Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen.

Von **M. Laue.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 6. Juli 1912.

Vor kurzem veröffentlichten W. Friedrich, P. Knipping und der Verfasser[1]) an dieser Stelle Beobachtungen über Interferenzerscheinungen, die beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle entstehen, sowie eine Theorie dazu, welche sich qualitativ der Erfahrung anschloß. Jetzt soll diese Theorie einer ersten quantitativen Prüfung unterzogen werden. Mag es sein, daß es dabei nicht gelingt, zur vollen Wahrheit durchzudringen, daß besonders die Werte für die Wellenlängen der Röntgenstrahlen später ersetzt werden müssen durch andere, welche zu ihnen in einfachen, rationalen Verhältnissen stehen. Das eine geht wohl aus der weitgehenden Übereinstimmung mit der Erfahrung hervor: daß die Theorie auf dem rechten Wege ist. Zugleich mag das Folgende als Beispiel für das Verfahren nützlich sein, nach welchem Photogramme, wie die dort veröffentlichten, auszuwerten sind. Wir wählen dazu die Fig. 5 auf Tafel II, bei welcher das regulär kristallisierte Zinksulfid parallel einer vierzähligen Symmetrieachse durchstrahlt wird. Die Gitterkonstante a ergibt sich aus der Überlegung, daß jedem Elementarwürfel dieses Gitters ein Zink- und ein Schwefelatom entspricht. Bezeichnet also

[1]) W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue, diese Verhandlungen 1912, p. 303. Die dortige Numerierung der Gleichungen und Figuren wird hier fortgesetzt.

$$N = 6{,}17.10^{23}$$

die Zahl der Molekeln im Mol[1]),

$$m = 65{,}4 + 32 = 97{,}4$$

das Molekulargewicht und

$$\delta = 4{,}06$$

die Dichte[2]), so muß

$$a^3 N = \frac{m}{\delta} \tag{10}$$

sein, weil beide Seiten der Gleichung das Volumen eines Mols darstellen. Daraus folgt:

$$a = 3{,}38.10^{-8}\ \text{cm}. \tag{11}$$

Wie schon erwähnt (p. 307), legt man zweckmäßig die Koordinatenachsen in die Richtungen der Würfelkanten. Die drei Sinusquotienten des Intensitätsausdruckes 6) haben dann nach 8) ihre Maxima auf den Kegelflächen

$$\alpha = h_1 \frac{\lambda}{a}, \quad \beta = h_2 \frac{\lambda}{a}, \quad 1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}.$$

Die Schnitte der beiden ersteren Scharen mit der senkrecht zur z-Richtung stehenden photographischen Platte sind Hyperbeln, während die Gleichung $\gamma = \text{const.}$ konzentrische Kreise um den Durchstoßpunkt des primären Strahles ergibt; die Radien dieser Kreise sind proportional zur Tangente des Achsenwinkels

$$\varphi = \arccos \gamma$$

der zugehörigen Kreiskegel.

Um das Photogramm theoretisch nachzukonstruieren, ersetzt man zweckmäßig die wirklichen Koordinaten

$$x = \alpha \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad y = \beta \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

eines Punktes auf der Platte durch α und β als rechtwinklige Koordinaten. Dann bekommen die Kreise

[1]) M. Planck, Wärmestrahlung. Leipzig 1906, p. 162.
[2]) Landolt-Börnstein, Tabellen. Berlin 1894, p. 62 p.

$$\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} = \text{const.}$$

Radien gleich

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sin \varphi .$$

In radialer Richtung ist also die Zeichnung gegen das Photogramm verzerrt. Erhalten dagegen bleiben alle Winkel, deren Spitze im Mittelpunkt liegt und damit die Winkelabstände der zu berechnenden Flecken, weil

