Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft III
November- und Dezembersitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne.

Von **H. Seeliger.**

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

Die vorliegende Arbeit gibt einen weiteren Beitrag zur Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen der scheinbaren Verteilung der Sterne am Himmel und der Konstitution des Fixsternkomplexes, in dem wir uns befinden. Gegenwärtig muß man sich mit solchen Beiträgen begnügen, denn es zeigt sich, daß eine definitive Lösung der hier auftretenden Probleme ein viel mehr ausgebreitetes Beobachtungsmaterial erfordert, als jetzt zu Gebote steht. Das verfügbare statistische Material erstreckt sich nur in Ausnahmefällen auf schwächere Sterne, als von der 9. bis 10. Größe, aber gerade die Verteilung dieser schwächeren Sterne ist voraussichtlich von ausschlaggebender Wichtigkeit und wird zur Entscheidung von Vieldeutigkeiten, die dem Problem noch anhaften, beitragen. Das Studium der scheinbaren Verteilung schwacher Sterne am Himmel ist deshalb eine sehr wichtige Aufgabe, welche dem beobachtenden Astronomen zufällt. Selbstverständlich muß dabei eine sehr sorgfältige Helligkeitsbestimmung ausgeführt werden. Es ist aber ganz nebensächlich, ob die Sternhelligkeit physiologisch, photographisch oder irgendwie anders gemessen wird. Nur muß für die ganze Reihe der Sterne, von den hellsten bis zu den schwächsten, dieselbe Art der Energiebestimmung zur Anwendung kommen. Die absoluten Leuchtkräfte werden natürlich in den verschiedenen Fällen verschiedene Häufigkeitsfunktionen aufweisen, die räumliche Dichtigkeit, welche durch die Zahl aller in der Volumeinheit enthaltenen Sterne definiert ist, kann hiervon aber nicht abhängen. Und so würde schließlich die Verwertung der Messungsresultate nach verschiedenen Methoden der Helligkeitsbestimmung wirksame Prüfungen für das Endresultat abgeben. Die Art der Helligkeitsmessung hat nur die allerdings notwendige Bedingung zu erfüllen, daß die Schwächung der Intensität nach dem quadratischen Gesetz bei der freien räumlichen Ausdehnung der Lichtbewegung wiedergegeben wird.

So sind bei photometrischen Beobachtungen, wo direkt der Lichteindruck auf das Auge maßgebend ist, sehr gut verschiedene Skalen möglich, von denen jede in dem obigen Sinne homogen und infolgedessen durchaus brauchbar ist. Man kann also von verschiedenen photometrischen Systemen sprechen und es ist von Wichtigkeit, daß das verwendete System im obigen Sinne homogen ist. Strenge genommen werden also für verschiedene photometrische Systeme — die besseren zeigen übrigens keine großen Abweichungen voneinander — verschiedene Häufigkeitsfunktionen der Leuchtkräfte auftreten, die räumliche Dichtigkeit der Sternverteilung kann davon nicht berührt werden. Da zur Bildung der Häufigkeitsfunktion die Anordnung der Sterne nach ihrer Helligkeit in der Entfernung 1 ohne Rücksicht auf die Farbe der Sterne erfolgt, so werden gerade die verschiedenen Systeme darin verschieden sein, daß die Helligkeitsmessung von der Farbe nicht immer unabhängig ist. Wenn aber die Schwächung des Lichts gemäß des quadratischen Gesetzes wiedergegeben ist, dann ist ein schädlicher Einfluß der Sternfarbe auf die Sicherheit des Materials nicht vorhanden.

Man könnte nun, der eingangs gemachten Bemerkung gemäß, die Frage aufwerfen, ob man nicht die sehr nötige Vermehrung des statistischen Materials abwarten sollte, ehe man den Versuch macht, zu bestimmten Vorstellungen über unser Sternsystem vorzudringen. Diese Frage muß aber, wie ich glaube, entschieden verneint werden, und zwar schon deshalb, weil gerade die weitere Verfolgung der Konsequenzen gewisser Annahmen, ohne die man gegenwärtig nicht auskommt, darauf hinweist, was man von dem tatsächlichen Materiale fordern muß und was es bisher noch nicht leistet. So hat sich z. B. ergeben, daß die zahlenmäßigen Nachweise über die scheinbare Verteilung der Sterne eine gewisse Genauigkeit haben müssen, wenn sie verwendbar sein sollen und daß es nicht angeht, ganz rohe Angaben den Betrachtungen zu Grunde zu legen. Weiterhin ergibt sich, daß das von mir als „schematisch" bezeichnete Sternsystem, in dem von der Abhängigkeit der Sternverteilung von der Lage zur Milchstraße abgesehen wird, wohl zur ersten Orientierung dienen kann, daß es sich aber viel zu weit und in undefinierbarer Weise von den tatsächlichen Verhältnissen entfernt und demzufolge zu unrichtigen Schlüssen verleiten kann.

Man darf eben nicht die gewaltige Symmetrieebene der Milchstraße, die alle stellarastronomischen Betrachtungen beeinflussen muß, einfach unberücksichtigt lassen. Schon aus diesem Grunde ist es geboten, die Betrachtungen, die dem schematischen Sternsystem bisher zuteil geworden sind, auf das „typische" auszudehnen, in welchem überall auf eine Berücksichtigung der Abhängigkeit von der galaktischen Breite Bedacht genommen wird. Dieser Standpunkt ist übrigens bereits in meiner ersten Arbeit vom Jahre 1898 festgehalten worden.

Im folgenden werden nun Rechnungen angestellt, die zum weiteren Eindringen in die Verhältnisse im Sternsystem beitragen sollen. In Art. 1 betrachte ich, an eigene frühere und auch an fremde Arbeiten anschließend, noch einmal das schematische Sternsystem; und zwar unter der Voraussetzung, daß Sterne von beliebig großer Leuchtkraft vorkommen können. Wie zu erwarten, ergibt sich, daß dann das Problem, aus der Anzahl der Sterne verschiedener Helligkeit und aus den mittleren Parallaxen dieser Sterne, wie sie aus den Eigenbewegungen abgeleitet worden sind, die räumliche Verteilung der Sterne zu bestimmen, auch praktisch keine eindeutige Lösung hat, wenn man dem Sternsystem verschiedene endliche Begrenzungen gibt, daß man vielmehr unendlich viele voneinander stark abweichende Lösungen finden kann, die den gegenwärtig verfügbaren Daten innerhalb zulässiger Genauigkeitsgrenzen genügen.

In Art. 2 wird der Versuch gemacht mit den in Art. 1 gebrauchten Ansätzen für ein unendlich ausgedehntes typisches Sternsystem die Rechnung durchzuführen. Es ergibt sich eine Abhängigkeit der mittleren Parallaxen von der galaktischen Breite in der Weise, daß diese für die schwächeren Sterne in der Milchstraße kleiner sind, wie in den von ihr entfernteren Regionen. Dabei treten aber beträchtliche unregelmäßige Schwankungen in den Parallaxen der helleren Sterne hervor. Ferner sind die systematischen Abweichungen nicht von der Art und Größe, wie man sie eigentlich erwarten durfte. Man wird daraus den Schluß ziehen können, vielleicht ziehen müssen, daß neben der Unsicherheit der statistischen Daten auch der Umstand mitgewirkt haben mag, die Form der gemachten Ansätze entspräche nicht der Natur des Problems. Indessen ergab, in Übereinstimmung mit dem Folgenden, auch diese Rechnung, daß bei Sternen, die schwächer als etwa von der 7. bis 8. Größe sind, die Angabe einer mittleren Parallaxe keinen rechten Sinn hat, wenn man nicht zugleich angibt, wie sich die betreffenden Sterne über die einzelnen zur Milchstraße orientierten Zonen verteilen.

In Art. 3 werden die von mir in einer Arbeit von 1911[1]) gemachten Ansätze auf das typische Sternsystem angewendet. Dieselben beruhen auf der Annahme einer endlichen Grenze H, welche die Leuchtkräfte der Sterne nicht überschreiten. Dann folgt die endliche Ausdehnung des Sternsystems von selbst und kann, wenn auch nur unsicher, bestimmt werden. Eine beiläufige Rechnung ergab für die Gesamtausdehnung des Systems in der zur Milchstraße senkrechten Richtung etwa 660 und in

[1]) Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem. Münchener Sitzungsberichte 1911. Hier werden auch meine früheren Arbeiten in diesem Gebiete ihrer Tendenz nach zusammengefaßt.

der Richtung der Milchstraße 3500 Siriusweiten. (Eine Siriusweite entspricht einer Parallaxe 0″2.) Die Gestalt ist also der einer flachen Scheibe ähnlich, als welche ja auch im großen und ganzen in sehr viel kleinerem Maßstabe die Spiralnebel sich darzustellen scheinen. Die mittleren Parallaxen zeigen eine sehr bemerkbare Abhängigkeit von der Lage zur Milchstraße: die Sterne von derselben scheinbaren Helligkeit sind in der Milchstraße sehr beträchtlich (z. B. Sterne 8. Größe mehr als doppelt soweit) weiter von uns entfernt als in der Nähe der Pole der Milchstraße. Das zuletzt genannte Resultat habe ich vor kurzem an andrer Stelle[1]) besprochen, so daß ich in diesem Aufsatze nicht näher darauf eingehen werde. Zu bemerken ist ausdrücklich, daß bei allen Rechnungen auf eine etwaige Extinktion des Sternlichts keine Rücksicht genommen worden ist.

In den bisher erwähnten Artikeln wurde die scheinbare Verteilung der Sterne, deren Größe < 6.5 ist, gebraucht und zwar für die einzelnen Milchstraßenzonen. Diese Daten waren mit nachweisbarer Bestimmtheit früher nicht zu erlangen. Jetzt liegen aber vortreffliche photometrische Kataloge vor und es war eine Diskussion für die hellen Sterne in der angegebenen Richtung geboten und ausführbar. Die Resultate einer solchen Diskussion sind in Art. 4 enthalten.

1.

