphen: $G_\lambda = 0$ für alle λ. Da nach (30) aber insbesondere

$$G_0 = a_0^{(0)} P_0, \quad G_1 = a_0^{(0)} P_1, \; \ldots \quad G_n = a_0^{(0)} P_n$$

ist, so folgt endlich:

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \; \ldots \quad P_n = 0. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Bisher war angenommen, daß die ganzen rationalen Zahlen $a_i^{(\nu)}$ schon von $\nu = 0$ ab den Ungleichungen (16) genügen. Das Resultat bleibt aber das gleiche, wenn dies nur für $\nu \geqq N$ der Fall ist; doch muß dann für alle ν wenigstens $a_0^{(\nu)} \neq 0$ sein. Eine rationale lineare Gleichung zwischen $a_0^{(0)}$, $a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ hätte nämlich notwendig eine ebensolche zwischen $a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \ldots a_n^{(N)}$ zur Folge, welche aber nach dem gerade Bewiesenen nicht bestehen kann, wenn für $\nu > N$ die Ungleichungen (16) gelten. Für die exakte Durchführung dieses Gedankengangs verweise ich, um Wiederholungen zu vermeiden, auf „Jacobi-Ketten", pag. 450, Zeile 3 v. u. bis pag. 451 letzte Zeile, welche Ausführungen hier wortgetreu zu wiederholen sind.

Es ergibt sich somit die folgende Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes, welcher daraus für $n = 1$ hervorgeht:

Satz 3. Wenn die Elemente einer Kette von höchstens vierter Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix} \qquad n \leqq 4$$

ganze rationale Zahlen sind ($a_0^{(\nu)} \neq 0$), welche von einem gewissen Index ν ab den Ungleichungen

$$0 < a_0^{(\nu)} \leqq a_1^{(\nu)} \leqq a_2^{(\nu)} \leqq \cdots \leqq a_n^{(\nu)}$$

genügen, so konvergiert die Kette, und ihr Wertesystem $a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ genügt keiner Relation der Form

$$P_0 a_0^{(0)} + P_1 a_1^{(0)} + P_2 a_2^{(0)} + \cdots + P_n a_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i.

§ 3.

Unter einer regelmäßigen Kette verstehe ich eine solche, bei der stets $a_0^{(\nu)} = 1$ ist, während im übrigen $a_i^{(\nu)}$ die größte ganze, in $a_i^{(\nu)}$ enthaltene Zahl sein muß. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen (Ungleichungen), welchen die Elemente $a_i^{(\nu)}$ genügen müssen, damit die Kette regelmäßig ist, sind angegeben in „Grundlagen“, pag. 4 unten; wir benötigen sie hier aber nicht.

Ein Spezialfall des Stolzschen Satzes ist es, daß jeder regelmäßige Kettenbruch irrational ist. Die Erweiterung auf Ketten n^{ter} Ordnung, welche besagen würde, daß bei regelmäßigen Ketten keine Relation der Form

$$P_0 + P_1\,\alpha_1^{(0)} + P_2\,\alpha_2^{(0)} + \cdots + P_n\,\alpha_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen P_i besteht, ist aber, wie ich „Grundlagen“, pag. 11 gezeigt habe, wenigstens für $n \geq 3$ nicht mehr richtig.[1]) Dagegen ist, wie ich jetzt nachweisen werde, für $n = 2$, welchen Fall ich damals unentschieden lassen mußte, der Satz noch zutreffend.

Die Gleichungen (19) lauten für regelmäßige Ketten zweiter Ordnung:

$$\text{(31)}\quad \alpha_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} + \frac{1}{\alpha_2^{(\lambda+1)}},\quad \alpha_2^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda)} + \frac{\alpha_1^{(\lambda+1)}}{\alpha_2^{(\lambda+1)}}\quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da aber $a_i^{(\lambda)}$ die größte in $\alpha_i^{(\lambda)}$ enthaltene ganze Zahl ist, so folgt hieraus:

$$\alpha_2^{(\lambda+1)} > 1,\quad \alpha_2^{(\lambda+1)} > \alpha_1^{(\lambda+1)} > 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

oder, indem man λ an Stelle von $\lambda + 1$ setzt:

$$\text{(32)}\qquad \alpha_2^{(\lambda)} > 1,\quad \alpha_2^{(\lambda)} > \alpha_1^{(\lambda)} > 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus $\alpha_2^{(\lambda)} > \alpha_1^{(\lambda)}$ folgt auch, indem man beiderseits die größten Ganzen nimmt:

$$\text{(33)}\qquad a_2^{(\lambda)} \geq a_1^{(\lambda)}.$$

Die Gleichungen (24), (25) gehen über in:

$$\text{(34)}\qquad A_i^{(\lambda)} - \alpha_i^{(0)}\,A_0^{(\lambda)} = H_i^{(\lambda)} \qquad (i = 1, 2),$$

$$\text{(35)}\quad H_i^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\,H_i^{(\lambda+1)} + a_2^{(\lambda)}\,H_i^{(\lambda+2)} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