$$\alpha : \beta = x : y$$

ist. Vor allem aber werden die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ jetzt zu den Koordinatenachsen parallele äquidistante Gerade; benutzt man bei der Zeichnung $\frac{\lambda}{a}$ als Längeneinheit, so findet man diese auf Koordinatenpapier unmittelbar vor. Jedem Schnittpunkt solcher Geraden entspricht ein Schnittpunkt von zwei Hyperbeln im Photogramm, d. h. ein mögliches Kreuzgitterspektrum. Es fragt sich nun, welche von diesen Punkten einem Kreise $1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}$ naheliegen. Wie nahe sie daran liegen müssen, um wirklich sichtbar zu werden, entzieht sich vorläufig unserer Beurteilung. Wir rechnen im folgenden, als ob sie genau auf ihnen liegen müßten, d. h. als ob die Gleichungen 8) alle genau erfüllt wären. Jedem Interferenzpunkt sind dann drei ganze Zahlen h_1, h_2, h_3, seine Ordnungszahlen, zugeordnet. Diese für spektral homogene Strahlung sicherlich nicht zutreffende Annahme hat auf die zu errechnende Lage der Interferenzpunkte keinen merklichen Einfluß. Auffälliger wird ihr Einfluß auf die zu berechnenden Werte der Wellenlänge, insofern sich diese auch dann ein wenig unterscheiden werden, wenn sie sich auf dieselbe Strahlung beziehen. So lassen sich die unten gefundenen, einige Prozente betragenden Differenzen dieser Art erklären. Wie weit dabei die tatsächliche Unbestimmtheit der Wellenlänge infolge der spektralen Inhomogenität eine Rolle spielt, bleibt eine offene Frage.

Haben wir nun für ein Intensitätsmaximum die drei Ordnungszahlen h gefunden, so bestimmt sich das Verhältnis $\frac{\lambda}{a}$ wegen der Gleichungen 8) und der Identität

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

zu

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2\,h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}. \qquad 13)$$

Die Richtungskosinus α, β, γ, d. h. die Lage eines Interferenzpunktes, bestimmt sich wegen 8) eindeutig aus den Ordnungszahlen h nach den Formeln:

$$\alpha = \frac{2\,h_1 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}, \quad \beta = \frac{2\,h_2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}, \quad \gamma = \frac{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}. \qquad 13\,a)$$

Die Koordinaten x, y eines Interferenzpunktes im Photogramm hängen natürlich außerdem noch vom Abstand z der Platte vom Kristall ab; für sie gelten die Formeln:

$$x = \frac{\alpha}{\gamma} z = \frac{2\,h_1 h_3}{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2} \cdot z, \quad y = \frac{\beta}{\gamma} z = \frac{2\,h_2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2} z. \qquad 13\,b)$$

Da die Zahlen h ganze Zahlen sind, so sind sie und damit der nach 13) bestimmte Wert $\frac{\lambda}{a}$ von kleinen Beobachtungsfehlern unabhängig.

In dem genannten Photogramm fassen wir zunächst den zweiten Ring von innen ins Auge, der einen sehr stark ausgeprägten, der Symmetrie wegen achtfachen Punkt trägt. Sein Radius, bestimmt aus dem Abstand einander gegenüberliegender Punkte, ist $r = 1{,}25$ cm. Da der Abstand der Platte vom Kristall $z = 3{,}56$ cm[1]) betrug, so folgt

[1]) Dieser Abstand z war experimentell nicht so genau bestimmt, wie er hier angegeben ist, schon weil der photographische Film nie ganz eben ist. Der Wert 3,56 cm ist so gewählt, daß die Radien der Ringe in der Berechnung möglichst genau mit den am Photogramm gemessenen stimmen. Somit enthält die Messung eines einzelnen Radius noch keine Prüfung der Theorie, sondern nur die Messung der Quotienten aus den Radien verschiedener Ringe.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{z} = 0{,}350, \quad \varphi = 19^0\,20'$$
$$\cos\varphi = \gamma = 0{,}9436$$
$$1 - \gamma = 0{,}0564.$$

