Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems.

Von **O. Haupt.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Vorbemerkung.

Gegeben sei ein stetiger Kern $K(s, t)$. Die Möglichkeit, eine stetige Funktion

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt,$$

wo auch $g(t)$ stetig sein möge, nach den Eigenfunktionen φ_j von $K(s, t)$, — φ_j gehöre zum Eigenwerte λ_j —, zu entwickeln, ist gewährleistet, sobald

1. die „Partialbruchzerlegung" der lösenden Funktion $K(\lambda; s, t)$ des Kernes $K(s, t)$ gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Wertesysteme s, t konvergiert, solange nur λ kein Eigenwert ist;

2. die lösende Funktion $K(\lambda; s, t)$ durch eben diese Partialbruchzerlegung dargestellt wird.

Beide Bedingungen sind beispielsweise erfüllt für die reellen symmetrischen Kerne, wie sie sich bei den sogenannten Greenschen Randbedingungen für homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung ergeben. Die Eigenwerte sind sämtlich reell und es bleibt $|\lambda| \cdot |K(\lambda; s, t)|$ in der komplexen λ-Ebene, abgesehen von einer bestimmten Nachbarschaft der Eigenwerte, unterhalb einer vorgegebenen Größe[1]). Infolgedessen konvergiert das Cauchysche Integral von $K(\lambda; s, t)$, erstreckt über die Begrenzung eines Rechteckes R_k in der komplexen λ-Ebene, gleichmäßig gegen Null für alle s, t, wenn die Rechtecke R_k ins Unendliche wachsen und ihre Begrenzungen keine Punkte der erwähnten Umgebung der Eigenwerte enthalten. $K(\lambda; s, t)$ besitzt nur einfache Pole; mithin ist, wenn λ_0 kein Eigenwert,

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{R_k} \frac{K(\lambda; s, t)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = K(\lambda_0; s, t) + \sum \frac{\varphi_j(s)\varphi_j(t)}{\lambda_j - \lambda_0} = 0,$$

die Summe rechterhand erstreckt über sämtliche Eigenwerte.

Nach dieser, auf Cauchy zurückgehenden Methode[3]), lassen sich nicht nur die Entwicklungssätze für beliebige (stetige) reelle, symmetrische Kerne[2]) sondern auch für eine Reihe von unsymmetrischen und komplexen Kernen gewinnen.

Poincaré[3]) hat die Methode auf Kerne angewandt, die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auftreten.

Ferner hat auf ähnlichem Wege Birkhoff[4]) Entwicklungssätze bei linearen homogenen Randbedingungen und linearen homogenen Differentialgleichungen hergeleitet. Hilb[5]) hat die Methode bei inhomogenen Differentialgleichungen und inhomogenen Randbedingungen verwandt und sie zur Gewinnung von Integraldarstellungen[6]) herangezogen.

Im folgenden soll die genannte Methode auf den Ansatz der Turbulenzproblems angewandt werden, wie er von Sommerfeld[7]) gegeben worden ist; in der Tat gelingt es mit ihrer

---

[1]) Für beliebige reelle, symmetrische Kerne vgl. Hilb, Erlanger Berichte, 40, 1908 (S. 84).

[2]) Vgl. Hellinger, Crelles Journal, Bd. 136 (S. 266 ff.).

[3]) Vgl. Poincaré, Rendic. del Circolo Math. di Palermo, 25. März 1894.

[4]) Birkhoff, Transactions of the American Math. soc., Vol. 9, No. 4. (S. 373—395).

[5]) Hilb, Math. Annalen, Bd. 71, 1911, (S. 76 ff.) und Crelles Journal, Bd. 140, 1911, (S. 205 ff.).

[6]) Hilb, Berichte der Phys.-Med. Societ. in Erlangen 1911, (S. 68).

[7]) Sommerfeld, Atti del IV. congr. intern. dei Mathematici. Rom 1908, (S. 116).

Hilfe nachzuweisen, daß eine, gewissen in der Natur der Sache liegenden Randbedingungen und Stetigkeitsforderungen unterworfene, aber sonst willkürliche Funktion sich nach den schon von Sommerfeld angegebenen „Eigenfunktionen" des Problems entwickeln läßt.