In meiner letzten Arbeit[2]) über die räumliche Verteilung der Fixsterne, die ich im folgenden mit (III) bezeichnen und deren Inhalt ich als bekannt voraussetzen werde, habe ich einige Rechnungen über das schematische Sternsystem angestellt. Das dort benutzte System von Formeln und Zahlen ist auf der Annahme gegründet, daß die absoluten Leuchtkräfte i der Sterne einen gewissen endlichen Wert H nicht überschreiten. Aus dieser Annahme allein folgt dann die endliche Ausdehnung des Sternsystems von selbst und es gelingt sowohl die Darstel-

[1]) Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

[2]) Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem. Sitzungsberichte der Münchener Akademie d. Wiss. 1911.

lung der festgestellten Zahlen A_m, das ist der Zahl der Sterne, von den hellsten bis zur Größe m als auch der als empirisch gegeben angesehenen mittleren Parallaxen π_m der Sterne von der Größe m. Die Voraussetzung des Bestehens einer solchen endlichen Größe H braucht selbstverständlich nicht strenge erfüllt zu sein und sie sagt nur aus, daß die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ für $i > H$ praktisch unmerkliche Werte hat. Die Gründe, warum ich die genannte Voraussetzung beibehalten habe, trotzdem natürlich das Fallenlassen derselben die Ausgangsformeln sehr vereinfacht, habe ich ausführlich in (III) auseinandergesetzt. Nimmt man von vornherein $H = \infty$, so stellt sich die Notwendigkeit einer anderen Hypothese heraus: man muß nämlich über die Grenzentfernung r_1, bis zu welcher sich das Sternsystem erstreckt, eine Annahme machen. In der Tat werde ich zeigen, daß man r_1 innerhalb eines Intervalls, das sich von einem ziemlich kleinen Wert bis zu $r_1 = \infty$ erstreckt, willkürlich wählen kann, ohne die Darstellung der Zahlen A_m und π_m, ihrer Sicherheit entsprechend, ernstlich zu gefährden. Auch wird sich der wahre Grund dieser Erscheinung klar darstellen, welche praktisch genommen einer Vieldeutigkeit der Aufgabe gleichkommt, aus den Zahlen A_m und π_m die räumliche Dichtigkeit $\varDelta$ und die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ zu bestimmen. Daraus folgt die Erkenntnis, daß die Annahme $r_1 = \infty$ eine willkürliche ist. Sie dürfte auch an sich ernsten Bedenken allgemeiner Art ausgesetzt sein, wenn sie mehr als eine rechnerische Bedeutung haben soll. Man müßte sich denn das Universum so vorstellen, daß überall leuchtende Weltkörper vorhanden sind, die sich in gewissen Teilen, gewissermaßen in Knoten dichter zusammendrängen. Einer dieser Knoten würde dann unser Milchstraßensystem sein. Das letztere würde also nicht mehr als ein isoliertes System zu betrachten sein. Auf die Schwierigkeiten, die mit solchen oder ähnlichen Vorstellungen verknüpft sind, soll hier nicht eingegangen werden.

Infolge der den Zahlen A_m und π_m anhaftenden Unsicherheiten ist die Aufgabe, aus ihnen auf die Konstitution des Sternsystems zu schließen, eine nicht genügend bestimmte, denn es hat sich, wie ich öfters betont habe, herausgestellt, daß verhältnismäßig geringe Änderungen in den genannten Daten zu sehr merklich verschiedenen Funktionswerten Δ und φ führen. Nun sind sicherlich die Parallaxenwerte π_m, vielleicht mit Ausnahme der für kleine m, bisher nicht so sicher bestimmt, daß man nicht sehr beträchtliche Korrekturen für möglich halten dürfte und was die A_m betrifft, so wissen wir über ihren Verlauf für $m > 10$ eigentlich sehr wenig und gerade hier ist eine Beschränkung der genannten Vieldeutigkeit zu wünschen. Die letztere Lücke wird voraussichtlich in nicht zu ferner Zeit wenn auch nicht ausgefüllt, so doch verkleinert werden können und dann werden manche Ansätze, die jetzt noch als zulässig angesehen werden müssen, als unzutreffend erkannt werden. In jedem Falle erscheint es als ein nützliches Unternehmen, die verschiedenen Möglichkeiten durchzurechnen, weil man nur so auf die Punkte aufmerksam werden kann, die auf die definitive Lösung des großen Problems, soweit man von einer solchen überhaupt sprechen kann, von wesentlichem Einfluß sein können.

Ich werde nun zuerst die Annahme $H = \infty$ weiter verfolgen. Aus den in (III) angeführten Hauptformeln folgt, wenn von einer Absorption abgesehen wird:

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -c \cdot \int_0^{r_1} \Delta(\varrho)\, \varrho^4 \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho = -c J_4$$

$$\pi''_m = 0''\!.2 \frac{\int_0^{r_1} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^3 \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}{\int_0^{r_1} \Delta(\varrho)\, \varrho^4 \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho} = 0''\!.2 \cdot \frac{J_3}{J_4}.$$

Für φ soll der in (III) benutzte Exponentialansatz zur Anwendung kommen, für $\Delta(\varrho)$ die zweigliedrige Formel, welche Herr Schwarzschild benutzt hat, und die in der

Tat, sobald man $H = \infty$ annimmt, formale Vorteile darbietet. Es werde demnach gesetzt:

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot e^{a \log i - b (\log i)^2}; \quad \Delta(\varrho) = \gamma \cdot e^{\alpha \log \varrho - \beta (\log \varrho)^2}$$

wobei natürliche Logarithmen gemeint sind. Das Integral

$$J_\mu = \int_0^{r_1} \Delta(\varrho)\, \varrho_\mu\, \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varphi$$

kann dann, nach einer ganz ähnlichen Rechnung wie in (III), S. 438, als Krampsches Integral dargestellt werden. Man führe ein:

$$p = \frac{0.4}{0.4343}; \quad P = \beta + 4b; \quad q = 4 + \alpha + 2a \ldots \tag{1}$$

$$R = -apm - bp^2m^2 + \frac{(q + \mu - 3 + 4bpm)^2}{4P}$$

$$S = \sqrt{P}\left[\log r_1 - \frac{q + \mu - 3 + 4bpm}{2P}\right],$$

dann wird:

$$J_\mu = \frac{\gamma\, \Gamma}{\sqrt{P}} \cdot e^R \int_{-\infty}^{S} e^{-y^2}\, dy.$$

Setzt man noch

$$\sigma = \sqrt{P} \log r_1 - \frac{q}{2\sqrt{P}}$$

und beachtet, daß $d h_m = -p e^{-pm}\, dm$, so wird:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dA_m}{dm} &= \frac{\gamma c \Gamma'}{\sqrt{P}}\, e^{mp\left[\frac{2b}{P}(q+1) - 1 - a\right] - \frac{\beta b p^2}{P} m^2} \cdot \int_{-\infty}^{\sigma - \frac{1}{2\sqrt{P}} - \frac{2bp}{\sqrt{P}} m} e^{-y^2}\, dy \\
\pi''_m \cdot \int_{-\infty}^{\sigma - \frac{1}{2\sqrt{P}} - \frac{2bp}{\sqrt{P}} m} e^{-y^2}\, dy &= 0''\!.2\, e^{-\left(\frac{1+2q}{4P}\right)} \cdot e^{-\frac{2mpb}{P}} \int_{-\infty}^{\sigma - \frac{2bp}{\sqrt{P}} m} e^{-y^2}\, dy
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

wo $\Gamma' = \Gamma \cdot p \cdot e^{\frac{(q+1)^2}{4P}}$.

Für das Folgende ist die Bemerkung von Wichtigkeit, daß sich solche Krampsche Integrale innerhalb gewisser Grenzen mit beschränkter Genauigkeit, d. h. bis auf wenige Einheiten der 3. Dezimale, durch sehr einfache Interpolationsformeln darstellen lassen. So kann man den gewöhnlichen Logarithmus von

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\xi}^{\infty} e^{-y^2}\, dy,$$

wenn ξ zwischen ± 0.8 liegt, ersetzen durch

$$\log \Phi(\xi) = +\, 0.5062\, \xi - 0.2736\, \xi^2,$$

wie aus der Tabelle folgt:

	log $\Phi(\xi)$ Formel	Strenge	Diff.
$\xi = +1.0$	0.233	0.265	(− 32)
+ 0.8	0.230	0.241	− 11
+ 0.6	0.205	0.205	0
+ 0.4	0.159	0.155	+ 4
+ 0.2	0.090	0.087	+ 3
0	0	0	+ 0
− 0.2	− 0.112	0.109	− 3
− 0.4	− 0.246	− 0.243	− 3
− 0.6	− 0.402	− 0.402	0
− 0.8	− 0.580	− 0.589	+ 9
− 1.0	− 0.780	− 0.803	(+ 23)

In ähnlicher Weise kann man den gewöhnlichen Logarithmus von

$$\Psi(\xi) = e^{\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

zwischen den Grenzen $\xi = 3.0$ und $\xi = 7.0$, wenn es auf einige Einheiten der 3. Stelle nicht ankommt, ersetzen durch

$$\log \Psi(\xi) = -\, 1.0086 - 0.0855\,(\xi - 5.0) + 0.0082\,(\xi - 5.0)^2,$$

wie folgende Tabelle zeigt:

	$\log \Psi(\xi)$ Formel	Strenge	Diff.
$\xi = 2.0$	9.322—10	9.355	(— 33)
2.5	9.252	9.271	(— 19)
3.0	9.196	9.200	— 4
3.5	9.138	9.138	0
4.0	9.085	9.084	+ 1
4.5	9.036	9.036	0
5.0	8.991	8.992	— 1
5.5	8.951	8.952	— 1
6.0	8.914	8.915	— 1
6.5	8.882	8.881	+ 1
7.0	8.853	8.849	+ 4

Noch sei bemerkt, daß, wenn etwa

$$\frac{d A_m}{d m} = e^{\alpha_0 + \alpha_1 m \alpha_2 m^2}$$

sein sollte, man erhält:

$$A_m = \int\limits_{-\infty}^{m} \frac{d A_m}{d m}\, d m = \frac{e^{\alpha_0 + p_1^2}}{\sqrt{\alpha_2}} \int\limits_{p_1 - m\gamma}^{\infty} e^{-y^2}\, d y \tag{2}$$

$$= \frac{e^{\alpha_0}}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot e^{p_1^2 - (p_1 - m\gamma)^2}\, \Psi(p_1 - m\gamma)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}; \qquad \sqrt{\alpha_2} = \gamma.$$

Wenn demnach die obere Grenze des Integrals in der ersten Formel (I) und die Größe $p_1 - m\gamma$ die oben angegebenen Grenzen nicht überschreiten, wird sowohl $\log\left(\frac{d A_m}{d m}\right)$ als auch $\log A_m$ durch eine quadratische Form in m näherungsweise dargestellt werden können. Was das schematische Sternsystem betrifft, so kann man in der Tat den eben bezeichneten Ausgangspunkt der Untersuchung wählen. Man muß aber doch die durch Abzählungen direkt gewonnenen Werte von $\log A_m$

zur Vergleichung heranziehen und nicht nach irgendwelchen Prinzipien gewonnene Ausgleichungsresultate. Man wird weiter, wie öfters betont worden ist, eine ziemlich nahe Darstellung der empirischen Werte $\log A_m$ fordern müssen, weil schon kleinere systematische Abweichungen sehr vergrößert in dem Verlauf von φ und Δ hervortreten. Die von mir für etwa $m < 10$ mit einiger Sorgfalt ermittelten Zahlen $\log A_m$ dürften schwerlich mehr als um 10 bis 20 Einheiten der 3. Dezimalstelle unrichtig sein, was von anderen Ermittlungen kaum gesagt werden kann. Ich werde demnach diese von mir erhaltenen Daten, die auch in (III) benutzt sind, zur Vergleichung heranziehen.