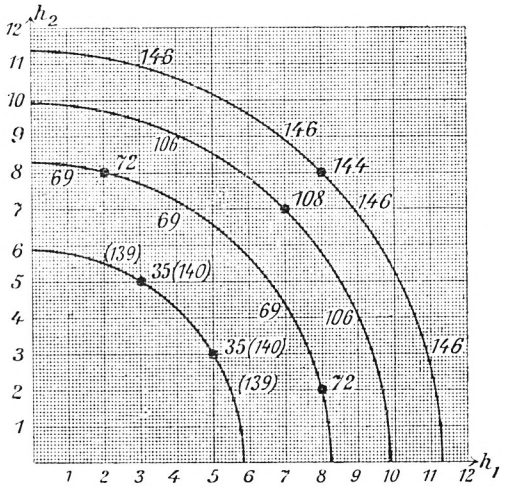
Ist der fragliche Ring von der 1. Ordnung, so muß nach der dritten der Gleichungen 8)

$$\frac{\lambda}{a} = 0{,}0564 \tag{14}$$

sein. Dann aber müssen wir wegen der Ganzzahligkeit der h nach 13) schließen:

$$\Sigma h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 36.$$

Fig. 3.



Auf dem Koordinatenpapier (Fig. 3) findet man nun leicht die Punkte

$$h_1 = 3, \quad h_2 = 5$$
$$h_1 = 5, \quad h_2 = 3,$$

für welche, wenn $h_3 = 1$, $\Sigma h^2 = 35$ ist. Messen wir ihre

Winkelabstände gegeneinander und gegen die Achsen, so finden wir völlige Übereinstimmung mit der Lage jener acht Punkte im Photogramm. Somit werden wir dieser Wellenlänge den achtfachen Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach 13)
3	5	1	35	$\frac{2}{35} = 0{,}0571$

zuschreiben. Die Differenz zwischen diesem Werte von $\frac{\lambda}{a}$ und dem in 14) gegebenen liegt völlig innerhalb der Fehlergrenze.

Könnte nun dieser Ring von der 2. Ordnung sein? Wohl kaum; denn sonst bekämen die betrachteten Punkte die Ordnungszahlen

6	10	2	140,

und die Figur zeigt, daß die Punkte

4	11	2	141[1])

dem durch sie führenden Kreis so nahe liegen, daß noch ein weiterer achtfacher Punkt zu erwarten wäre, der tatsächlich auf dem Photogramm nicht vorhanden ist.

Fragen wir weiter, ob es für die oben berechnete Wellenlänge einen Ring 2. Ordnung gibt. Dann muß nach 13) $\Sigma h^2 = 70$ sein. In Fig. 3 findet man nun den achtfachen Punkt

2	8	2	72	$\frac{4}{72} = 0{,}0555.$

Der Radius dieses Ringes im Photogramm berechnet sich nach dem Schema:

$$1 - \gamma = 2\frac{\lambda}{a} = 0{,}1111, \quad \gamma = 0{,}8889, \quad \varphi = 27^0\,16'$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5154, \quad r = z \operatorname{tg}\varphi = 3{,}56 \cdot 0{,}5154 = 1{,}84 \text{ cm}.$$

[1]) In Fig. 3 ist Ziffer 139 durch 141 und Ziffer 108 durch 107 zu ersetzen.

In der Tat finden sich in dem Photogramm acht Punkte, deren Abstand vom Mittelpunkt diesen Wert hat, und welche gegen die Achsen und gegeneinander dieselben Winkelabstände haben wie der angegebene Punkt und die sieben anderen, welche man durch Vertauschung von h_1 und h_2, sowie durch Umkehrung der Vorzeichen dieser Zahlen daraus ableitet. Dagegen fehlen die Punkte

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach 13)
4	8	2	69	$\frac{4}{69} = 0{,}0580$,
1	7	2		

welche nach der Zeichnung dem Kreise auch noch recht nahe liegen.

Für einen Ring 3. Ordnung ($r = 2{,}26$ cm) findet sich nach Fig. 3 ein vierfacher Punkt

7	7	3	107	$\frac{6}{107} = 0{,}0561$,

der im Photogramm tatsächlich zu sehen ist, während merkwürdigerweise der Punkt

4	9	3	106	$\frac{6}{106} = 0{,}0567$

fehlt. Eine Erklärung dafür läßt sich zurzeit nicht geben.

