Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Einige Konvergenz- und Divergenzkriterien für alternierende Kettenbrüche.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. Mai 1911.

Als alternierende Kettenbrüche bezeichnet man die Kettenbrüche der Form

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots,$$

wobei die a_ν, b_ν positive Zahlen sind. Herr Gmeiner hat sich in zwei Noten mit der Konvergenz dieser Kettenbrüche beschäftigt.[1]) Ich werde im folgenden auf sehr einfache Weise ein Kriterium herleiten, das alle Gmeinerschen als Spezialfälle enthält (Satz 4). Durch Spezialisierung ergeben sich sogar Kriterien, die immer noch allgemeiner sind als gewisse Gmeinersche, und trotzdem von einfacherer Form.

§ 1.

Wir benötigen für unsere Untersuchungen die bekannten Kriterien für Kettenbrüche mit positiven Elementen. Sei

$$d_0 + \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \frac{c_3|}{|d_3} + \cdots$$

[1]) Konvergenzsätze für alternierende unendliche Kettenbrüche. Monatshefte für Mathematik und Physik, 14. Jahrgang (1903). Zitiert als Gmeiner I. — Kriterien der Divergenz und Konvergenz von alternierenden unendlichen Kettenbrüchen. Sitzungsber. der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Klasse, Bd. 117, Abt. IIa (1908). Zitiert als Gmeiner II.

ein solcher; also $c_\nu > 0$, $d_\nu > 0$. Nach Seidel und Stern besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Konvergenz darin, daß wenigstens eine der beiden Reihen

$$\sum \frac{c_1\, c_3 \ldots c_{2\nu-1}}{c_2\, c_4 \ldots c_{2\nu}}\, d_{2\nu}, \qquad \sum \frac{c_2\, c_4 \ldots c_{2\nu}}{c_3\, c_5 \ldots c_{2\nu+1}}\, d_{2\nu+1}$$

divergiert.[1]) Dazu ist zu bemerken, daß dieser Satz noch richtig bleibt, wenn für die d_ν auch die Null zugelassen wird, sofern dann nur nicht alle d_ν mit ungeradem Index verschwinden. Den Beweis übergehe ich, da er in ganz gleicher Weise geführt werden kann, wie etwa der von Stern gegebene.

Wenn dagegen alle d_ν mit ungeradem Index verschwinden, so ist der Kettenbruch stets divergent, weil jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung sinnlos ist (d. h. den Nenner Null hat). Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Rekursionsformel für die Näherungsnenner.

Weiter benötigen wir das von Herrn Pringsheim[2]) aus dem Seidel-Sternschen hergeleitete Kriterium: „Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Reihe $\sum \sqrt{\frac{d_\nu\, d_{\nu+1}}{c_{\nu+1}}}$ divergiert.“ Auch hierbei ist zulässig, daß die d_ν teilweise verschwinden; die Möglichkeit, daß alle d_ν mit ungeradem Index verschwinden, kann hier aber gar nicht vorliegen, weil sonst die Reihe $\sum \sqrt{\frac{d_\nu\, d_{\nu+1}}{c_{\nu+1}}}$ lauter verschwindende Glieder hätte, also nicht divergieren würde.

§ 2.

Wir betrachten jetzt zunächst alternierende Kettenbrüche der speziellen Form

---

[1]) Seidel, Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Kettenbrüche. Habilitationsschrift, München 1846. — Stern, Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruches. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 37 (1848).

[2]) Über ein Konvergenzkriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, Bd. 29 (1899).

$$(1) \qquad b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

Sind A_ν, B_ν die Näherungszähler und -nenner, so gelten die Rekursionsformeln

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad A_\nu = A_{\nu-1} + (-1)^\nu a_\nu A_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1)$$
$$B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_\nu = B_{\nu-1} + (-1)^\nu a_\nu B_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Also insbesondere auch

$$\begin{array}{l|c} A_{2\nu+1} = A_{2\nu} - a_{2\nu+1} A_{2\nu-1} & 1 \\ A_{2\nu} = A_{2\nu-1} + a_{2\nu} A_{2\nu-2} & 1 \\ A_{2\nu-1} = A_{2\nu-2} - a_{2\nu-1} A_{2\nu-3} & -a_{2\nu}. \end{array}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den beigeschriebenen Faktoren und addiert dann, so kommt