[1]) Für $n = 3$ ist das dort mitgeteilte Beispiel ein klein wenig zu modifizieren; es muß heißen: $b_3 = b_2$ statt $b_3 > b_2$, und $b_1 = 0$ statt $b_1 > 0$.

Ersetzt man in (35) λ durch $\lambda + 1$ und eliminiert dann $H_i^{(\lambda+2)}$ aus (35) und der neu entstehenden Gleichung, so erhält man:

$$H_i^{(\lambda+3)} = \varphi_\lambda H_i^{(\lambda)} + \psi_\lambda H_i^{(\lambda+1)}, \tag{36}$$

wobei

$$\varphi_\lambda = \frac{a_1^{(\lambda+1)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}}, \quad \psi_\lambda = \frac{a_1^{(\lambda)} a_1^{(\lambda+1)} - a_2^{(\lambda)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} \tag{37}$$

gesetzt ist. Nun läßt sich ψ_λ mit Hilfe von (31) noch etwas umformen:

$$\psi_\lambda = \frac{\left(a_1^{(\lambda)} + \dfrac{1}{a_2^{(\lambda+1)}}\right) a_1^{(\lambda+1)} - \left(a_2^{(\lambda)} + \dfrac{a_1^{(\lambda+1)}}{a_2^{(\lambda+1)}}\right)}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} = \frac{a_1^{(\lambda)} a_1^{(\lambda+1)} - a_2^{(\lambda)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}}.$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda + \psi_\lambda &= \frac{a_1^{(\lambda+1)} + a_1^{(\lambda)} a_1^{(\lambda+1)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} - \frac{a_2^{(\lambda)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} \\ &= \frac{a_1^{(\lambda+1)} + a_1^{(\lambda)} a_1^{(\lambda+1)}}{a_1^{(\lambda+1)} + a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} - \frac{a_2^{(\lambda)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, da wegen (32) und (33) in beiden Termen der rechten Seite der Zähler kleiner ist als der Nenner:

$$|\varphi_\lambda + \psi_\lambda| < 1.$$

Ferner ist aber auch:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda - \psi_\lambda &= \frac{a_1^{(\lambda+1)} + a_2^{(\lambda)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} - \frac{a_1^{(\lambda)} a_1^{(\lambda+1)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} \\ &= \frac{a_1^{(\lambda+1)} + a_2^{(\lambda)}}{a_1^{(\lambda+1)} + a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}} - \frac{a_1^{(\lambda)} a_1^{(\lambda+1)}}{a_2^{(\lambda)} a_2^{(\lambda+1)}}, \end{aligned}$$

woraus man ebenso erhält:

$$|\varphi_\lambda - \psi_\lambda| < 1.$$

Mit dem vorigen zusammengenommen ergibt dies endlich:

$$|\varphi_\lambda| + |\psi_\lambda| < 1. \tag{38}$$

Vermöge dieses Resultates schließt man aus (36), daß $|H_i^{(\lambda+3)}|$ kleiner ist als die größte der zwei Zahlen $|H_i^{(\lambda)}|$, $|H_i^{(\lambda+1)}|$; und hieraus folgt sogleich, daß $|H_i^{(\lambda)}|$ unter einer von λ unabhängigen Schranke bleibt.[1]) Der Fehler der Näherungsbrüche ist also wieder:

$$\left| a_i^{(0)} - \frac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} \right| = \frac{|H_i^{(\lambda)}|}{A_0^{(\lambda)}} < \frac{C}{A_0^{(\lambda)}}.$$