Auf dem Ring 4. Ordnung ($r = 2{,}88$ cm) findet sich nach Fig. 3 ein auch im Photogramm vertretener vierfacher Punkt

8	8	4	144	$\frac{8}{144} = 0{,}0555$,

während die Punkte

11	3	4	146	$\frac{8}{146} = 0{,}0548$
7	9	4		

fehlen. Der Ring 5. Ordnung liefert nach der Zeichnung keinen Punkt. Er würde im Photogramm schon vollkommen außerhalb des Bereiches der Interferenzpunkte liegen.

Übersieht man diese Zusammenstellung, so erscheint ziemlich sicher, daß $\frac{\lambda}{a}$ zwischen 0,0555 und 0,0571, also etwa bei 0,0563 liegt, was nach 11) auf den Wert

$$\lambda = 1{,}90 . 10^{-9} \text{ cm}$$

führt. Unaufgeklärt bleibt nur das Fehlen des einen Punktes im Ring 3. Ordnung. Daß für $\frac{\lambda}{a}$ nicht überall derselbe Wert herauskommt, liegt daran, daß die drei Beziehungen 8) nicht alle streng erfüllt sein können, wie in Gleichung 13) angenommen war. Ob die spektrale Breite der Strahlung so groß ist, daß alle Wellenlängen zwischen den angegebenen Grenzen vorkommen, muß noch dahingestellt bleiben. Hervorgehoben soll noch werden, daß die sechs stärksten Punkte in dem dreizählig symmetrischen Photogramm, Tafel III, Fig. 7 ebenfalls auf diese Wellenlänge hinweisen. Ihr entspricht zweifellos die stärkste von allen vom Zinksulfid ausgehenden Strahlungen.

Ganz analog findet man für den innersten schwachen Ring der vierzählig symmetrischen Aufnahme ($r = 1{,}01$ cm) die Punkte:

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach 13)
1	7	1	51	$\frac{2}{51} = 0{,}0392,$
5	5	1		

von denen der erste achtfach, der zweite vierfach vertreten ist. Dazu gehört als Ring 2. Ordnung der stark ausgebildete 3. Ring von innen ($r = 1{,}46$ cm) mit dem achtfachen Punkt

2	10	2	108	$\frac{4}{108} = 0{,}0370.$

Weitere Ringe fehlen, trotzdem auf ihnen nach der Konstruktion noch weitere Punkte liegen könnten. Es stimmt dies damit überein, daß nach außen die Intensitäten der Interferenzpunkte schnell abnehmen.

Das Verhältnis $\frac{\lambda}{a}$ dürfte somit für diese Gruppe von Interferenzpunkten zwischen 0,0392 und 0,0370 liegen, und zwar, da der innere Ring soviel schwächer als der äußere ist, näher an dem letzteren Wert. Nehmen wir $\frac{\lambda}{a} = 0{,}0377$ an, so wird nach 11)

$$\lambda = 1{,}27.10^{-9} \text{ cm}.$$

Sehr auffällig sind in dem Photogramm die vier Gruppen von je drei eng benachbarten Flecken, welche im Abstand $r = 2{,}67$ cm vom Mittelpunkt auf den Koordinatenachsen liegen. Diese lassen sich ungezwungen durch einen Ring 3. Ordnung mit der Wellenlänge

$$\lambda = 0{,}0663\, a = 2{,}24.10^{-9} \text{ cm}$$

erklären, auf welchem nach der Zeichnung die Punkte

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach 13)
0	9	3	90	$\frac{6}{90} = 0{,}0667$
1	9	3	91	$\frac{6}{91} = 0{,}0659$

liegen, von denen der erste ein vierfacher, der zweite ein achtfacher ist. Dieselbe Wellenlänge gehört zu einem Ring 4. Ordnung ($r = 3{,}31$ cm) mit den achtfachen Punkten

2	10	4	120	$\frac{8}{120} = 0{,}0667$,

während der auch noch in Betracht kommende Punkt

1	10	4	117	$\frac{8}{117} = 0{,}0683$

fehlt. Daß hier kein Ring 2. Ordnung auftritt, erklärt die Zeichnung damit, daß der einzige dafür in Betracht kommende Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach 13)
3	7	2	62	$\frac{4}{62} = 0{,}0645$

schon zu wenig zu dieser Wellenlänge paßt. Unerklärt bleibt dagegen, weswegen kein Ring 1. Ordnung auftritt; der Punkt

2	5	1	30	$\frac{2}{30} = 0{,}0667$

würde vortrefflich zu den oben angegebenen stimmen.