Herrn Professor Hilb bin ich für die Anregung und seinen Rat bei der Bearbeitung vorliegender Frage zu Danke verpflichtet, ebenso Herrn Professor Sommerfeld für Erläuterungen über die hydrodynamische Seite des Problems.

I. Formulierung des Problems. Aufstellung der Greenschen Funktion.

Die Randwertaufgabe ist folgende.

Gegeben sind die Differentialgleichungen:

$$L(\varphi) \equiv \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \lambda^2 \varphi - l(\eta;\, \alpha)\varphi = 0, \tag{1}$$

$$M(\varphi) \equiv \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f - \varphi = 0. \tag{2}$$

Dabei ist $l(\eta;\, \alpha)$ eine ganze rationale Funktion von η und α; α ist eine vorgegebene Größe.

Gesucht werden Lösungen $f(\eta)$ von (2), welche die Randbedingungen

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0; \quad f(1) = 0, \quad \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=1} = 0 \tag{II}$$

erfüllen.

Wegen

$$f = c_1 e^{\alpha\eta} + c_2 e^{-\alpha\eta} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^\eta [e^{-\alpha(\zeta-\eta)} - e^{+\alpha(\zeta-\eta)}]\, \varphi(\zeta)\, d\zeta, \quad \alpha \neq 0,$$

erhält man $c_1 = c_2 = 0$ und mithin als Randbedingung für φ

$$J_1(\varphi) = \int_0^1 \varphi(\zeta) e^{-\alpha\zeta} d\zeta = 0, \quad J_2(\varphi) = \int_0^1 \varphi(\zeta) e^{\alpha\zeta} d\zeta = 0\,[1]. \tag{I}$$

[1]) Vgl. Sommerfeld, l. c.; R. von Mises, Beitrag zum Oszillationsproblem (Weberfestschrift, Leipzig 1912, S. 252—282; S. 275).

Zusatz: Für den Sommerfeldschen Ansatz hat man speziell

$$\lambda^2 = -i R \beta, \quad l(\eta; \alpha) = \alpha^2 - i R \alpha \eta;$$

α und R sind reelle Konstante[1]).

Diejenigen Parameterwerte λ^2, für welche Lösungen φ der gewünschten Art existieren, heißen die Eigenwerte, die zugehörigen Lösungen φ die Eigenfunktionen unseres Problems (1), (I). Für alle Werte λ^2, die nicht Eigenwerte sind, gibt es eine Lösung von (1): $G(\eta, \xi; \lambda^2)$, die eine stetige Funktion von η ist, außerdem noch von dem (reellen) Parameter ξ abhängt und den Bedingungen (I) genügt, während die 1. Ableitung nach η an der Stelle $\eta = \xi$ den Sprung $+1$ erleidet.

Zur Bildung der „Greenschen Funktion $G(\eta, \xi; \lambda^2)$" dienen die beiden in folgender Weise normierten Partikularlösungen φ_1 und φ_2 von (1):

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \left(\frac{d\varphi_1}{d\eta}\right)_0 = 1; \quad \varphi_2(0) = 1, \quad \left(\frac{d\varphi_2}{d\eta}\right)_0 = 0;$$

φ_1 und φ_2 sind ganze transzendente Funktionen von λ^2.

Setzt man

$$\begin{aligned} \varphi_3(\eta; \xi) &= \varphi_1(\eta)\varphi_2(\xi) - \varphi_2(\eta)\varphi_1(\xi) = -\varphi_3(\xi; \eta) \\ \Phi_3(\eta; \xi) &= \varphi_3(\eta; \xi), \qquad \eta < \xi \\ \Phi_3(\eta; \xi) &= 0, \qquad \eta > \xi, \end{aligned}$$

so kommt

$$G(\eta, \xi; \lambda^2) = A(\xi)\varphi_1(\eta) + B(\xi)\varphi_2(\eta) - \Phi_3(\eta; \xi),$$