Herr Schwarzschild hat für den brigg. Logarithmus von $\frac{dA_m}{dm}$ angesetzt:

$$\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right) = 0.596 + 0.5612\,m - 0.0055\,m^2.$$

Wenn man mit dieser Formel das Integral (2) strenge berechnet, so erhält man die Werte R_1 in der folgenden Zusammenstellung, während unter B die von mir ermittelten $\log A_m$ stehen.

m	B	R_1	R_2	R_1-B	R_2-B
1.5	1.312	1.294	1.138	− 18	− 174
2.5	1.827	1.860	1.711	+ 33	− 116
3.5	2.326	2.405	2.274	+ 79	− 52
4.5	2.831	2.933	2.823	+ 102	− 8
5.5	3.368	3.446	3.362	+ 78	− 6
6.5	3.882	3.950	3.888	+ 68	+ 6
7.5	4.394	4.444	4,403	+ 50	+ 9
8.5	4.908	4.927	4.906	+ 19	− 2
9.5	5.422	5.400	5.397	− 22	− 25
10.5	—	5.861	5.874	—	—
11.16	6.222	6.157	6.181	− 65	− 41
11.5	—	6.311	6.390	—	—
12.5	—	6.749	6.794	—	—
13.54	—	7.178	7.237	—	—
13.90	7.433	7.345	7.409	− 88	− 24
14.5	—	7.597	7.668	—	—

Man sieht aus den Differenzen $R_1 - B$, daß die Übereinstimmung keineswegs genügend ist an den Stellen, wo die Zahlen B verhältnismäßig sicher bestimmt sind. Aber sie kann sehr leicht innerhalb erträgliche Grenzen gebracht werden. Ohne hier eine besonders akzeptable Darstellung erreichen zu wollen, habe ich durch wenige Versuche die Koeffizienten in $\log\left(\frac{d A_m}{d m}\right)$ verbessert und schließlich mit den Werten

$$\alpha_1 = 1.3573; \quad \alpha_2 = 0.01404, \ \log e^{\alpha_0} = 0.211 \qquad (2_a)$$

die Werte R_2 strenge berechnet, die sich den besser bestimmten B bei $m = 4.5$ bis 9.5 genügend anschließen. Die starken Abweichungen bei den sehr hellen Sternen sind nicht sehr verschieden von denen, welche in (III) gefunden worden sind. Bei der geringen Anzahl der ganz hellen Sterne sind sie um so weniger auffallend, als sie sich sehr bedeutend verringern, wenn die Abzählungen nicht nach der Harvard-Photometrie, sondern nach der Potsdamer Durchmusterung gemacht werden. Man könnte sie also eventuell einer Inhomogenität der Harvard-Skala zur Last legen.

Setzt man $r_1 = \infty$, so kann man nach (I) mit den gefundenen Koeffizienten α_1 und α_2, falls π_m bekannt ist, die Koeffizienten α, β, a und b leicht bestimmen, da die Kapteynschen mittleren Parallaxen gemäß der Formel

$$\log \pi_m = \log \pi_0 - \nu \cdot m$$

verlaufen. Es sollen, wie in (III) geschehen, nach A. N. Nr. 3487 die Werte $\pi_0 = 0''106$ und $\nu = 0.1505$ zu Grunde gelegt werden. Die Rechnung ist sehr einfach, da nun die 2. Formel (I) wirklich dieselbe Gestalt hat wie die Kapteynsche Parallaxenformel.

Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma_1 \cdot e^{-2.1162\,(\log\text{nat}\, i) - 0.06671\,(\log\text{nat}\, i)^2} \\ \log \Delta(\varrho) &= \gamma_2 + 0.1826 \log \varrho - 0.2022\,(\log \varrho)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ich habe in (III) für ein endliches Sternsystem, dessen $r_1 = 900$ Siriusweiten beträgt, gefunden, mit Weglassung konstanter Faktoren und eines zweiten Gliedes:

$$\varphi(i) = e^{-1.993\,(\log \operatorname{nat} i) - 0.0434\,(\log \operatorname{nat} i)^2}$$
$$\Delta(\varrho) = \varrho^{-0.49}\{1 - [9.7600]\,\varrho^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Die nach diesen Formeln berechneten log $\Delta(\varrho)$ sind in der folgenden kurzen Übersicht unter (III), die nach Formel (3) berechneten unter gleicher Ziffer aufgeführt. Da sich die Vergleichung nur auf den Gang der Funktionswerte beziehen soll, ist den Zahlen (3) die Konstante $+ 0.58$ hinzugefügt worden.

ϱ	(3)	(III)	(IV)
2	0.62	0.79	0.60
10	0.56	0.58	0.49
50	0.31	0.29	0.32
100	0.14	0.16	0.23
200	9.93 − 10	0.01	0.14
500	9.60	9.83	9.99
900	9.36	9.72	9.91

(4)

Trotz der Verschiedenheit der Werte (3) und (III) ist doch zu konstatieren, daß der Verlauf der Zahlen große Ähnlichkeit zeigt.

Ich werde nun den oben ausgesprochenen Satz beweisen, daß man ganze Serien von mehr oder weniger zufriedenstellenden Darstellungen der A_m und π_m dadurch erhält, daß man die oben dargelegten Eigenschaften der Funktionen Φ und Ψ benutzt und zugleich das Sternsystem begrenzt ansieht, d. h. dem r_1 endliche Werte zuerteilt. Ich nehme zuerst $r_1 = 911$, also den in (III) erhaltenen Resultaten gemäß. Ich habe dann, ohne darauf zu achten, eine besonders gute Darstellung zu erhalten, nach wenigen Versuchen $\beta = 0.0200$ und $\log b = 8.4875—10$ gewählt. Dann findet sich $\log P = 9.1551—10$, $\sigma = 2.9969$ undeine sehr einfache Rechnung ergibt die mittleren Parållaxen π_m, denen die Kapteynschen Werte K im Sinne der vorhin gemachten Angaben gegenübergestellt sind.

m	π	K
0	0″1070	0.1060
2	0.0493	0.0530
4	0.0233	0.0265
6	0.0114	0.0132
8	0.0059	0.0066
10	0.0033	0.0033

Das ist sicher eine mehr als genügende Übereinstimmung. Eine von der früher gewonnenen Darstellung des $\log A_m$ wenig verschiedene erreicht man, wenn man annimmt:

$$x = p \log e \left[\frac{2b}{P}(q+1) - 1 - a\right] = 0.5578; \qquad a = -2.1016.$$

Mit diesen Zahlen ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma \cdot e^{-2.1016 \log \mathrm{nat}\, i - 0.03073 (\log \mathrm{nat}\, i)^2} \\ \log \Delta(\varrho) &= +0.65 - 0.1156 \log \varrho - 0.0461 (\log \varrho)^2 . \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

Hier ist wieder $+0.65$ zur besseren Vergleichung willkürlich hinzugefügt worden. Die Werte $\log \Delta(\varrho)$ sind in die Zusammenstellung (4) unter (IV) aufgenommen worden. Nach Formel (I) ergeben sich weiter für $\log \left(\frac{dA_m}{dm}\right)$ die Werte (IV):

m	IV	(2_a)	Diff.
0	0.297	0.211	+ 86
2	1.398	1.366	+ 32
4	2.480	2.472	+ 8
6	3.527	3.529	− 2
8	4.537	4.537	0
10	5.498	5.496	+ 2
12	6.402	6.407	− 5
14	7.240	7.269	− 29

Die Zahlen (2_a) sind nach der Formel (2_a) berechnet und man sieht, daß im großen und ganzen eine annehmbare Übereinstimmung erzielt ist mit Ausschluß der ganz hellen Sterne.

Umgekehrt kann man bei Benutzung der gegebenen Näherungsformeln für Φ und Ψ und mit Berücksichtigung des Gebietes ihrer Gültigkeit leicht beliebig viele Darstellungen der $\log A_m$ und π_m gewinnen, wenn man z. B. β willkürlich wählt und danach r_1. Nimmt man z. B. $\beta = 0$, so ist eine genügende Darstellung zu erwarten für $\log b = 8.4200$, $\sigma = 2.7400$. Die Darstellung der Parallaxen erfordert etwa: $\frac{1+2q}{16b} \log e = 0.1920$ und wenn weiter $a = -2.1186$, so findet man folgende Gegenüberstellung, in welcher $\varDelta$ die Differenzen der $\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right)$ gegen die mit (2_a) berechneten sind.

m	π_m	K	$\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right)$	$\varDelta$
0	0″135	0″106	0.288	+ 77
2	0.0556	0.0550	1.394	+ 28
4	0.0254	0.0265	2.477	+ 5
6	0.0121	0.0132	3.528	− 1
8	0.0063	0.0066	4.537	0
10	0.0037	0.0033	5.498	+ 2
12			6.403	− 4
14			7.246	− 23

Hier ist also, da $\alpha = -0.1698$ wird:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma \cdot e^{-2.1186\,(\log \mathrm{nat}\, i) - 0.0263\,(\log \mathrm{nat}\, i)^2} \\ \log \varDelta(\varrho) &= i - 0.1698 \log \varrho . \end{aligned}\right\}$$

Auf diese Weise kann man eigentlich unendlich viele angängige Lösungen finden und zwar sind die Ansätze leicht zu beschaffen, indem man die Gültigkeitsgrenzen der Näherungsformeln für die Funktionen Φ und Ψ möglichst einzuhalten trachtet. Die Aufstellung der nötigen Gleichungen ist so einfach, daß nicht näher darauf einzugehen nötig ist. Ich möchte nur noch ein besonders auffallendes Beispiel erwähnen. Macht man nämlich die Annahme $\alpha = \beta = 0$, nimmt also eine gleichförmige Dichtigkeit und wählt weiter $\log b = 8.4195$, $\sigma = 2.3393$, schließlich $\frac{1+2q}{16b} \log e = 0.3290$, so erhält man folgende Zahlen:

m	π''	K	$\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right)$	$(2a)$	Diff.
0	0″1080	0″106	0.224	0.211	+ 13
2	0.0492	0.0536	1.366	1.366	0
4	0.0242	0.0265	2.472	2.472	0
6	0.0130	0.0132	3.533	3.529	+ 4
8	0.0078	0.0066	4.543	4.537	+ 6
10	0.0051	0.0033	5.496	5.496	0
12			6.387	5.407	− 20
14			7.214	7.269	− 55

Aus den benutzten Zahlen folgt $a = -2.1704$ und $r_1 = 269$. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma\, e^{-2.1704\,(\log\text{nat}\, i) - 0.0263\,(\log\text{nat}\, i)^2} \\ \Delta(\varrho) &= \text{Konst.} \end{aligned}\right\}$$

Die Sternanzahlen A_m werden offenbar bei $m = 12$ genügend dargestellt und gleiches gilt von den Parallaxen bis etwa $m = 7$.

Man sieht also, daß in der Tat die Annahme $H = \infty$ das Problem, aus den Zahlen A_m und π_m die räumliche Verteilung der Sterne und die Häufigkeitsfunktion φ zu bestimmen, praktisch zu einem unendlich vieldeutigen macht. Die φ zeigen, wenn man die Begrenzung des Sternsystems r_1 von etwa $r_1 = 270$ bis ∞ wählt, große Ähnlichkeit in ihrem Verlaufe. Die räumliche Dichtigkeit aber verändert sich sehr stark und im allgemeinen so, daß die Abnahme mit zunehmender Entfernung um so geringer ist, je kleiner r_1 angenommen wird. Wenn auch die Differenzen zwischen den empirisch festgestellten Werten von A_m und π_m und den berechneten für die einzelnen Annahmen verschiedenen Charakter zeigen, so läßt sich doch nicht mit Sicherheit eine Entscheidung zu Gunsten einer der unendlich vielen Annahmen treffen. Es muß erst die Aufstellung genügend sicherer Werte A_m und vielleicht auch von π_m für schwache und sehr schwache Sterne abgewartet werden, so daß das Gebiet der Gültigkeit der quadratischen Näherungsformeln für die Funktionen Φ und Ψ weit überschrittten wird.