Ferner finden wir noch einen Ring 1. Ordnung ($r = 1{,}78$ cm) für die nur schwach vertretene Wellenlänge

$$\lambda = 0{,}1051\, a = 3{,}55.10^{-9}\,\text{cm}$$

mit dem vierfachen Punkt

3	3	1	19	$\frac{2}{19} = 0{,}1051.$

Ein Ring 2. Ordnung tritt nicht auf, obwohl der Punkt

3	5	2	38	$\frac{4}{38} = 0{,}1051$

gut zu den angegebenen paßte. Es erklärt sich dies wohl aus dem allgemeinen Abklingen der Intensität nach außen.

Die längste der bisher berechneten Wellenlängen ist aber

$$\lambda = 0{,}1428\, a = 4{,}83.10^{-9}\,\text{cm},$$

welche mit dem achtfachen Punkt

2	3	1	14	$\frac{2}{14} = 0{,}1428$

einen Ring 1. Ordnung ($r = 2{,}12$ cm) bildet. Der zugehörige Ring 2. Ordnung würde schon außerhalb des Gesichtsfeldes liegen.

In Fig. 6, Tafel II ist, um den Vergleich mit der Erfahrung zu erleichtern, das Photogramm 5 auf Tafel II unmittelbar aus den hier angegebenen Zahlen $h_1\, h_2\, h_3$ nach den Gleichungen

13 b) und unter der Annahme $z = 3{,}56$ cm nachkonstruiert worden. Der Leser mag sich selber durch Abgreifen mit dem Zirkel von der Übereinstimmung der Figur mit dem Photogramm überzeugen. Fortgelassen sind in der Zeichnung nur die beiden Punkte, deren Fehlen im Photogramm unerklärt blieb, und einige Punkte in den äußeren Teilen des Photogrammes, welche bisher noch nicht durchgerechnet sind. Abgesehen von den beiden mehrfach erwähnten Ausnahmen, erklärt also die Theorie, weshalb gerade die beobachteten Interferenzpunkte und nur diese auftreten; sie leistet dies unter Annahme von niedrigen Ordnungszahlen (< 10) und von Wellenlängen, welche von der erwarteten Größenordnung 10^{-9} cm sind.

An den obigen Angaben sind meiner Überzeugung nach sicher die Verhältnisse zwischen den Ordnungszahlen h_1, h_2, h_3, von denen nach 13 b) die Lage der Interferenzpunkte allein abhängt. Nicht ebenso sicher sind diese Zahlen selbst und damit auch nicht die angegebenen Werte der Wellenlängen. Immerhin sei bemerkt, daß ich mich für die angegebenen Werte erst nach Prüfung mancher anderer Möglichkeiten entschieden habe. Verdächtig ist z. B., daß die angegebenen Wellenlängen sich verhalten wie

$$1{,}27 : 1{,}90 : 2{,}24 : 3{,}55 : 4{,}83 = 4 : 6 : 7 : 11 : 15.$$

Wollte man aber alle errechneten Interferenzpunkte auf die Wellenlänge $\frac{1}{4}\, 1{,}27 . 10^{-9} = 3{,}20 . 10^{-10}$ cm zurückführen, so müßten, soweit ich sehe, noch viele andere Interferenzpunkte vorhanden sein, die tatsächlich nicht auftreten. Auch sonst sprechen mancherlei Umstände gegen die Annahme einer einzigen Strahlung, z. B. die Härtemessungen (p. 321). Wie dem aber auch sein mag, in der Übereinstimmung der Fig. 6 mit dem Photogramm 5 scheint mir eine weitgehende Bestätigung der Interferenztheorie dieser Erscheinungen zu liegen.

München, Institut für theoretische Physik, Juli 1912.