und es sind hierbei A und B bestimmt durch

$$\begin{aligned} \Delta \cdot A(\xi) &= J_1(\Phi_3) J_2(\varphi_2) - J_2(\Phi_3) J_1(\varphi_2) \\ \Delta \cdot B(\xi) &= J_2(\Phi_3) J_1(\varphi_1) - J_1(\Phi_3) J_2(\varphi_1) \\ \Delta &= J_1(\varphi_1) J_2(\varphi_2) - J_1(\varphi_2) J_2(\varphi_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{1,2}(\Phi_3) &= \left(\int_0^\xi \varphi_1(\zeta) e^{(\mp)\alpha\zeta} d\zeta\right) \varphi_2(\xi) - \left(\int_0^\xi \varphi_2(\zeta) e^{(\mp)\alpha\zeta} d\zeta\right) \varphi_1(\xi) \\ &= \bar{J}_{1,2}(\varphi_1)\varphi_2(\xi) - \bar{J}_{1,2}(\varphi_2)\varphi_1(\xi) \\ &= \bar{J}_{1,2}(\varphi_3(\zeta; \xi))[2]). \end{aligned}$$

[1]) S. Note auf S. 291. [2]) ζ bedeutet stets die Integrationsvariable.

Demzufolge ist $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ eindeutig bestimmt, solange λ^2 kein Eigenwert ist; die Eigenwerte sind identisch mit den Nullstellen von $\Delta(\lambda^2)$. Sie sind Pole der in λ^2 meromorphen Funktion $G(\eta, \xi; \lambda^2)$[1]. Verschwindet also Δ nicht identisch in λ^2, so können die Eigenwerte sich nur im Unendlichen häufen.

Zu einem Eigenwerte gibt es entweder eine einzige Eigenfunktion (abgesehen von einem konstanten Faktor) oder es genügen sämtliche Lösungen der Differentialgleichung (1) unseren Bedingungen (I).

Ist der betrachtete Eigenwert λ_j^2 ein Pol 1. Ordnung von $G(\eta, \xi; \lambda^2)$, so stellt sich das Residuum $G(\lambda^2)$ als Produkt zweier Funktionen $\varphi_j(\eta)$ und $\psi_j(\xi)$ dar; $\varphi_j(\eta)$ enthält nur η, $\psi_j(\xi)$ nur ξ und beide sind 2mal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente. $\varphi_j(\eta)$ ist die bzw. eine zu λ_j^2 gehörige (normierte) Eigenfunktion unseres Problems. Für Pole von höherer als der 1. Ordnung gilt Entsprechendes.

Die Bedeutung von $\psi_j(\xi)$ ergibt sich, wenn man G als Funktion von ξ betrachtet und η festhält. Solange λ^2 kein Eigenwert, ist

1. $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ eine stetige Funktion von ξ $(0 < \xi < 1)$ für alle η $(0 < \eta < 1)$:

2. $$\left[\frac{\partial G(\eta, \xi; \lambda^2)}{\partial \xi}\right]_{\xi = \eta + 0} - \left[\frac{\partial G(\eta, \xi; \lambda^2)}{\partial \xi}\right]_{\xi = \eta - 0} = 1;$$

3. $$L(\Delta \cdot G(\eta, \xi)) + \{e^{a\xi} J_1(\varphi_3(\zeta, \eta)) - e^{-a\xi} J_2(\varphi_3(\zeta, \eta))\} = 0. \quad (3)$$

(I)

4. $$G(\eta; \xi = 0; \lambda^2) = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{\xi = 0} = 0, \quad 0 < \eta < 1;$$

$$G(\eta; \xi = 1; \lambda^2) = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{\xi = 1} = 0, \quad 0 < \eta < 1$$[2].

[1] Ist λ_0 kein Eigenwert, so läßt sich zeigen, daß $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ die zum Kerne $G(\eta, \xi; \lambda_0^2)$ gehörige lösende Funktion ist.

[2] Ist $\eta = 0$, so ist in (I): $\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = 1$, ist hingegen $\eta = 1$, so gilt: $\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{\xi=1} = -1$; alles übrige bleibt ungeändert.