$$A_{2\nu+1} = (1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1}) A_{2\nu-1} + a_{2\nu-1} a_{2\nu} A_{2\nu-3} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Die gleiche Formel gilt für die B_ν. Da außerdem $A_1 = b_0 - a_1$, $B_1 = 1$ ist, so gewinnt man das Formelsystem

$$A_{-1}=1,\ A_1=b_0-a_1,\ A_{2\nu+1}=(1+a_{2\nu}-a_{2\nu+1})A_{2\nu-1}+a_{2\nu-1}a_{2\nu}A_{2\nu-3} \quad (\nu\geqq 1)$$
$$B_{-1}=0,\ B_1=1, \qquad B_{2\nu+1}=(1+a_{2\nu}-a_{2\nu+1})B_{2\nu-1}+a_{2\nu-1}a_{2\nu}B_{2\nu-3} \quad (\nu\geqq 1).$$

Dieses besagt aber nichts anderes, als daß die Brüche

$$(2) \qquad \frac{A_1}{B_1},\ \frac{A_3}{B_3},\ \frac{A_5}{B_5},\ \frac{A_7}{B_7},\ \cdots$$

der Reihe nach die Näherungsbrüche des folgenden Kettenbruches sind:

$$(3) \qquad b_0 - a_1 + \frac{a_1 a_2|}{|1 + a_2 - a_3} + \frac{a_3 a_4|}{|1 + a_4 - a_5} + \frac{a_5 a_6|}{|1 + a_6 - a_7} + \cdots$$

Daher ist offenbar die Konvergenz von (3) notwendig für die Konvergenz von (1). Wir setzen jetzt noch

$$(4) \qquad 1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} > 0 \qquad (\nu \geqq 1)$$

voraus. Dann läßt sich zeigen, daß die Konvergenz von (3) auch hinreicht für die Konvergenz von (1).

In der Tat ist, da der Kettenbruch (3) die Näherungsbrüche (2) hat:

$$(5)\qquad \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = b_0 - a_1 + \frac{a_1 a_2|}{|1+a_2-a_3} + \frac{a_3 a_4|}{|1+a_4-a_5} + \cdots + \frac{a_{2\nu-1} a_{2\nu}|}{|1+a_{2\nu}-a_{2\nu+1}},$$

und wenn (3) konvergiert, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = \xi.$$

Wir haben dann nur zu zeigen, daß auch $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = \xi$ ist. Nun geht aber $\dfrac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ aus $\dfrac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ hervor, indem man $a_{2\nu+1} = 0$ setzt; also ergibt sich aus (5):

$$(6)\qquad \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = b_0 - a_1 + \frac{a_1 a_2|}{|1+a_2-a_3} + \cdots + \frac{a_{2\nu-3} a_{2\nu-2}|}{|1+a_{2\nu-2}-a_{2\nu-1}} + \frac{a_{2\nu-1} a_{2\nu}|}{|1+a_{2\nu}}.$$

Dies ist ein endlicher Kettenbruch, der nach (4) lauter positive Elemente hat (eventuell einige verschwindende Teilnenner). Sein Wert liegt daher zwischen seinen beiden vorletzten Näherungsbrüchen, also zwischen $\dfrac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ und $\dfrac{A_{2\nu-3}}{B_{2\nu-3}}$. Da diese aber dem Grenzwert ξ zustreben, so hat in der Tat auch $\dfrac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ den Grenzwert ξ, womit die Konvergenz von (1) bewiesen ist.

Wenden wir nun auf den Kettenbruch (3) das Seidel-Sternsche Kriterium an (§ 1), so ergibt sich

Satz 1. Die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

mögen den Ungleichungen genügen:

$$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} > 0 \qquad (\nu \geq 1).$$

Wenn hiebei für alle ungeraden ν Gleichheit statthat, so divergiert der Kettenbruch. Wenn aber mindestens für ein ungerades ν wirklich Ungleichheit statthat, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches darin, daß mindestens eine der beiden Reihen

$$\sum \frac{a_1 a_2}{a_3 a_4} \frac{a_5 a_6}{a_7 a_8} \cdots \frac{a_{4\nu-3} a_{4\nu-2}}{a_{4\nu-1} a_{4\nu}} (1 + a_{4\nu} - a_{4\nu+1})$$

$$\sum \frac{a_3 a_4}{a_5 a_6} \frac{a_7 a_8}{a_9 a_{10}} \cdots \frac{a_{4\nu-1} a_{4\nu}}{a_{4\nu+1} a_{4\nu+2}} (1 + a_{4\nu+2} - a_{4\nu+3})$$

divergiert.