Andrerseits gestalten sich die Konsequenzen der Annahme eines endlichen H sehr viel einfacher und sicherer. Da die Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion $\Delta(\varrho)$ etwa für $m < 10$ nur in geringem Maße abhängt von φ, ist sie mit einiger Sicherheit zu bestimmen und dann ergibt sich von selbst nicht nur die Endlichkeit der Ausdehnung des Sternsystems sondern auch eine Bestimmung von r_1. Wichtig ist hiebei natürlich auch die Feststellung von A_m für $m > 10$, die bisher erst in ganz rohen Anfängen vorliegt.

Indessen muß auf einen Umstand Rücksicht genommen werden, auf den ich schon früher ((III), S. 420) aufmerksam gemacht habe.

Das schematische Sternsystem rechnet mit Mittelwerten, die zum Teil keine einwandfreie Bedeutung haben. Namentlich dann, wenn das Sternsystem endlich und die Flächen gleicher Dichtigkeit weit von der Kugelform abweichen, kommt dem schematischen Sternsystem gar keine Realität zu. Will man sich also der Betrachtung der tatsächlichen Verhältnisse zuwenden, so bleibt nichts übrig als das „typische Sternsystem" in Betracht zu ziehen. Wie ich neulich[1]) andeuten konnte, treten dann gewisse Unterschiede zutage, welche möglicherweise eine Entscheidung über die Zulässigkeit der einen oder anderen Annahme und somit eventuell über den relativen Wert der verschiedenen Systeme, durch welche man jetzt in formeller Weise die vorhandenen Werte A_m und π_m darstellen kann, bringen können. Ich wende mich deshalb zu einer Betrachtung des typischen Sternsystems und zwar werde ich zuerst die von Herrn Schwarzschild gemachten Annahmen $H = \infty$, $r_1 = \infty$ verfolgen.

2.

Ich bemerke, daß die von mir gemachten Feststellungen der Zahlen A_m sich auf einzelne Milchstraßenzonen beziehen. Der ganze Himmel wurde in Zonen I bis IX geteilt, welche der Reihe nach die galaktische Nordpolardistanz 0^0 bis 20^0, 20^0-40^0 etc. bis 160^0-180^0 enthalten. Um bessere Mittelwerte zu bekommen und der Definition des typischen Sternsystems zu entsprechen, wurde I und IX zur Zone A, II und VIII zur Zone B, u. s. f. vereinigt, so daß E diejenige Zone ist, welche die Milchstraße enthält. Die Ermittlung der Logarithmen der Anzahlen der Sterne von den hellsten bis zu denen von der Größe m, welche auf einem Quadrat stehen und die jetzt mit A_m bezeichnet werden mögen, hat bekanntlich Schwierigkeiten. Über ihre Ermittlung bis $m = 9.2$ berichte

[1]) Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

ich in Art. 4. Für schwächere Sterne liegt meiner Meinung nach ein genügend einwandfreies Material nicht vor und ich habe deshalb nur die Resultate aus den Herschelschen Sterneichungen benutzt für $m = 13.9$. Da meine Ermittlungen nur dann ein einigermaßen homogenes System bilden, wenn der nördliche Teil des Himmels allein in Betracht gezogen wird, ist es mehr als zweifelhaft, ob es richtig ist, hier die von J. Herschel am Kap allerdings mit großer Umsicht und nach festem Plane gemachten Zählungen allein zu verwerten. Ein Zweifel entsteht freilich nur für die Milchstraßenzone E, da hier die Zählungen von W. und J. Herschel beträchtlich abweichen. Ich werde indessen hier J. Herschel allein benutzen, um mit den Herren Kapteyn und Schwarzschild in Übereinstimmung zu bleiben.

In der folgenden Zusammenstellung folgen auf die Rubrik m, die aus den Abzählungen folgenden $\log A_m$, dann unter f der $\log A_m$ nach einer quadratischen Interpolationsformel, schließlich die Differenz beider Werte.

	A			*B*		
m		f			f	
3.5	7.565—10	7.551	— 14	7.598	7.594	— 4
4.5	7.890	8.108	+ 218	8.173	8.128	— 45
5.5	8.620	8.639	+ 19	8.647	8.642	— 5
6.5	9.156	9.143	— 13	9.137	9.137	0
7.5	9.646	9.620	— 26	9.599	9.613	+ 14
9.2	0.347	0.370	+ 23	0.383	0.378	— 5
13.9	2.045	2.043	— 2	2.208	2.205	— 3

C			*D*			*E*		
	f			f			f	
7.719	7.569	— 150	7.623	7.615	— 8	7.839	7.783	— 56
8.191	8.133	— 58	8.255	8.208	— 47	8.308	8.346	+ 38
8.692	8.676	— 16	8.794	8.781	— 13	8.900	8.899	— 1
9.190	9.199	+ 9	9.318	9.333	+ 15	9.429	9.441	+ 12
9.676	9.701	+ 25	9.851	9.864	+ 13	9.965	9.974	+ 9
0.524	0.507	— 17	0.737	0.721	— 16	0.872	0.855	— 17
2.426	2.428	+ 2	2.777	2.780	+ 3	3.133	3.139	+ 6

Die Interpolationsformeln, nach denen die Zahlen f_m gerechnet wurden, sind aus den fünf letzten Werten für $m = 5.5$ bis 13.9 nach der Methode der kl. Q. gerechnet, um gleichmäßig vorzugehen, da die Zahlen für kleinere m offenbar viel unsicherer sind. (Die Zahl bei C, 6.5 wurde nachträglich korrigiert, so daß für C eine etwas bessere Darstellung möglich wurde.) Die Formeln lauten:

$$\left.\begin{array}{lrl}
\text{A)} & \log A_m & = -4.610 + 0.6640\, m - 0.01334\, m^2 \\
\text{B)} & & = -4.423 + 0.6099\, m - 0.00957\, m^2 \\
\text{C)} & & = -4.565 + 0.6457\, m - 0.01025\, m^2 \\
\text{D)} & & = -4.623 + 0.6753\, m - 0.01027\, m^2 \\
\text{E)} & & = -4.270 + 0.6041\, m - 0.00512\, m^2
\end{array}\right\}$$

Log A_m hat also die Form: $C + a_1 m - a_2 m^2$. Macht man andrerseits den Ansatz:

$$\frac{dA}{dm} = \gamma\, e^{\alpha_1 m - \alpha_2 m^2},$$

so folgt durch Integration nach (2):

$$A_m = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha_2}}\, e^{p_1^2 - (p_1 - m\gamma)^2} \cdot \Psi(p_1 - m\gamma).$$

Bewegt man sich innerhalb des Geltungsbereichs der Näherungsformel für Ψ, so findet sich nun:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.4261\, \alpha_1 + 0.1675 \sqrt{\alpha_2} \\
a_2 &= 0.4261\, \alpha_2
\end{aligned}$$

und hierauf durch Auflösung:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= [0.3705]\, a - [9.7798{-}10] \sqrt{\alpha_2} \\
\alpha_2 &= [0.3705]\, a_2 .
\end{aligned}$$

Die Anwendung der Näherungsformel wird wohl nur für $m > 10$ einige Ungenauigkeit verursachen.

Um indessen hiervon unabhängig zu sein, wird man die erhaltenen Werte von α_1 und α_2 nur als Näherungswerte betrachten. Diese sind so nahe richtig, daß eine Korrektion fast augenblicklich erhalten werden kann. Man hat nämlich durch Differentiation der Formel

$$\log A_m = C + a_1 - m\, a_2\, m^2$$

$$\log \frac{d A_m}{d m} = (C + a_1 m - a_2 m^2) + \log (a_1 - 2\, a_2\, m) - \log \log e.$$

In der obigen Zusammenstellung ist

$$C + a_1 m - a_2 m^2 = f$$

als bereits berechnet angegeben. Man hat also

$$\log \frac{d A}{d m} = f + \log (a_1 - 2\, a_2\, m) - \log \log e.$$

Andrerseits hat man:

$$\log \frac{d A_m}{d m} = (a_1 m - a_2 m^2) \log e + \log \gamma.$$

Bedeutet also C eine für jede Zone konstante Größe, so muß sein:

$$(a_1 m - a_2 m^2) \log e + C = f + \log (a_1 - 2\, a_2 m).$$

Diese Gleichung läßt sich nun für alle Zonen und alle m, die in obiger Tabelle vorkommen, bis auf ganz wenige Einheiten in der 3. Stelle erfüllen, wenn man die Näherungswerte ein wenig korrigiert. So sind die Zahlen entstanden:

	a_1	a_2
A	1.5097	0.03315
B	1.3725	0.02271
C	1.4441	0.02378
D	1.5237	0.02425
E	1.3731	0.01207

die also den Interpolationsformeln für $\log A_m$ vollständig äquivalent sind.

Der Gang in diesen Zahlen von Zone zu Zone ist nicht so regelmäßig als wünschenswert wäre. Es ist das eine Folge der Ungenauigkeit in den angenommenen Zahlen $\log A_m'$ und insbesondere der Daten für $m = 13.9$, vielleicht auch eine Folge der quadratischen Form für die Interpolationsformel.

Da aber bessere Daten nicht zu beschaffen sind, wenn man die von J. Herschel gegebenen Abzählungen allein beibehalten will, so bleibt nichts übrig als die offenkundigen Unregelmäßigkeiten nicht weiter zu beachten und für jede Zone die mittleren Parallaxen π_m nach Formel (I) zu berechnen. Für jede Zone hat man:

$$\left.\begin{aligned} p\left[\frac{2b}{P}(q+1)-1-a\right] &= a_1 \\ \beta\frac{bp^2}{P} &= a_2 \\ P &= 4b+\beta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Man kann also nur zwei der unbekannten vier Konstanten α, β, a, b berechnen, da die π_m für die einzelnen Milchstraßenzonen bisher nicht abgeleitet worden sind. Die bekannten π_m beziehen sich auf gewisse mittlere Verhältnisse, die man aber nicht näher definieren kann. Indessen wird man vielleicht der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man annimmt, daß die π_m den Mittelwerten aller Sterne der m .Größe entsprechen. Danach wird also π_m erhalten. wenn man die für die einzelnen Zonen A, B, ..., E geltenden π_m mit Rücksicht auf die Anzahl der Sterne in jeder Zone in Mittel vereinigt. Gegeben sind dann die $\log A_m$ für alle fünf Zonen und die eben beschriebenen Mittelwerte π_m für verschiedene m. Das sind zwölf Gleichungen zwischen den zehn Unbekannten α, β und den zwei Unbekannten a, b. Denn es soll angenommen werden, daß dieselbe Häufigkeitsfunktion für alle Zonen, d. h. unabhängig von der galaktischen Breite Geltung behalte. In wieweit man hierzu berechtigt ist, habe ich an andrem Orte[1]) auseinandergesetzt. Hier sei nur bemerkt, daß, falls man diese Annahme nicht machen würde, nicht einzusehen ist, warum φ nicht die Entfernung ϱ explizite enthalten sollte, was doch die Grundlage der ganzen Theorie ist. Ein wirklich konsequentes System muß, meiner Meinung nach, wenigstens vorerst mit der Unabhängigkeit von $\varphi(i)$ von ϱ rechnen.