Auch die $\varphi_j(\xi)$ genügen offenbar den Randbedingungen (I) und befriedigen diejenige Differentialgleichung (1), die sich aus (3) für $\lambda^2 = \lambda_j^2$ ergibt. $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ kann demnach — als Funktion von ξ betrachtet — als Greensche Funktion des zu (1), (I) „adjungierten" Randwertproblems (1), (I) angesehen werden, welches die nämlichen Eigenwerte besitzt.

2. Asymptotische Darstellung der Greenschen Funktion.

Zur Gewinnung der Partialbruchzerlegung von $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ hat man nun das Verhalten von $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ für sehr große $|\lambda^2|$ zu untersuchen.

Wir betrachten zunächst $\Delta(\lambda^2)$, welches sich in der Gestalt schreiben läßt

$$\Delta(\lambda^2) = -\int_0^1\int_0^1 e^{a(\zeta-\tau)} \varphi_3(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau.$$

Da $\varphi_3(\xi, \xi) = 0$, $\left(\frac{d\varphi_3(\eta; \xi)}{d\eta}\right)_{\eta=\xi} = 1$ und $\varphi_3(\eta; \xi)$, als Funktion von η (wie auch von ξ), der Differentialgleichung (1) genügt, so erhalten wir $\varphi_3(\eta; \xi)$ aus $\varphi_1(\eta)$, indem wir in φ_1 den Ausdruck $\eta - \xi$ an Stelle von η substituieren. Eine Darstellung von $\varphi_3(\eta; \xi)$ für große Werte von $|\lambda^2|$ ergibt sich nach Liouville auf Grund der Formel

$$(5) \quad \varphi_1(\eta) = \frac{1}{2i\lambda}\{e^{i\lambda\eta} - e^{-i\lambda\eta}\} - \frac{1}{\lambda}\int_0^\eta \sin\lambda(\eta - \zeta_1) l(\zeta_1) \varphi_1(\zeta_1)\, d\zeta_1,$$

wobei zur Abkürzung

$$\sin\lambda(\eta - \zeta_1) \text{ für } \frac{1}{2i}\{e^{i\lambda(\eta-\zeta_1)} - e^{-i\lambda(\eta-\zeta_1)}\}$$

geschrieben wird.

Bezeichnet man den reellen Bestandteil von λ mit $\Re(\lambda)$ und setzt

$$\lambda = \Re(\lambda) + i\,\Im(\lambda),$$

so ist

$$2i\lambda\varphi_1(\eta) = e^{i\lambda\eta} - e^{-i\lambda\eta} + \frac{1}{\lambda} R(\eta)\, e^{(\pm) i\lambda\eta},$$

wobei im Restgliede das $+$ oder $-$ Zeichen steht, je nachdem $\Im(\lambda) \lesseqgtr 0$ ist[1]) und

$$|R(\eta)| < 4\int_0^1 |l(\zeta)|\, d\zeta \text{ für jedes } |\lambda| > 2\int_0^1 |l(\zeta)|\, d\zeta \text{ und jedes } 0 < \eta < 1^{2)}.$$

Man hat also

$$\varphi_3(\eta;\xi) = \frac{1}{2i\lambda}\left(e^{i\lambda(\eta-\xi)} - e^{-i\lambda(\eta-\xi)} + \frac{1}{\lambda} R(\eta-\xi)\, e^{(\overset{+}{-})i\lambda(\eta-\xi)}\right),$$
$$0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad \Im(\lambda) (\lesseqgtr) 0.$$

Nun wird

$$\Delta = -\frac{1}{2i\lambda}\int_0^1\int_0^1 \left[e^{(i\lambda+a)(\zeta-\tau)} - e^{(-i\lambda+a)(\zeta-\tau)} + \frac{1}{\lambda} R(\zeta-\tau)\, e^{(a(\overset{+}{-})i\lambda)(\zeta-\tau)}\right] d\zeta\, d\tau.$$