Aus dem Pringsheimschen Kriterium (§ 1) ergibt sich spezieller:

Satz 2. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

den Ungleichungen genügen:

$$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1),$$

und wenn außerdem die Reihe

$$\sum \sqrt{\frac{(1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1})(1 + a_{2\nu+2} - a_{2\nu+3})}{a_{2\nu+1} a_{2\nu+2}}}$$

divergiert, so konvergiert der Kettenbruch.

Wenn für $\nu \geqq 1$ durchweg $a_{2\nu+1} \leqq 1$ ist, so hat jede der beiden Reihen

$$\sum \sqrt{\frac{a_{2\nu} a_{2\nu+2}}{a_{2\nu+1} a_{2\nu+2}}}, \qquad \sum \sqrt{\frac{(1 - a_{2\nu+1}) a_{2\nu+2}}{a_{2\nu+1} a_{2\nu+2}}}$$

kleinere Glieder als die in Satz 2 auftretende Reihe. Daher kommt a fortiori

Satz 3. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

den Ungeichungen $a_{2\nu+1} \leqq 1$ für $\nu \geqq 1$ genügen, und wenn außerdem wenigstens eine der beiden Reihen

$$\sum \sqrt{\frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}}, \qquad \sum \sqrt{\left(\frac{1}{a_{2\nu+1}} - 1\right)}$$

divergiert, so konvergiert der Kettenbruch.

§ 3.

Wir wenden uns jetzt zu dem allgemeinen alternierenden Kettenbruch

$$(7) \qquad b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots$$

Dieser ist äquivalent mit

$$(8) \qquad b_0 - \frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1} + \frac{\frac{a_2}{b_1 b_2}\Big|}{|1} - \frac{\frac{a_3}{b_2 b_3}\Big|}{|1} + \frac{\frac{a_4}{b_3 b_4}\Big|}{|1} - \cdots;$$

die Konvergenzbedingungen von (7) und (8) sind also die gleichen. Man erhält daher Kriterien für den Kettenbruch (7), wenn man die Sätze 1, 2, 3 auf den Kettenbruch (8) anwendet. Speziell aus Satz 1 folgt, indem man die Glieder der entstehenden Reihen in eine etwas bequemere Form bringt:

Satz 4. Die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots$$

mögen den Ungleichungen genügen:

$$b_{2\nu-1} b_{2\nu} b_{2\nu+1} + a_{2\nu} b_{2\nu+1} - a_{2\nu+1} b_{2\nu-1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1).$$

Wenn dabei für alle ungeraden ν Gleichheit statthat, so divergiert der Kettenbruch. Wenn aber für mindestens ein ungerades ν wirklich Ungleichheit statthat, so setze man zur Abkürzung

$$c_\nu = a_{2\nu-1}\, a_{2\nu}\, b_{2\nu-3}\, b_{2\nu+1},$$
$$d_\nu = b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}\, b_{2\nu+1} + a_{2\nu}\, b_{2\nu+1} - a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1};$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches besteht dann darin, daß von den beiden Reihen

$$\sum \frac{c_3\, c_5 \ldots c_{2\nu-1}}{c_4\, c_6 \ldots c_{2\nu}}\, d_{2\nu}, \qquad \sum \frac{c_2\, c_4 \ldots c_{2\nu}}{c_3\, c_5 \ldots c_{2\nu+1}}\, d_{2\nu+1}$$

mindestens eine divergiert.

Aus Satz 3 folgt spezieller

Satz 5. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - \cdots$$

den Bedingungen genügen:

$$a_{2\nu+1} \leqq b_{2\nu}\, b_{2\nu+1} \qquad (\nu \geqq 1),$$

und wenn von den beiden Reihen

$$\sum \sqrt{\frac{a_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1}}}, \qquad \sum \sqrt{\left(\frac{b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} - 1\right)}$$

wenigstens eine divergiert, so konvergiert der Kettenbruch.