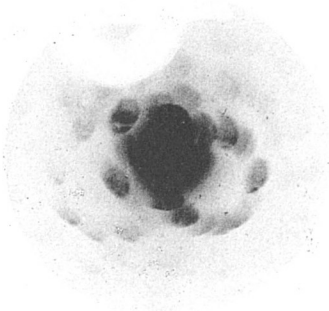


Fig. 1

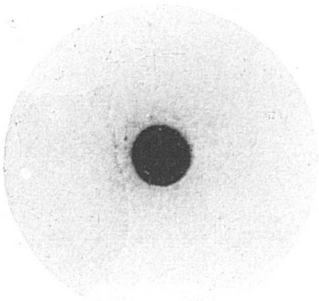


Fig. 2

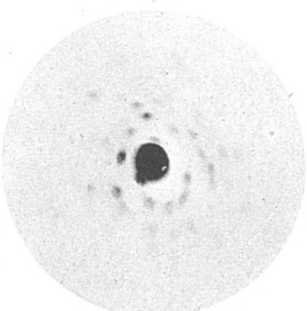


Fig. 3

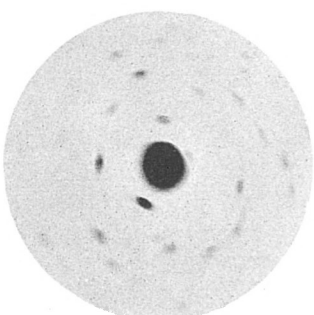


Fig. 4

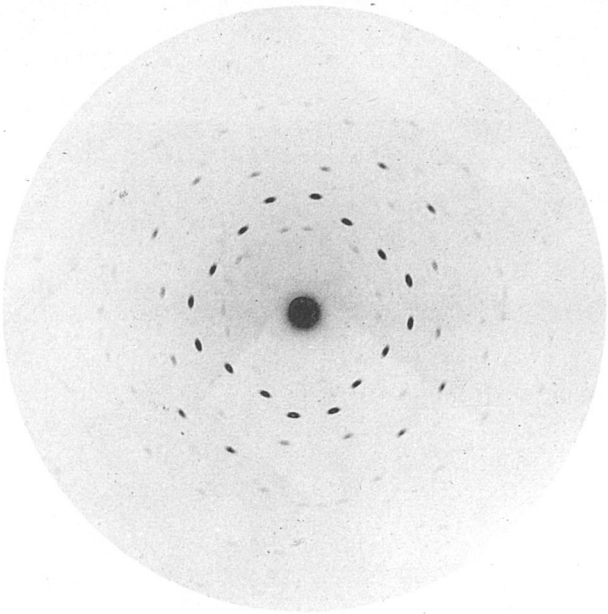


Fig. 5

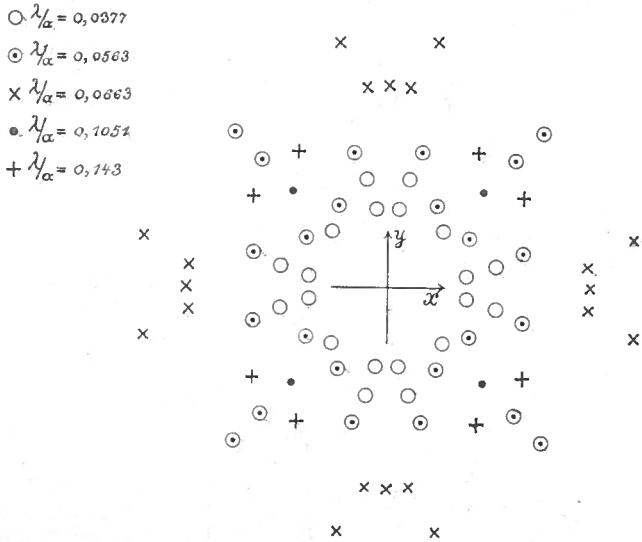


Fig. 6

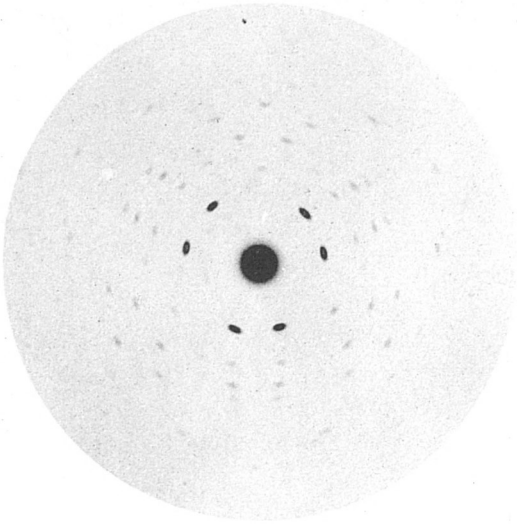


Fig. 7

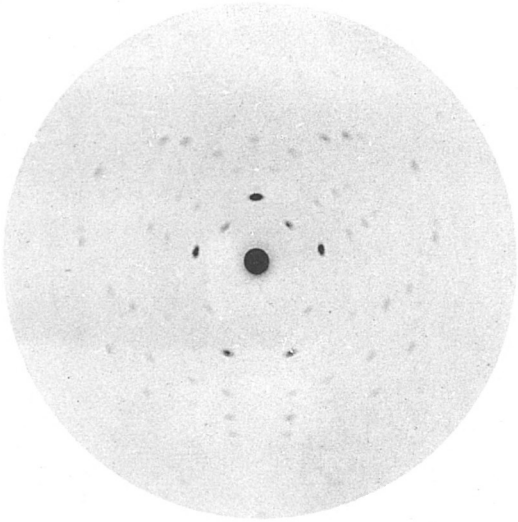