[1]) Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

Wird nun a und b zuerst als bekannt angesehen, so folgt aus (5)

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{b}{P}p &= \frac{p}{2}\left(1-\frac{a_2}{b\,p^2}\right) \\ (q+1)\frac{p}{2}\left(1-\frac{a_2}{b\,p^2}\right)-p(1+\alpha) &= a_1 . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Nach (I) ist weiter, da $r_1 = \infty$ sein soll:

$$\log\left(\frac{\pi_m}{0''2}\right) = -\frac{1+2q}{4P}\log e - \frac{2bp}{P}m\log e .$$

Man hätte nun den Mittelwert $M(\pi_m)$ der Parallaxe der Sterne von der Größe m als gegeben zu verwerten, was nur durch sukzessive Annäherungen erreicht werden kann. Indessen wird man brauchbare Näherungswerte erhalten, wie durch die folgende Rechnung bestätigt wird, wenn man statt $\log M(\pi_m)$, $M(\log\pi_m)$ nimmt, was einigermaßen gerechtfertigt erscheint dadurch, daß die einzelnen π_m nicht allzusehr verschieden sind. Danach erscheinen als bekannt die Mittelwerte:

$$\mathfrak{B}_1 = M\left(\frac{1+2q}{4P}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A}_1 = M\left(\frac{2bp}{P}\right).$$

Es ist also:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{p}{2} - \frac{1}{2bp}M(a_2), \qquad \text{d. h.:} \qquad b = \frac{M(a_2)}{p(p-2\mathfrak{A}_1)}. \qquad (7)$$

Die erste Gleichung (5) gibt weiter:

$$(1+\alpha) = 4b\,\mathfrak{B}_1 + \frac{1}{2p}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{p}M(a_1). \qquad (8)$$

Die beiden Formeln (7) und (8) bestimmen auf diese Weise die Unbekannten α und b. Umgekehrt ergibt sich für jede Zone aus den bekannten Werten von α und b, α und β:

$$\frac{2b}{P}p = \frac{p}{2}\left(1-\frac{a_2}{b\,p^2}\right) = X;$$

$$P = \frac{2bp}{X}; \qquad 1+2q = \frac{2}{X}\left[p(1+\alpha)+a_1\right]-1 .$$

Was die Mittelbildung betrifft, so wird man jedenfalls genügend genau setzen dürfen:

$$M(\pi) = \frac{\Sigma \pi_z \cdot f_z}{\Sigma f_z}. \tag{9}$$

π_z ist der mittlere Wert der Parallaxen der Sterne von der Größe m in einer der Zonen $A, B, \ldots, E$ und f_z ist proportional der Anzahl der Sterne dieser Größe in derselben Zone, also $A_{m+\frac{1}{2}} - A_{m-\frac{1}{2}}$. Ich habe diese Faktoren f_z nach den obigen Interpolationsformeln für A_m beiläufig abgeleitet. Es ergab sich:

m	A	B	C	D	E	Summe
3.0	0.053	0.163	0.190	0.338	0.256	1.000
4.0	0.050	0.148	0.198	0.352	0.251	0.999
5.0	0.047	0.134	0.203	0.365	0.251	1.000
6.0	0.043	0.121	0.205	0.377	0.255	1.001
7.0	0.039	0.108	0.204	0.386	0.264	1.001
8,0	0.034	0.097	0.199	0.392	0.279	1.001
9.0	0.029	0.085	0.191	0.396	0.299	1.000
10.0	0.024	0.076	0.179	0.396	0.325	1.000
Mittel	0.040	0.117	0.196	0.375	0.273	1.001

Die Faktoren f_z sind also sowohl von der Zone als auch von m abhängig. Aber weil die Veränderlichkeit mit der Größe nur mäßig ist, wird man das oben erwähnte Verfahren angenähert zur Ausführung bringen, wenn man Mittelwerte der f_z für die einzelnen Zonen benutzt. Nun sind die mittleren Parallaxen π_m bisher nur bis etwa $m = 8$ abgeleitet worden. Ich habe demgemäß für die Mittelbildung (9) die Faktoren angesetzt:

	f_z
A	0.04
B	0.13
C	0.20
D	0.37
E	0.26

welche die einfachen Mittel der Werte für $m = 3.0$ bis 8.0 sind. Es ergab sich nun: $\log \mathfrak{A}_1 = 9.5397 - 10$; $\log \mathfrak{B}_1$

$= 9.8026-10$, $M(a_1) = 1.4483$, $M(a_2) = 0.02115$ und damit $\log b = 9.0029-10$, $a = -2.1288$. Es ist danach:

$$\varphi(i) = \gamma \cdot e^{-2.1288\,(\log \operatorname{nat} i) - 0.1007\,(\log \operatorname{nat} i)^2}.$$

Jetzt kann man für die einzelnen Zonen leicht berechnen:

	log X	log P	log $(1+2q)$
A	9.4498—10	9.8184—10	0.3686
B	9.5289	9.7393	9.9864—10
C	9,5215	9.7467	0.1565
D	9.5181	9.7501	0,2870
E	9.5970	9.6712	9.8367—10

Daraus folgt für die Logarithmen der mittleren Parallaxen:

A	$\log \pi_m = 8.9155-10$	$- m \times 0.1223$
B	9.1092	0.1468
C	9.0220	0.1444
D	8.9280	0.1432
E	9.1380	0.1717

und für die π_m ergibt sich folgende Tabelle (10):

$m = 3.0$		4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10,0
A	0ʺ0354	0ʺ0267	0ʺ0201	0ʺ0152	0ʺ0115	0ʺ0087	0ʺ0065	0ʺ0049
B	446	333	237	169	121	86	61	44
C	389	278	200	143	103	74	53	38
D	315	227	163	117	84	61	44	31
E	419	283	190	118	86	58	39	26
M	0ʺ0372	0ʺ0268	0ʺ0189	0ʺ0131	0ʺ0094	0ʺ0066	0ʺ0046	0ʺ0032
K	0.0375	0.0265	0.0187	0.0132	0.0094	0.0066	0.0047	0.0033

Die Mittelwerte M sind mit Benutzung aller einzelnen Faktoren f_z (S. 473) gebildet, K ist das Resultat der Kapteynschen Formel. Die Übereinstimmung von M und K ist vollkommen, so daß durch die ausgeführte Rechnung der gewünschte Erfolg ganz erzielt worden ist.

Ich habe oben darauf aufmerksam gemacht, daß die Herschelschen Eichungen, welche die A_m für $m = 13.9$ angeben, für die Milchstraße, d. i. für die Zone E ein zweifelhaftes Resultat ergeben, indem die Angaben von W. Herschel und J. Herschel hier beträchtlich voneinander abweichen. Um den Anschluß an andere Arbeiten zu erhalten, habe ich **nur** die Angaben von J. Herschel gelten lassen. Um den Einfluß dieser sicher nicht einwandfreien Annahme kennen zu lernen, habe ich nun, wie ich auch im nächsten Artikel tun werde, das Mittel bei den Angaben für Zone E als richtig betrachtet und damit die dem Früheren analoge Rechnung durchgeführt. In der Tabelle (S. 468) ist jetzt die Zahlenreihe für E zu ersetzen durch:

		f		C
$m = 3.5$	7.839 − 10	7.791	− 48	5.574
4.5	8.308	8.341	+ 33	72
5.5	8.900	8.888	− 12	73
6.5	9.429	9.430	+ 1	73
7.5	9.965	9.967	+ 2	72
9.2	0.872	0.871	− 1	72
13.9	3.306	3.305	− 1	73

f ist nach der Formel berechnet

$$\log A_m = -4.1705 + 0.5680\, m - 0.00217\, m^2.$$

Nach der S. 470 angegebenen Methode habe ich hierauf berechnet

$$\alpha_1 = 1.3039; \qquad \alpha_2 = 0.00511.$$

Der Wert der Konstanten C, welche die Genauigkeit der Koeffizienten α_1 und α_2 angibt, steht in der letzten kleinen Tabelle. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ haben dieselben Werte wie früher. Dagegen ist jetzt:

$$M(\alpha_1) = 1.4303; \qquad M(\alpha_2) = 0.01934$$

und es wird jetzt $\log b = 8.9641 - 10$; $a = -2.1309$; also:

$$\varphi(i) = e^{-2.1309\,(\log \operatorname{nat} i) - 0.0921\,(\log \operatorname{nat} i)^2}.$$

Die früher gegebenen Zahlen werden nunmehr in folgende geändert:

	$\log X$	$\log P$	$\log(1 + 2q)$
A	9.4231—10	9.8063—10	0.4036
B	9.5140	9.7154	0.0134
C	9.5054	9.7240	0.1798
D	9.5017	9.7277	0.3088
E	9.6338	9.5966	9.3387—10

A	$\log \pi_m = 8.8715-10$	$- m \times$	0.1151
B	9.0854		0.1419
C	8.9909		0.1391
D	8.8872		0.1379
E	9.2409		0.1869

Die Tabelle für die mittleren Parallaxen π_m wird:

$m =$	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
A	0\.″0336	0\.″0258	0\.″0198	0\.″0152	0\.″0116	0\.″0089	0\.″0069	0\.″0053
B	457	329	238	171	124	89	64	46
C	375	272	197	143	104	76	55	40
D	297	217	158	115	83	61	44	32
E	479	311	202	135	86	56	36	24
M	0\.″0387	0\.″0270	0\.″0190	0\.″0134	0\.″0094	0\.″0066	0\.″0046	0\.″0032
K	375	265	187	132	94	66	47	33

Es ergibt sich daraus, daß die veränderte Annahme für Zone E an dem charakteristischen Verlauf der π_m nichts Wesentliches geändert hat. Das Hin- und Herspringen der Werte ist unverändert geblieben und dafür ist, wie die angestellten Proben ergeben haben, nicht die Art der Rechnung verantwortlich zu machen. Das eine ist sicher, daß auch mit den benutzten Ansätzen sich das Resultat ergibt: bei den schwachen Sternen 9. und 10. Größe hat es keinen rechten Sinn, von mittleren Parallaxen zu reden, wenn man nicht angibt, auf welchen Teil des Himmels in seiner Lage zur Milchstraße sie sich beziehen, wie also diese Mittelwerte gemeint sind.