A fortiori wird also unter der Bedingung $a_{2\nu+1} \leqq b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}$ die Divergenz der Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1}} \tag{9}$$

oder auch der Reihe

$$\sum \left(\frac{b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} - 1\right) \tag{10}$$

die Konvergenz des Kettenbruches nach sich ziehen. Die Reihe (10) findet sich im 8. Satz von Gmeiner I, der damit neu bewiesen ist. Im 4. Satz von Gmeiner I steht dagegen die Reihe

$$\sum \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_3 a_5 \ldots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1}. \tag{11}$$

Obwohl deren Bildungsgesetz komplizierter ist als das der Reihe (9), ist doch dieses Gmeinersche Kriterium in dem unseren vollkommen enthalten, indem die Divergenz von (11) stets die von (9) nach sich zieht, aber nicht umgekehrt. In der Tat, bezeichnet man die Reihe (11) mit $\sum c_\nu$, so geht (9) über in $\sum \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}$. Aus der Divergenz von $\sum c_\nu$ folgt aber stets die von $\sum \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}$; denn würde letztere Reihe konvergieren, so müßte $\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}$ beliebig klein werden, also $\sum c_\nu$ erst recht konvergieren.

Endlich findet sich bei Gmeiner II im 9. Satz die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1} b_{2\nu}}. \tag{12}$$

Da aber $a_{2\nu+1} \leqq b_{2\nu} b_{2\nu+1}$ vorausgesetzt ist, so hat (12) kleinere Glieder als (9), so daß unser Kriterium wiederum weniger verlangt als das Gmeinersche.

§ 4.

Es sollen jetzt auch einige Divergenzkriterien hergeleitet werden. Seien zunächst die Zahlen $a_{2\nu}$, $a_{2\nu+1}$, $b_{2\nu+1}$ monoton wachsend, das heißt

$$a_{2\nu+2} \geqq a_{2\nu}, \qquad a_{2\nu+1} \geqq a_{2\nu-1}, \qquad b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1}.$$

Dann sind die in Satz 4 auftretenden Zahlen c_ν ebenfalls monoton wachsend, so daß die Glieder der in Satz 4 auftretenden Reihen höchstens gleich $d_{2\nu}$ bzw. $d_{2\nu+1}$ sind. Folglich zieht die Konvergenz der Reihe $\sum d_\nu$ a fortiori die Konvergenz jener beiden Reihen und daher die Divergenz des Kettenbruches nach sich. Man erhält also

Satz 6. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots$$

den Ungleichungen genügen:

$$a_{2\nu+2} \geqq a_{2\nu}, \qquad a_{2\nu+1} \geqq a_{2\nu-1}, \qquad b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1},$$

und wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}\, b_{2\nu+1} + a_{2\nu}\, b_{2\nu+1} - a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1}]$$

keine negativen Glieder hat und konvergiert, so ist der Kettenbruch divergent.

Sind speziell alle $a_\nu = 1$, so ist die Konvergenz der vorigen Reihe wegen $b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1}$ gleichbedeutend mit der Konvergenz der beiden Reihen

$$\sum b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}, \qquad \sum (b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1}).$$

Die Konvergenz der zweiten besagt aber, daß die $b_{2\nu+1}$ einen endlichen Grenzwert haben, und infolgedessen ist die Konvergenz der ersten gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\sum b_{2\nu}$. So kommt das folgende Kriterium, welches sich mit dem zweiten Satz von Gmeiner II deckt:

Satz 7. Wenn die Teilnenner des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} - \frac{1|}{|b_3} + \frac{1|}{|b_4} - + \cdots$$

so beschaffen sind, daß erstens die $b_{2\nu+1}$ monoton wachsen, aber einen endlichen Grenzwert haben, und daß zweitens die Reihe $\sum b_{2\nu}$ konvergiert, so divergiert der Kettenbruch.