Die Ausführung der Integrationen ergibt

$$\Delta = -\frac{1}{2i\lambda}\left\{e^{i\lambda}\left[\frac{e^a}{(i\lambda+a)^2} - \frac{e^{-a}}{(i\lambda-a)^2}\right] + \right.$$
$$\left. e^{-i\lambda}\left[-\frac{e^a}{(i\lambda-a)^2} + \frac{e^{-a}}{(i\lambda+a)^2}\right] + \frac{e^{(\overset{+}{-})i\lambda}}{(i\lambda)^3}\,[\cdot\cdot\cdot]\right\},$$

weil die von der Integration des in φ_3 auftretenden Restgliedes herrührenden Glieder mindestens mit $\frac{1}{(i\lambda)^3}$ behaftet sind. Die dritte eckige Klammer rechter Hand ist eine Funktion von λ allein, die für alle $|\lambda|$, die oberhalb einer bestimmten Größe liegen, absolut genommen stets unterhalb einer endlichen, von λ unabhängigen Größe bleibt. Man bemerke, daß das mit der niedersten Potenz von $(i\lambda)^{-1}$ behaftete Glied in Δ

$$\frac{4}{(2i\lambda)^3}\left(e^a - e^{-a}\right)\left(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}\right)$$

ist, wobei $|\lambda|$ so groß sein soll, daß man $1:(i\lambda \pm a)^2$ nach $\frac{i\lambda}{a}$ entwickeln kann.

---

[1]) In gleicher Weise ist die Bezeichnung $e^{(\overset{+}{-})i\lambda}$ in allen weiterhin auftretenden Restgliedern zu verstehen.

[2]) Vgl. Hilb, Math. Annalen, Bd. 71, 1911, (S. 82).

Der gefundenen Darstellung von Δ zufolge gibt es zunächst in der komplexen λ-Ebene zu jedem $|\Im(\lambda')|$ eine reelle Zahl $m' > 0$ derart, daß Werte λ, für welche $|\Im(\lambda')| < \Im(\lambda)$ ist und $|\lambda| > m'$ wird, niemals Eigenwerte sind. Die Nullstellen von $\Delta(\lambda^2)$ werden, wie leicht zu ersehen[1]), asymptotisch dargestellt durch die Quadrate der Nullstellen von $\sin(\lambda)$ und nur durch sie allein. Die Nullstellen von $\Delta(\lambda^2)$, nach wachsenden absoluten Beträgen geordnet, sind von einer bestimmten an stets einfach.

Das Verhalten des Zählers für sehr große $|\lambda|$ erkennt man folgendermaßen. Es war

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda^2)G(\eta,\xi;\lambda^2) &= \{J_1(\varphi_3(\zeta,\xi))\,J_2(\varphi_2) - J_2(\varphi_3(\zeta;\xi))\,J_1(\varphi_2)\}\,\varphi_1(\eta)\\ &\quad+\{J_2(\varphi_3(\zeta,\xi))J_1(\varphi_1) - J_1(\varphi_3(\zeta,\xi))\,J_2(\varphi_1)\}\,\varphi_2(\eta)\\ &= J_2(\varphi_3(\zeta,\xi))\,J_1(\varphi_3(\zeta;\eta)) - J_1(\varphi_3(\zeta,\xi))\,J_2(\varphi_3(\zeta,\eta))\\ &= \left[\int_0^\xi e^{\alpha\zeta}\varphi_3(\zeta;\xi)\,d\zeta\right]\left[\int_0^\xi e^{-\alpha\tau}\varphi_3(\tau;\eta)\,d\tau+\int_\xi^1 e^{-\alpha\tau}\varphi_3(\tau;\eta)\,d\tau\right]\\ &\quad-\left[\int_0^\xi e^{-\alpha\zeta}\varphi_3(\zeta;\xi)\,d\zeta\right]\left[\int_0^\xi e^{\alpha\tau}\varphi_3(\tau;\eta)\,d\tau+\int_\xi^1 e^{\alpha\tau}\varphi_3(\tau;\eta)\,d\tau\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda^2)G(\eta,\xi;\lambda^2) &= \int_0^\xi\!\!\int_0^\xi e^{\alpha(\zeta-\tau)}[\varphi_3(\zeta;\xi)\varphi_3(\tau;\eta) - \varphi_3(\tau;\xi)\varphi_3(\zeta;\eta)]\,d\zeta\,d\tau\\ &\quad+\int_0^\xi\left\{\int_\xi^1[e^{\alpha(\zeta-\tau)} - e^{-\alpha(\zeta-\tau)}]\,\varphi_3(\zeta;\xi)\,\varphi_3(\tau;\eta)\,d\tau\right\}d\zeta.\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\varphi_3(\zeta;\xi)\,\varphi_3(\tau;\eta) - \varphi_3(\tau;\xi)\,\varphi_3(\zeta;\eta) = \varphi_3(\xi;\eta)\,\varphi_3(\zeta;\tau).$$