Was die unregelmäßigen Schwankungen der Einzelwerte betrifft, so zeigen sie sich schon bei der Beschaffung der zuerst berechneten Werte der Koeffizienten a_1, a_2, α_1 und α_2. Sie können erklärt werden durch die Ungenauigkeit der zu Grunde liegenden Daten und durch die angenommene Form der quadratischen Interpolationsformeln. Ich glaube, daß der letztere Umstand der ausschlaggebende ist und daß man also durch die Anwendung dieser Formen dem Gedanken oder dem Vorhaben, das ganze Sternsystem als ein organisches Ganze aufzufassen, nicht ganz entsprochen hat. Wenn also die gefundenen mittleren Parallaxen auch nur geringen Wert haben, so haben sie doch

Verhältnisse aufgedeckt, welche nicht zu Gunsten der hierbei verfolgten Annahmen sprechen. Die Tabelle (10) zeigt quantitativ ein völlig anderes Bild für die Abhängigkeit der mittleren Parallaxen π_m von der galaktischen Breite, als die Konsequenzen aus den Annahmen, die ich in (III) verfolgt habe. Darüber habe ich vor kurzem an anderer Stelle[1]) berichtet. Aber immerhin zeigt die obige Tabelle für Sterne, deren m größer als etwa 7.0 ist, ebenfalls die Tatsache, daß π_m mit der Annäherung an die Milchstraße deutlich abnimmt. Für die helleren Sterne wird diese Erscheinung völlig durch die unregelmäßigen Schwankungen der Einzelwerte verdeckt. Die Abhängigkeit der π_m von der galaktischen Breite ist jedenfalls viel weniger ausgesprochen wie in den Astronomischen Nachrichten gefunden wurde, zum Teil kaum angedeutet. Ich habe a. a. O. bereits darauf aufmerksam gemacht. Bei der Unsicherheit der zu Grunde gelegten Annahmen und Ansätze, welche sich allen systematischen Zusammenhängen mitteilt, hat eine weitere Verfolgung der gefundenen Zahlenresultate keinen rechten Sinn. Ich begnüge mich deshalb anzuführen, daß die Kurven gleicher Dichtigkeit wegen des Hin- und Herspringens der Einzelwerte $\Delta(\varrho)$ kaum feststellbar sind. Die Eigenschaft aber, daß $\Delta(\varrho)$ um so langsamer abnimmt, je mehr man sich der Milchstraße nähert, kommt trotz aller Schwankungen deutlich zum Vorschein. Drückt man ϱ, wie immer, in Siriusweiten aus, so ist z. B.

$$\log\frac{\Delta(1000)}{\Delta(1)} = -2.51,\quad -2.31,\quad -1.45,\quad -1.16,\quad -1.07$$

$$\log\frac{\Delta(316)}{\Delta(3.16)} = -1.68,\quad -1.53,\quad -0{,}97,\quad -0.78,\quad -0.72$$

der Reihe nach für die Zonen A, B, C, D und E.

[1]) Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

3.

Ich werde nun analoge Rechnungen für ein endliches H durchführen und zwar mit ähnlichen Ansätzen, wie in (III) benutzt worden sind. Nennt man $\Phi(i, \varrho)$ die Häufigkeitsfurche der Leuchtkräfte, die also auch die Entfernung ϱ explizite enthalten kann, nimmt als innere Begrenzung des Sternsystems r_0 in der Richtung, in welcher der Himmelsteil ω liegt, so ist die Anzahl A_m der Sterne von den hellsten bis zu denen von der Größe m, welche auf ω stehen, nach Formel (II) in (III)

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varDelta(\varrho) \cdot \varrho^2 \, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \Phi(y, \varrho) \, dy \qquad m < n \\ A_m &= \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \varDelta(\varrho) \cdot \varrho^2 \, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \Phi(y, \varrho) \, dy \qquad m > n . \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Diese Formeln gelten auch bei Berücksichtigung des Einflusses einer vorhandenen Absorption, wenn für H, H_1 gesetzt wird, wo H_1 durch H und die Absorption gegeben ist. n bedeutet die Sterngröße, welche die Sterne von der Leuchtkraft H an der äußeren Grenze des Systems annehmen. In (III) lag die Aufgabe vor, bei gegebenen $\varDelta$ und Φ die angegebenen Doppelintegrale für A_m zu berechnen. Das ist in (III) auf etwas umständlichem Wege geschehen. Ein kürzerer Weg bietet sich dar, wenn man die Integrationsfolge in (11) umkehrt. Man kann die so entstehenden Formeln natürlich auch direkt ableiten, hier soll die erwähnte Umkehrung rein rechnerisch ausgeführt werden.

Setzt man für den Augenblick

$$\varDelta(\varrho)\, \varrho^2 \, \Phi(y, \varrho) = \psi(y, \varrho); \qquad \sqrt{\frac{H}{h_n}} = r_1 ,$$

so wird die 2. Formel (11):

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_{r_0}^{r_1} d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \psi(y, \varrho)\, dy.$$

Interpretiert man ϱ und y als rechtwinklige Koordinaten und $\psi(y, \varrho)$ als die von Punkt zu Punkt sich ändernde Massendichtigkeit, mit der die Ebene bedeckt ist, so bedeutet das Doppelintegral die Masse, welche auf einem Stück der Ebene enthalten ist, das begrenzt ist durch die beiden Geraden $\varrho = r_0$ und $\varrho = r_1$, ferner durch die Gerade $y = H$ und die Parabel $\varrho^2 h_m = y$. Da nun $r_1 < \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, so schneidet die Gerade $\varrho = r_1$ die Parabel in einem Punkte, dessen y Koordinate $< H$ ist. Das ganze Ebenenstück zerlegt sich danach in zwei. Das erste wird von der Parabel, der Abszisse $y = r_1^2 h_m$ und der Ordinate $\varrho = r_0$ begrenzt, das zweite ist ein Rechteck, das von den beiden zur y-Achse parallelen Geraden $\varrho = r_0$ und $\varrho = r_1$ und den beiden zur ϱ-Achse Parallelen $y = r_1^2 h_m$ und $y = H$ begrenzt wird. Macht man also die Summation zuerst in Bezug auf ϱ, dann in Bezug auf y, so wird:

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_{h_m r_0^2}^{h_m r_1^2} dy \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} \psi(y, \varrho)\, d\varrho + \int_{h_m r_1^2}^{H} dy \int_{r_0}^{r_1} d\varrho \cdot \psi(y, \varrho) \qquad m > n.$$

Die erste Formel (11) ergibt sich hieraus, wenn man den Buchstaben n durch m ersetzt. Da nunmehr $h_n r_1^2 = h_m r_1^2 = H$ ist, verschwindet der zweite Term und es ergibt sich:

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_{h_m r_0^2}^{H} dy \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} \psi(y, \varrho)\, d\varrho \qquad m < n.$$

Wird nun angenommen, daß $\Phi(y, r) = \varphi(y)$ die Entfernung ϱ nicht explizit enthält, so wird schließlich:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\omega} A_m = \int\limits_{h_m r_0^2}^{H} \varphi(y)\, dy \int\limits_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} \Delta(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho \qquad m < n$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\omega} A_m = \int\limits_{h_m r_0^2}^{h_m r_1^2} \varphi(y)\, dy \int\limits_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} \Delta(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho + \int\limits_{h_m r_1^2}^{H} \varphi(y)\, dy \int\limits_{r_0}^{r_1} \Delta(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho \quad m > n.$$

Wenn demnach $\Delta(\varrho) \cdot \varrho^2$ eine Funktion ist, deren allgemeines Integral in geschlossener Form angebbar ist, werden bei einer numerischen Rechnung diese neuen Formeln einen bedeutenden Vorteil vor den ursprünglichen darbieten. Ich habe in (III) den Ansatz gemacht:

$$\Delta(\varrho) = \gamma \{\varrho^{-\lambda} - a\, \varrho^{-\lambda_1}\}$$

und r_0 so bestimmt, daß $\Delta(\varrho)$ für $\varrho = r_0$ nahezu gleich Null wird, so daß $\Delta(\varrho)$ überall positiv bleibt. Dieser Ansatz soll, da er sich im schematischen Sternsystem bewährt hat, jetzt beibehalten werden, um den Anschluß an die früher ausgeführten Rechnungen zu haben. Setzt man nunmehr:

$$J_\mu = \int\limits_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} x^\mu \cdot \varphi(h_m x^2)\, dx,$$

so wird

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\omega} A_m$$

$$= 2\, h_m \gamma \left\{ \frac{1}{3-\lambda} J_{4-\lambda} - \frac{a}{3-\lambda_1} J_{4-\lambda_1} - \left(\frac{r_0^{3-\lambda}}{3-\lambda} - \frac{a}{3-\lambda_1} r_0^{3-\lambda_1} \right) J_1 \right\}.$$

Für die Häufigkeitsfunktion φ benutze ich denselben Ausdruck wie in (III) (S. 438), indem ich $\nu = c = 0$ setze, also

$$\varphi(i) = \Gamma_1 \cdot \left\{ e^{-k^2 \left[\left(\log \frac{i}{H} \right)^2 + b \log \frac{i}{H} \right]} - \frac{i}{H} \right\}.$$

Dann kann die Formel für J_μ direkt aus (III) S. 439 herübergenommen werden. Wenn man danach setzt

$$\sigma = \frac{2\,b\,k^2 - (\mu + 1)}{4\,k}; \qquad a = -\sigma - k \log \frac{h_m r_0^2}{H},$$

so wird

$$J_\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{4\,k}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot \left\{ e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{a} e^{-z^2}\,dz - \frac{4\,k}{(\mu+3)\sqrt{H}}\left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}\right]\right\}.$$

Zur wirklichen Ausrechnung hat man zu setzen:

$$\Psi_\mu = \frac{4\,k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}}\left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}\right]$$

$$\Phi_\mu = e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{a} e^{-z^2}\,dz - \Psi_\mu; \qquad \beta = a\,\frac{3-\lambda}{3-\lambda_1}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\omega} A_m = \frac{2\,\gamma \sqrt{\pi}\,\Gamma_1}{4\,(3-\lambda)\,k} H \cdot \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \left\{ \Phi_{4-\lambda} - \beta \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \Phi_{4-\lambda_1} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \Phi(1)\,(1 - \beta\, r_0^{\lambda-\lambda_1}) \right\}.$$

Alle vorkommenden Logarithmen sollen natürliche sein.

Die Formel (II) kann man auf (I) zurückführen, denn es ist:

$$\mathrm{II} = \mathrm{I} - \int\limits_{h_m r_1^2}^{H} \varphi(y)\,dy \int\limits_{r_1}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho = \mathrm{I} - C.$$

C aber ergibt sich, wenn in (I) r_0 durch r_1 ersetzt wird. Wendet man also die Reduktionsformel für (I) an, beachtet, daß $r_1^2 = \dfrac{H}{h_n}$ und führt die Abkürzungen ein:

$$\chi_\mu = e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sigma + k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz - \frac{4\,k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}}\left[1 - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}\right],$$

so kann man schreiben:

$$C = \frac{2\gamma\sqrt{\pi}\,\Gamma_1}{4k(3-\lambda)}\,H\cdot\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\chi_{4-\lambda}-\beta\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\cdot\chi_{4-\lambda_1}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left[1-\beta\left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\right]\right\}.$$

Berechnet man also A_m auch für $m>n$ nach der Formel (I), so hat man von diesem A_m C in Abzug zu bringen, um das richtige A_m für $m>n$ zu erhalten.