Fig. 8

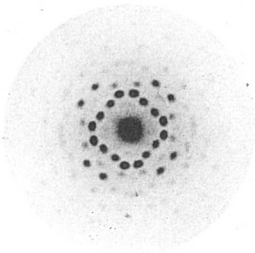


Fig. 9

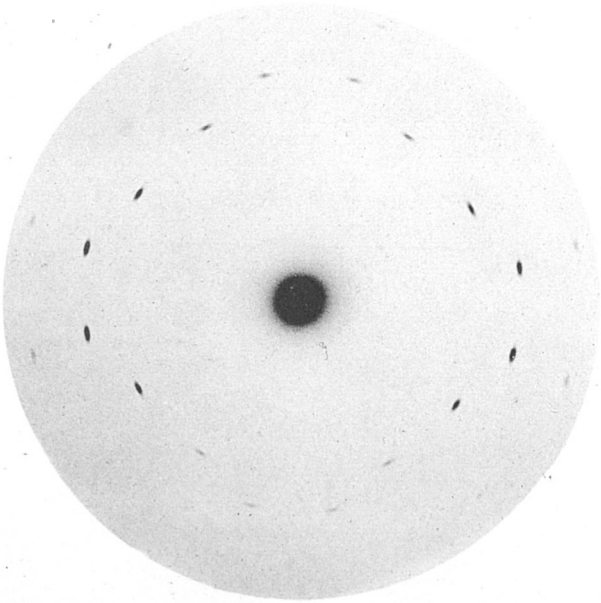


Fig. 10

Fig. 11

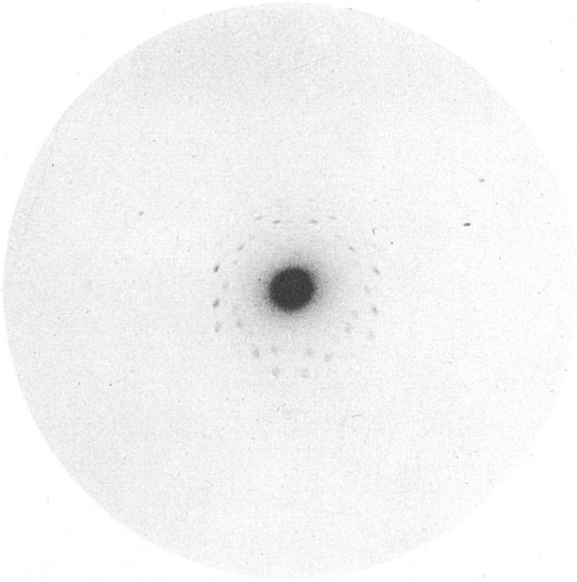


Fig. 12

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1912

Band/Volume: 1912

Autor(en)/Author(s): Laue Max von

Artikel/Article: Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen 363-373