Mithin ist das Doppelintegral an erster Stelle

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\,i\,\lambda}\,\varphi_3(\xi;\eta)\int_0^\xi\!\!\int_0^\xi\Big[e^{(i\lambda+\alpha)(\zeta-\tau)} - e^{(-i\lambda+\alpha)(\zeta-\tau)}\\ &\qquad+\frac{1}{\lambda}\,R(\zeta-\tau)\,e^{((\pm)i\lambda+\alpha)(\zeta-\tau)}\Big]\,d\zeta\,d\tau\end{aligned}$$

oder

[1]) Vgl. Hilb, l. c., S. 81.

$$\frac{1}{(2\,i\,\lambda)^2}\left[e^{i\lambda(\xi-\eta)} - e^{-i\lambda(\xi-\eta)} + \frac{1}{\lambda}\,R(\xi-\eta)\,e^{(\pm)\,i\lambda(\xi-\eta)}\right] \times$$

$$\left[e^{i\lambda\xi}\left\{\frac{e^{a\xi}}{(i\lambda+a)^2} - \frac{e^{-a\xi}}{(-i\lambda+a)^2}\right\} + e^{-i\lambda\xi}\left\{\frac{e^{-a\xi}}{(i\lambda+a)^2} - \frac{e^{a\xi}}{(-i\lambda+a)^2}\right\} + \frac{e^{(\pm)\,i\lambda\xi}}{(i\lambda)^3}\{\cdots\}\right].$$

Wie in den Ausdrücken für $\Delta(\lambda^2)$ bleibt hier das in der letzten eckigen Klammer nur angedeutete Glied, für hinreichend großes $|\lambda|$, absolut genommen unterhalb einer festen Größe.

Die Ausführung des Produktes führt nur zu solchen Exponentialfunktionen, in deren Argument der Faktor von $\pm\, i\,\lambda$ absolut genommen niemals den Betrag 1 überschreitet; denn es war ja $\eta > \xi$ vorausgesetzt.

Zum gleichen Ergebnisse führt die Auswertung des 2. Doppelintegrals. Die sämtlichen in $\Delta \cdot G(\eta, \xi)$ auftretenden Glieder besitzen mindestens den Faktor $\dfrac{1}{(i\,\lambda)^4}$.

Die Untersuchung beschränkte sich bisher auf die Annahme $\eta > \xi$. Die gewonnenen Ergebnisse sind aber auch richtig für den Fall $\eta < \xi$, wie man unter Benutzung der Eindeutigkeit der Greenschen Funktion leicht beweist.

3. Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion.

Man konstruiert nun in der komplexen λ-Ebene eine abzählbare Reihe von Quadraten Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, deren Seiten bzw. den Koordinatenachsen parallel sind, deren Mittelpunkt etwa der Nullpunkt ist und von denen jedes Q_ν alle vorangehenden, also $Q_{\nu-1}, Q_{\nu-2}, \ldots$, umschließt. Die Seite von Q_ν möge die Länge $\dfrac{2(\nu+n)+1}{2}\pi$ besitzen, unter ν und n natürliche Zahlen verstanden; n ist dabei so groß zu wählen, daß $\dfrac{2n+1}{2}\pi$ nicht Nullstelle von $\Delta(\lambda^2)$ ist. Unsern Ergebnissen zufolge kann n stets so gewählt werden, daß dann überhaupt auf der Begrenzung keines der Quadrate $Q_1, Q_2, \ldots$ eine Nullstelle von $\Delta(\lambda^2)$ liegt.