Es sollen nun diese Formeln für verschiedene λ berechnet werden, indem im übrigen die Zahlen, die in (III) gewonnen worden sind, benutzt werden. Es wird also gesetzt:

$$r_0 = \frac{1}{3},\quad \lambda_1 - \lambda = \frac{1}{2},\quad 4k = \frac{5}{6}\quad \frac{b}{2} = 26.938,$$

H entsprechend der Sterngröße -4.3. Dann ergeben sich folgende Tabellen:

Für die Größe

$$\chi = -\left(\frac{h_m r_2^0}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\Phi(1)\,(1-\beta\sqrt{3})$$

findet sich

	$\lambda = 0.89$	0.79	0.69	0.59	0.49	0.39	0.29
$m = 2.5$	$+$ 0.0380	0.0234	0.0189	0.0120	0.0074	0.046	0.038
3.5	268	160	122	73	43	26	13
4.5	178	101	74	42	24	13	8
5.5	110	60	41	22	12	6	4
6.5	65	34	22	12	6	3	2
7.5	37	19	12	6	2	1	
8.5	23	9	6	2			
9.5	10	4					
10.5	5	2					

Ferner kann man, da $m > 2.5$ ist, einfach annehmen:

$$\Psi_\mu = \frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}}.$$

Weiter ist

$$\sigma_{4-\lambda} = 5.6122 - \frac{b}{5}(5 - \lambda)$$

$$a = [9.6810]\{0.9542 + 0.4\,(m + 4.3)\} - \sigma$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-z^2} dz = (a)$$

$$\Phi_{4-\lambda} = e^{\sigma^2}[(a) + (\sigma)] - \Psi_{4-\lambda}$$

Nach diesen Formeln konnte leicht und sicher gerechnet werden. Beabsichtigt wurde, die 3. Dezimalstelle der folgenden Zahlen nahezu richtig zu erhalten. Sondert man noch einen gewissen Faktor ab, setzt also:

$$\frac{1}{\omega} A_m = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma_1 \gamma H}{4k(3-\lambda)} \cdot \mathfrak{A}'_m = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma_1 \gamma H}{4k} \cdot \mathfrak{A}_m = \Gamma' \mathfrak{A}_m,$$

so erhält man für

$\log \mathfrak{A}'_m$

	$\lambda = 0.89$		0.79		0.69		0.59		0.49		0.39		0.29	
$m = 2.5$	2.967		3.043		3.124		3.204		3.285		3.370		3.457	
		490		504		517		532		550		566		582
3.5	3.457		3.547		3.641		3.736		3.835		3.936		4.039	
		476		491		505		521		538		555		573
4.5	3.933		4.038		4.146		4.257		4.373		4.491		4.612	
		463		479		496		513		529		547		565
5.5	4.396		4.517		4.642		4.770		4.902		5.038		5.177	
		455		471		488		505		524		542		560
6.5	4.851		4.988		5.130		5.275		5.426		5.580		5.737	
		447		464		482		501		518		537		556
7.5	5.298		5.452		5.612		5.776		5.944		6.117		6.293	
		442		460		477		496		515		533		553
8.5	5.740		5.912		6.089		6.272		6.459		6.650		6.846	
		437		455		474		492		512		531		550
9.5	6.177		6.367		6.563		6.764		6.971		7.181		7.396	
		434		453		472		491		509		529		549
10.5	6.611		6.820		7.035		7.255		7.480		7.710		7.945	
		431		450		469		489		508		528		547
11.5	7.042		7.270		7.504		7.744		7.988		8.238		8.492	
		429		449		468		488		507		526		546
12.5	7.471		7.719		7.972		8.231		8.495		8.764		9.038	
		428		447		467		486		506		526		546
13.5	7.899		8.166		8.439		8.717		9.001		9.290		9.584	
		427		446		465		485		505		525		544
14.5	8.326		8.612		8.904		9.202		9.506		9.815		10.128	
$\log(3-\lambda)$	0.324		0.344		0.364		0.382		0.400		0.417		0.433	

(A)

Nebenbei bemerkt, stimmen für $\lambda = 0.49$ diese Zahlen nach Anbringung eines konstanten Gliedes vollkommen mit den in (III) berechneten überein.

Die Berechnung der Große C wird tabellarisch am besten ausgeführt, wenn man nach dem Schema rechnet: zuerst wird $\chi_{4-\lambda}$ und $\chi_{4-\lambda_1}$ für Werte von $m = n$ — von dieser Differenz hängt χ allein ab — berechnet und dann

$$Z = \chi_{4-\lambda} - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \chi(1) \quad \Bigg| \quad Y = \frac{Z}{3-\lambda}$$

$$Z_1 = \chi_{4-\lambda_1} - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}} \chi(1) \quad \Bigg| \quad Y_1 = \frac{a Z_1}{3-\lambda_1}.$$

Ist dann Γ dieselbe Konstante, wie in der für $m > n$ für A_m gegebenen Formel, so hat man

$$C = \Gamma \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \left\{ Y - Y_1 \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \right\} = \Gamma C_1$$

und schließlich für $m > n$

$$\frac{1}{\omega} A_m = \Gamma [\mathfrak{A}_m - C_1].$$

log $\mathfrak{A}_m$ kann der vorstehenden Tafel entnommen werden, wenn log $(3 - \lambda)$ von den einzelnen Werten subtrahiert wird. Ich gebe nun die auf 3 Dezimalen abgekürzten Werte von log Y und log Y_1:

log Y

$m - n =$	1	2	3	4	5
$\lambda = 0.29$	8.291—10	8.872—10	9.135—10	9.285—10	9.376—10
0.39	8.305	8.898	9.172	9.332	9.431
0.49	8.319	8.925	9.210	9.380	9.488
0.59	8.333	8.951	9.248	9.428	9.546
0.69	8.347	8.978	9.287	9.478	9.605
0.79	8.361	9.005	9.326	9.528	9.666
0.89	8.375	9.032	9.365	9.579	9.728

(B)

log Y_1

$m - n =$	1	2	3	4	5
$\lambda = 0.29$	8.121—10	8.765—10	9.085—10	9.288—10	9.426—10
0.39	8.135	8.793	9.125	9.340	9.488
0.49	8.149	8.820	9.164	9.391	9.551
0.59	8.163	8.847	9.205	9.444	9.616
0.69	8.178	8.875	9.245	9.497	9.682
0.79	8.193	8.903	9.286	9.551	9.749
0.89	8.207	8.931	9.327	9.606	9.817

Wählt man z. B. $\lambda = 0.49$ und $n = 10.5$, so erhält man bei passender Wahl der Konstanten Γ Sternzahlen, die vollkommen mit den (III) S. 451 angegebenen und durch gänzlich andere Formeln berechneten übereinstimmen. Ich führe noch die speziellen Werte für $\log \frac{C}{\Gamma}$ an, die sich für $m = 13.9$ sofort aus den mitgeteilten Tabellen ergeben:

$m - n =$	1	2	3	4	5
$\lambda = 0.29$	8.151	8.731	8.994	9.143	9.233
0.39	7.800	8.393	8.666	8.825	8.924
0.49	7.450	8.056	8.340	8.509	8.617
0.59	7.101	7.719	8.015	8.194	8.311
0.69	6.751	7.382	7.689	7.879	8.006
0.79	6.402	7.044	7.364	7.566	7.702
0.89	6.051	6.707	7.039	7.253	7.400

Mit diesen Tabellen ist es möglich für jedes λ und für jedes $m > n$ bei vorausgesetztem n die $\log A_m$ mit Leichtigkeit bis auf wenige Einheiten der 3. Dezimalstelle genau zu bestimmen. Man kann nun offenbar, innerhalb gewisser Grenzen λ so wählen, daß den festgestellten Sternzahlen A_m für $m < n$ genügend entsprochen wird und dann n so bestimmen, daß auch den Anzahlen A_m für $m > n$ genügt wird.

Während sich nun für die helleren Sterne, bei denen etwa $m < 10$, die A_m für die einzelnen Milchstraßenzonen, wenn auch nicht ganz mit der erwünschten, so doch mit ausreichender Genauigkeit fesstellen lassen, ist dasselbe, wie schon oft bemerkt worden ist, für $m > 10$ gegenwärtig nicht zu erreichen. Ich wiederhole, daß eigentlich nur die Herschelschen Eichungen ein in gewissem Sinne weniger bezweifelbares Material liefern. Da es sich hier nur um einen ganz rohen Versuch handeln kann, auf Grund der gemachten Ansätze n und damit die Grenze des Sternsystems in den verschiedenen Milchstraßenzonen zu ermitteln, so wird man sich damit begnügen, eben die Resultate der Herschelschen Eichungen allein zu benutzen. Auch hier tritt eine Schwierigkeit bei der Zone E ein. In meiner Arbeit vom Jahre 1898 habe ich die Anzahl A

der Sterne im Gesichtsfeld des benutzten Fernrohrs (Durchmesser 15′ 4″) ermittelt und zwar getrennt für die einzelnen Zonen I—IX sowohl für W. Herschel als auch für J. Herschel.

	W. H.	J. H.
Zone I	5.3	—
II	7.7	7.0
III	14.0	13.7
IV	30.0	26.5
V	139.2	66.7
VI	38.9	30.9
VII	12.5	13.0
VIII	6.3	8.0
IX	4.2	6.0

Die Übereinstimmung ist in Anbetracht aller Umstände genügend, jedoch mit Ausnahme der Zone V, welche die Milchstraße enthält. Die Annahme, daß der südliche Himmel sich wirklich anders verhalten mag wie der nördliche, ist wohl nicht abzuweisen. Da nun meine Feststellungen der Zahlen A_m bis $m = 9.2$ sich mangels eines genügenden Reduktionsmaterials auf den nördlichen Himmel beschränkten, wäre es, wie schon oben bemerkt worden ist, das korrekteste, die Zahlen von W. Herschel allein zu benutzen. Aber es ist nicht unwahrscheinlich, daß W. Herschel mit einer gewissen Vorliebe die helleren Teile der Milchstraße bevorzugte, während bei J. Herschel insofern das Gegenteil stattgefunden haben kann, als er in den sternreichsten Gegenden die Sternanzahlen als „unzählbar" bezeichnet. In Art. 2 habe ich zuerst die Zahlen von J. Herschel allein benutzt, dann aber für Zone V die Mittelwerte aus den beiderlei Abzählungen. Jetzt will ich aber die letztere Annahme als die plausiblere machen, da zu hoffen ist, daß sie der Wahrheit näher kommen wird, als die erste. Diese Mittelwerte sollen mit Rücksicht auf die abgezählten Felder gebildet werden. Dann ergibt sich für die Anzahl der Sterne δ auf einem Quadratgrad:

Zone	δ	$\log \delta$
A	111	2.0453
B	154	2.1875
C	266	2.4249
D	664	2.8222
E	2023	3.3060

Die Größe m, die diesen Zahlen zugeordnet werden soll, nehme ich nach Herrn Kapteyn zu 13.90 an.