Wir nehmen nun an, es existiere eine Gleichung

$$P_0 + P_1 a_1^{(0)} + P_2 a_2^{(0)} = 0$$

mit ganzen rationalen P_i. Multipliziert man dann mit $A_0^{(\lambda)}$, so kommt wegen (34):

$$P_0 A_0^{(\lambda)} + P_1 (A_1^{(\lambda)} - H_1^{(\lambda)}) + P_2 (A_2^{(\lambda)} - H_2^{(\lambda)}) = 0.$$

Setzt man daher wiederum:

$$P_1 H_1^{(\lambda)} + P_2 H_2^{(\lambda)} = G_\lambda, \tag{39}$$

so ist auch:

$$G_\lambda = P_0 A_0^{(\lambda)} + P_1 A_1^{(\lambda)} + P_2 A_2^{(\lambda)}; \tag{40}$$

also sind alle G_λ ganze rationale Zahlen. Für diese ergibt sich aber aus (39) und (36) die Rekursionsformel:

$$G_{\lambda+3} = \varphi_\lambda G_\lambda + \psi_\lambda G_{\lambda+1}.$$

Wegen (38) ist also wieder $|G_{\lambda+3}|$ kleiner als die größte der zwei Zahlen $|G_\lambda|$, $|G_{\lambda+1}|$; da aber alle G_λ ganze Zahlen sind, so müssen sie dann von einem gewissen Index λ ab verschwinden. Daher ist für genügend große λ:

$$G_\lambda = 0, \quad G_{\lambda+1} = 0, \quad G_{\lambda+2} = 0.$$

Oder auch, wenn man die Werte aus (40) einsetzt:

[1]) Dagegen ist nicht $\lim\limits_{\lambda=\infty} H_i^{(\lambda)} = 0$, wie ich in „Grundlagen", p. 21 bis 23 an einem Beispiel dargetan habe.

$$A_0^{(\lambda)} P_0 + A_1^{(\lambda)} P_1 + A_2^{(\lambda)} P_2 = 0$$
$$A_0^{(\lambda+1)} P_0 + A_1^{(\lambda+1)} P_1 + A_2^{(\lambda+1)} P_2 = 0$$
$$A_0^{(\lambda+2)} P_0 + A_1^{(\lambda+2)} P_1 + A_2^{(\lambda+2)} P_2 = 0.$$

Da die Determinante dieses Gleichungssystems gleich 1, also von Null verschieden ist („Grundlagen“, pag. 6; Jocobi-Ketten, pag. 405), so folgt hieraus:

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0.$$

Wir erhalten somit:

Satz 4. Bedeutet $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ das Wertesystem einer **regelmässigen** Kette zweiter Ordnung, so besteht keine Relation der Form

$$P_0 + P_1 a_1^{(0)} + P_2 a_2^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i.

Ein periodischer regelmäßiger Kettenbruch ist stets Wurzel einer irreduzibeln quadratischen Gleichung. Ähnlich besteht das Wertesystem einer regelmäßigen periodischen Kette n^{ter} Ordnung aus Zahlen eines algebraischen Körpers, der aus einer Wurzel einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades entspringt. Diese „charakteristische Gleichung“ kann aber, im Gegensatz zu den Kettenbrüchen, für $n > 3$ auch reduzibel sein, so daß der Grad des Körpers kleiner ist als $n+1$ („Grundlagen“, pag. 60, 61). Ob auch bei Ketten zweiter Ordnung die charakteristische Gleichung reduzibel sein kann, konnte ich früher nicht entscheiden. Aus Satz 4 folgt nun aber sofort, daß sie stets irreduzibel ist. Denn andernfalls wäre der Grad des algebraischen Körpers, dem das Wertesystem $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ angehört, kleiner als drei; es müßte also eine rationale Relation der Form

$$P_0 + P_1 a_1^{(0)} + P_2 a_2^{(0)} = 0$$

bestehen, was nach Satz 4 nicht möglich ist.

Der Satz 4 und die soeben daraus gezogene Folgerung zeigen, daß die regelmäßigen Ketten zweiter Ordnung außer den rein formalen Analogien doch auch einige tiefer liegende Eigenschaften, die für Ketten höherer Ordnung verloren gehen, mit den regelmäßigen Kettenbrüchen, d. i. Ketten erster Ordnung, teilen. Die wichtigste Analogie wäre freilich das Näherungsgesetz; aber gerade dies ist leider schon bei Ketten zweiter Ordnung nicht mehr entsprechend („Grundlagen“, § 6).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1908

Band/Volume: 1908

Autor(en)/Author(s): Perron Oskar

Artikel/Article: Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes 181-199