Die Darstellung von Zähler und Nenner der Greenschen Funktion für sehr große $|\lambda|$ lehrt ferner, daß sich n, im Rahmen der ihm bereits auferlegten Bedingung, so wählen läßt, daß für alle $0 < \eta \leq 1$, $0 \leq \xi < 1$ auf der Begrenzung eines jeden der Quadrate Q_ν

$$|G(\lambda^2; \eta, \xi)| < \frac{m_0}{|\lambda|}$$

bleibt, wobei m_0 eine feste, von λ, η und ξ unabhängige Konstante bedeutet.

Bezeichnet λ_0 einen im Innern von Q_1 gelegenen Punkt, welcher nicht Eigenwert ist, so liefert für den Fall nur einfacher Pole von $G(\lambda^2; \eta, \xi)$ die Anwendung des Cauchyschen Satzes

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_\nu} \frac{G(\lambda^2;\eta,\xi)}{\lambda-\lambda_0}\,d\lambda = G(\lambda_0^2;\eta,\xi) + \sum_j{}' \frac{1}{2\lambda_j}\left(\frac{\varphi_j(\eta)\,\psi_j(\xi)}{(\lambda_j-\lambda_0)} - \frac{\varphi_j(\eta)\,\psi_j(\xi)}{(-\lambda_j-\lambda_0)}\right).$$

Die Summe rechter Hand ist über alle im Innern von Q_ν gelegenen Pole von $G(\lambda^2; \eta, \xi)$ zu erstrecken; $\varphi_j(\eta)\,\psi_j(\xi)$ stellt das Residuum von $G(\lambda^2)$ an dem betreffenden Pole dar.

Die oben getroffene Anordnung der Quadrate Q_ν bewirkt nun, daß das Integral linker Hand mit beständig wachsendem ν gegen Null konvergiert und zwar gleichmäßig für alle $0 < \eta < 1$, $0 < \xi < 1$. Es gilt also

$$\text{(III)} \qquad G(\lambda_0^2; \eta, \xi) = \sum_j \frac{\varphi_j(\eta)\,\psi_j(\xi)}{\lambda_0^2 - \lambda_j^2}.$$

Die zu Grunde gelegte Voraussetzung, daß die Pole sämtlich einfache seien, kann nur für eine endliche Anzahl von Eigenwerten nicht erfüllt sein. Für diese letzteren modifiziert die Partialbruchzerlegung sich entsprechend, während alle übrigen Tatsachen in Richtigkeit bleiben.

4. Die Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen.

Auf Grund des gewonnenen Resultates erhält man nun in bekannter Weise die Entwickelung einer „willkürlichen" Funktion nach den φ_j bzw. ψ_j.

Gestattet die zu entwickelnde Funktion $\varphi(\eta)$ die Darstellung

$$\varphi(\eta) = \int_0^1 G(\lambda_0^2; \eta, \xi)\, g(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

so ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Partialbruchzerlegung

$$\text{(IV)}\quad \varphi(\eta) = \sum c_j \varphi_j(\eta), \quad c_j = \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_j^2} \int_0^1 g(\xi)\psi_j(\xi)\, d\xi; \quad 0 < \eta < 1.$$

Die Bedingung (6) ist beispielsweise immer erfüllt, wenn φ eine zweimalstetig differenzierbare Funktion ist, die den Randbedingungen (I) Genüge leistet. Der Greensche Satz ergibt nämlich[1])

$$\int_0^1 [L(\varphi(\xi)) \cdot G(\lambda_0^2; \eta, \xi) - L(G(\xi)) \cdot \varphi(\xi)]\, d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \left[G(\eta, \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{dG(\eta; \xi)}{d\xi} \varphi(\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=\eta-\varepsilon} \right.$$

$$\left. + \left[G(\eta; \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{dG(\eta; \xi)}{d\xi} \varphi(\xi) \right]_{\xi=\eta+\varepsilon}^{\xi=1} \right\}.$$