Weitere Kriterien knüpfen wir wieder an den speziellen Kettenbruch

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

an. Wir setzen voraus, daß die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu} - a_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} \tag{13}$$

absolut konvergiere. Dann ist bekanntlich auch das Produkt $\Pi \frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}$ unbedingt konvergent, so daß insbesondere auch jedes beliebig herausgegriffene Teilprodukt konvergiert. Insbesondere werden daher die folgenden vier Produkte konvergieren:

$$\Pi \frac{a_{4\nu-2}}{a_{4\nu-1}}, \quad \Pi \frac{a_{4\nu+1}}{a_{4\nu}}, \quad \Pi \frac{a_{4\nu}}{a_{4\nu+1}}, \quad \Pi \frac{a_{4\nu+3}}{a_{4\nu+2}}.$$

Infolgedessen sind die in Satz 1 auftretenden Reihen dann und nur dann beide konvergent, wenn das gleiche von den Reihen

$$\sum \frac{1 + a_{4\nu} - a_{4\nu+1}}{a_{4\nu+1}}, \quad \sum \frac{1 + a_{4\nu+2} - a_{4\nu+3}}{a_{4\nu+3}},$$

also schließlich von der Reihe

$$\sum \frac{1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}},$$

deren Glieder bei den Voraussetzungen von Satz 1 ja $\geqq 0$ sind, gilt. Wegen der absoluten Konvergenz von (13) ist dies aber gleichbedeutend mit der Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{a_{2\nu+1}}$. Also kommt

Satz 8. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

so beschaffen sind, daß

$$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1)$$

ist, und daß die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu} - a_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}$$

absolut konvergiert, so divergiert der Kettenbruch, wenn für alle ungeraden $\nu : 1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} = 0$ ist. Andernfalls ist der Kettenbruch konvergent oder divergent, je nachdem die Reihe $\sum \frac{1}{a_{2\nu+1}}$ divergiert oder konvergiert.

Der auf die Konvergenz der Reihe bezügliche Teil dieses Satzes deckt sich mit dem vierten Satz von Gmeiner II; nur ist dort noch die unnötige Einschränkung $a_{2\nu} \geqq a_{2\nu+1}$ gemacht.

Es hat keine Schwierigkeit, den Satz 8 auf die allgemeineren Kettenbrüche der Form (7) zu übertragen, wobei dann auch der dritte Satz von Gmeiner II als Spezialfall erscheint. Doch wollen wir von der Formulierung absehen. Der elfte Satz bei Gmeiner II lautet:

Satz 9. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + - \cdots$$

den drei Bedingungen genügen:

A) $$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1)$$

B) $$\frac{a_3 a_5 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} > \delta > 0, \text{ wo } \delta \text{ von } \nu \text{ nicht abhängt}$$

C) $$\sum \frac{1}{a_{2\nu}} \text{ konvergent,}$$

so divergiert der Kettenbruch.

Auch dieser Satz ist lediglich eine Folge von unserem Satz 8. Denn aus der Bedingung A) folgt zunächst

D) $$\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} \leqq 1 + \frac{1}{a_{2\nu}}.$$

Wir untersuchen jetzt die unendliche Reihe

E) $$\sum \left(\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} - 1 \right).$$

Wegen C) und D) bilden jedenfalls ihre positiven Glieder für sich eine konvergente Reihe. Wäre nun die Reihe der negativen Glieder nicht ebenfalls konvergent, so würde die Gesamtreihe E) gegen $-\infty$ divergieren. Also würde das Produkt mit dem allgemeinen Glied $\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}}$ gegen Null divergieren, weil ja bekanntlich

$$\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} < e^{\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} - 1}$$

ist. Dies würde aber der Bedingung B) widersprechen. Von der Reihe E) müssen daher die Teilreihe der positiven Glieder und die der negativen Glieder je für sich konvergieren, so daß die Reihe E) selbst absolut konvergiert. Infolgedessen ist aber $\lim \frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} = 1$, so daß die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu+1} - a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}} = \sum \left(\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} - 1 \right) \frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}$$

ebenfalls absolut konvergiert. Außerdem ist wegen der Bedingung C) und wegen $\lim \frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} = 1$ auch die Reihe $\sum \frac{1}{a_{2\nu+1}}$ konvergent. Nach Satz 8 genügt dies aber für die Divergenz des Kettenbruches.

Damit sind alle Gmeinerschen Kriterien als Spezialfälle der unsrigen nachgewiesen. Denn diejenigen, welche wir nicht ausdrücklich erwähnt haben, sind bei Herrn Gmeiner selbst nur Spezialfälle der erwähnten.