Wegen (I) bekommt man

$$\int_0^1 G(\lambda_0^2; \eta, \xi) \cdot L(\varphi(\xi))\, d\xi$$

$$- \int_0^1 \{ e^{\alpha\xi} \varphi(\xi) \cdot J_1(\varphi_3(\zeta, \eta)) - e^{-\alpha\xi} \varphi(\xi) \cdot J_2(\varphi_3(\zeta, \eta)) \}\, d\xi = \varphi(\eta),$$

also zufolge (3)

$$\int_0^1 G(\lambda_0^2; \eta, \xi)\, L(\varphi)\, d\xi = \varphi(\eta).$$

---

[1]) Vgl. Fußnote S. 293.

Bezeichnet f_j die zu φ_j gehörige, den Randbedingungen (II) genügende Lösung von (2), so kann man eine Funktion $f(\eta)$ nach den f_j entwickeln, sobald f etwa zweimalstetig differenzierbar ist und

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} - a^2 f = \bar{\varphi}(\eta)$$

die Darstellung (6) zuläßt[1]). Dann hat man

$$\text{(V)}\quad f(\eta) = \sum_j c_j f_j(\eta), \quad c_j = \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_j^2}\int_0^1 \bar{\varphi}(\xi)\psi_j(\xi)\,d\xi, \quad 0 < \eta < 1,$$

vorausgesetzt, daß f die Randbedingungen (II) erfüllt.

Die Entwickelungen (IV) und (V) konvergieren gleichmäßig für alle $0 \leqq \eta \leqq 1$.

5. Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse soll auf die physikalische Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse hingewiesen werden.

Aus der asymptotischen Verteilung der Eigenwerte folgt wegen

$$\lambda^2 = -\, i\, R\, \beta,$$

daß sich stets eine natürliche Zahl j_0 angeben läßt, sodaß für jedes $j \geqq j_0$

$$i\,\beta_j = -\frac{1}{R}\lambda_j^2$$

einen negativ reellen Teil besitzt.

Die Funktionen

$$\text{(7)}\qquad e^{i\beta_j t - i a \xi}\varphi_j(\eta), \qquad j > j_0,$$

deren reellen Teil man als Stromfunktionen gewisser, der Hauptbewegung überlagerter (unendlich kleiner) Störungen von dem speziellen Anfangszustande $\Re(\varphi_j(\eta))$ auffassen möge[2]), führen also zu stabilen Bewegungen.

[1]) Dies ist der Fall, wenn f 4 mal stetig differenzierbar ist.

[2]) Vgl. A. Sommerfeld l. c., S. 119.

Aus solchen speziellen Störungen läßt sich aber dem gewonnenen Ergebnisse zufolge die allgemeinste Störung $\varphi(\eta)$ zusammensetzen, wenn $\varphi(\eta)$ außer den genannten Stetigkeitsforderungen noch den in der Natur der Sache liegenden Randbedingungen (I) genügt. Dementsprechend erhält man den zeitlichen Ablauf dieser Störung $\varphi(\eta)$ als Summe von Termen der Form (7)[1]) und schließt auf den stabilen Charakter der Hauptbewegung unter der folgenden Voraussetzung: 1. daß die oben gemachte Aussage über das Vorzeichen des reellen Teiles von $i\beta_j$ nicht nur für $j > j_0$, sondern allgemein, für alle $j > 0$ Geltung besitzt[2]); 2. daß auch für beliebige Abhängigkeit in der ξ-Richtung die Stabilität erhalten bleibt.

---

[1]) Auf die Untersuchung, ob

$$\lim_{t=0} \sum_j e^{i\beta_j t - i\alpha\xi} \varphi_j(\eta) = \sum_j e^{-i\alpha\xi} \varphi_j(\eta)$$

ist, soll hier nicht eingegangen werden.

[2]) Vgl. hierzu die Resultate der Vorträge von Hopf und v. Mises auf der Versammlung der Naturforschergesellschaft 1911; ferner Hamel, Gött. Nachr. 1911.