Nach einigen Versuchen, deren Resultat sicherlich verbesserungsfähig ist, bin ich dazu gekommen, den einzelnen Zonen folgende Werte von λ und Γ zuzuordnen, damit die Abzählungsresultate bis $m = 9.2$ dargestellt werden:

A	$\lambda = 0.89$	$\log \Gamma = 4.626 - 10$
B	0.74	4.421
C	0.62	4.347
D	0.44	4.227
E	0.34	4.189

Der Vergleich mit den aus den Abzählungen hervorgegangenen δ ist mit Hilfe der Tabelle (A) (S. 483) sehr leicht auszuführen und ergibt, wenn f das Tabellenresultat ist:

	A		B		C	
m	$\log \delta$	f	$\log \delta$	f	$\log \delta$	f
3.5	7.565 − 10	7.759	7.598	7.661	7.719	7.768
4.5	7.890	8.231	8.173	8.159	8.191	8.184
5.5	8.620	8.698	8.647	8.647	8.692	8.692
6.5	9.156	9.158	9.137	9.126	9.190	9.191
7.5	9.646	9.600	9.599	9.599	9.676	9.689
9.2	0.347	0.348	0.383	0.393	0.524	0.518

D		E	
$\log \delta$	f	$\log \delta$	f
7.623	7.704	7.839	7.752
8.255	8.251	8.308	8.315
8.794	8.789	8.900	8.872
9.318	9.322	9.429	9.423
9.851	9.849	9.965	9.969
0.737	0.738	0.872	0.891

Die Darstellung ist nur bei den Sternen von der Größe 3.5 und an einer Stelle in der Zone A, nämlich bei 4.5 minderwertig, was bei der ganzen Sachlage erklärlich ist; im übrigen ist sie vollkommen zufriedenstellend. Mit Hilfe der Tabellen (B) ist es weiter eine sehr einfache Rechnung, jene n aufzusuchen, die mit den eben für die einzelnen Zonen gefundenen λ und Γ die Herschelschen δ genau darstellen. Es findet sich:

A	$n = \overset{m}{8.3}$	$\log r_1 = 2.52$	$r_1 = 330$
B	8.6	2.58	380
C	8.8	2.62	402
D	9.0	2.66	457
E	11.9	3.24	1740

Die Korrektionen, die infolge der Werte $n < 9.2$ an die $m = 9.2$ entsprechenden Werte f anzubringen sind, betragen ganz wenige Einheiten der 3. Dezimalstelle. r_1 ist die Entfernung in Siriusweiten (0″2 Parallaxe). Danach müßte dem Sternsystem eine stark abgeplattete Gestalt zugeschrieben werden. Die Ausdehnung in der Milchstraße wäre fünfmal so groß wie senkrecht darauf.

Mir fällt es nicht ein, dem Resultat der angestellten Rechnung besondere Zuverlässigkeit zuzusprechen. Aber es ist doch nicht ganz ohne Wert, weil es auf genau präzisierten Annahmen aufgebaut ist. Die Zulässigkeit derselben ist durch die Übereinstimmung mit den gegenwärtig verfügbaren Daten bewiesen, aber es tut dringend not, diese Daten zu vermehren. Offenbar ist es von der größten Wichtigkeit, über die in den einzelnen Milchstraßenzonen vorkommende Sternfülle δ für Sterne von der 10.—15. Größe und wenn schwächere Sterne erreichbar sind, darüber hinaus einigermaßen zuverlässige Daten zu beschaffen und da für die helleren Sterne die photometrische Größe maßgebend war, wäre zu überlegen, ob nicht vielleicht eine Eichung nach Herschels Manier, mit großen Instrumenten ausgeführt, schneller und leichter zum Ziele führen würde, als die photographische Aufnahme.

Noch möchte ich darauf aufmerksam machen, daß ein Teil der zu Grunde gelegten Annahmen nur der Bequemlichkeit oder

Analogie wegen gemacht worden sind und sicherlich verbesserungsfähig sind. Vor allem ist es nicht nötig, für alle Zonen dieselben Werte von α und $\lambda_1 - \lambda$ anzusetzen und noch weniger dafür die Werte zu wählen, die sie im schematischen Sternsystem erhalten haben. Ebenso sind die in der Häufigkeitsfunktion φ enthaltenen Konstanten eventuell zu korrigieren, was nach den Betrachtungen in (2) auch in dem zuletzt benutzten System wahrscheinlich nötig ist. Schließlich lassen sich über die mittleren Parallaxen, die mit der galaktischen Breite veränderlich sind, gewisse Betrachtungen anstellen, wie ich dies in dem bereits zitierten Aufsatz (Astronomische Nachrichten, Nr. 4617) getan habe. Ein Nachweis der dort benutzten Daten wird auf den folgenden Seiten gegeben werden. Auf die genannten Betrachtungen, die dem ganzen Problem der Sternverteilung eine neue Seite, wie ich glaube, abgewinnen, hier zurückzukommen, dazu liegt keine Veranlassung vor.

4.

Die Ermittlung der Zahlen A_m für $m < 6.5$ und zwar für die einzelnen Milchstraßenzonen I—IX war, wie aus meinen früheren Untersuchungen[1]) hervorgeht, mit Hilfe der Bonner Durchmusterung kaum durchführbar. Es war dies eine Folge der Ungleichförmigkeiten in den Bonner Größenschätzungen der hellen Sterne, deren Zahl zudem zu gering ist, um eine Kompensation der Fehler erwarten zu können. Die Sachlage hat sich seitdem wesentlich geändert, da zwei photometrische Kataloge für die helleren Sterne entstanden sind, von denen man annehmen darf, daß sie alle helleren Sterne auf der nördlichen Halbkugel bis zur Größe 6.5 enthalten: 1. photometrische Durchmusterung von Pickering im 45. Bande der Annalen der Harvard-Sternwarte (im folgenden mit P_{45} bezeichnet); 2. die Potsdamer Durchmusterung (P. D.) im 19. Bande der Publikationen des Potsdamer Observatoriums. Meine früheren Er-

[1]) Zur Verteilung der Fixsterne am Himmel. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1899.

mittlungen der Zahlen A_m für $m = 6$ bis $m = 9.2$ mit Hilfe der Durchmusterung bezogen sich (eine andere Grundlage war damals nicht vorhanden und ist es auch gegenwärtig nicht) auf das System der Harvard-Revision (H. R.), welches, wie man weiß, weder mit dem von P_{45} noch von P. D. übereinstimmt. Die aus den Abzählungen aus den beiden photometrischen Katalogen abgeleiteten A_m erfordern demnach, um an die Reihe der schwächeren Sterne in genügender Weise angeschlossen zu werden, eine Reduktion auf H. R. Im folgenden sollen meine in beiden Richtungen ausgeführten Rechnungen mitgeteilt werden.

Abzählungen von Sternen nach ihrer Größe und nach Milchstraßenzonen sind eine mühsame und höchst eintönige Beschäftigung. Zur Erleichterung solcher Arbeiten und um sie mit der mäßigen Genauigkeit, die gegenwärtig den Resultaten stellarstatistischer Feststellungen gegeben werden können, in Einklang zu bringen, habe ich bereits im Jahre 1886 ein Hilfsmittel dargeboten, indem ich eine graphische Darstellung der Kreise publizierte, längs welcher die galaktische Poldistanz 0°, 10°, 20° etc. bis 180° konstant bleibt. Aus solchen Diagrammen kann man mit einem Blick ablesen, in welcher dieser 10 Grad breiten Zonen jeder Stern liegt und man könnte natürlich die Genauigkeit verdoppeln, ohne das Format des Diagramms zu vergrößern. Selbst sehr ausführliche Tafeln können eine gleiche Leichtigkeit nicht gewähren und die damit etwa zu erreichende Genauigkeit ist zum Teil illusorisch, zum Teil in den meisten Fällen der Stellarastronomie ganz unnötig.

Trotz dieser auf der Hand liegenden Erwägungen ist das von mir gegebene Hilfsmittel nur selten in Anspruch genommen worden und so wurde oft eine große Menge ganz unnötiger Arbeit geleistet. Ich möchte konstatieren, daß S. Newcomb, wie auch sonst in vielen Fällen, hier eine Ausnahme bildete.

Für die hellen Sterne bis zur Größe 6.5 reicht aus offensichtlichen Gründen bei einer Abzählung die Angabe der Sternanzahlen in Trapezen von 30^m in Rektaszension und 5° in Deklination aus. Die Grenzlinien der einzelnen Zonen lösen sich dann in gebrochene Linien auf und man wird vielleicht zur Vermehrung der Genauigkeit das eine tun können, daß man Trapeze, die durch die richtigen, d. h. also die stetig gekrümmten Grenzlinien nahezu halbiert werden, zur Hälfte der einen, zur anderen Hälfte der zweiten Zone zurechnet. Nur muß man bei diesem Verfahren, welches, wie gesagt, fast in allen Fällen vollkommen ausreichend ist, darauf achten, daß der *Flächeninhalt aller der einen oder anderen Zone zugerechneten* Trapeze richtig, z. B. in Quadratgraden angegeben wird. Wenn dann die scheinbare Sternfülle, z. B. durch die Anzahl der Sterne auf einem Quadratgrad angegeben wird, so können kleinere Ungenauigkeiten in dem Verlaufe der gebrochenen Grenzlinien keinen bemerkbaren Einfluß auf das Resultat haben, solange das statistische Material zu der beabsichtigten Untersuchung überhaupt tauglich ist. Ich gebe am Schlusse dieser Arbeit auf vier Seiten eine solche Verteilung der Trapeze von erwähntem Umfange auf die einzelnen Milchstraßenzonen I bis VIII für die nördliche Halbkugel. Aus ihr ist z. B. zu entnehmen, daß das Trapez $\alpha = 0^h\,30^m - 1^h\,0^m$ $\delta = 70^0 - 75^0$ zur Hälfte der Zone IV zur anderen Hälfte der Zone V zuzuordnen ist.

Der Flächeninhalt der so abgegrenzten Zonen ist in Quadratgraden:

Zone		log
I	1207.5	3.0819
II	3138.0	3.4967
III	3487.1	3.5425
IV	3822.5	3.5823
V	3599.8	3.5563
VI	2969.9	3.4727
VII	1917.4	3.2827
VIII	484.6	2.6854
Summe	20626.8	

Zone		log
I	1207.5	3.0819
II + VIII	3622.6	3.5590
III + VII	5404.5	3.7328
IV + VI	6792.4	3.8320
V	3599.8	3.5563
Summe	20626.8	

Während für die wahren, also für die nicht durch gebrochene Linien begrenzten Zonen sich folgende Zahlen ergeben:

Zone		log
I	1242.9	3.0944
II	3065.9	3.4866
III	3539.6	3.5489
IV	3773.5	3.5767
V	3582.5	3.5542
VI	2956.9	3.4708
VII	1948.7	3.2897
VIII	516.7	2.7132
Summe	20626.7	

Zone		log
I	1242.9	3.0944
II+VIII	3582.6	3.5542
III+VII	5488.3	3.7394
IV+VI	6730.4	3.8280
V	3582.5	3.5542
Summe	20626.7	

Die Abzählungen der in P_{45} enthaltenen Sterne wurden von mir in folgender Zusammenfassung vorgenommen:

1) m bis 2.50 inkl.
2) von 2.51—3.50
3) „ 3.51—4.50
4) „ 4.51—5.50
5) „ 5.51—6.50

Für die einzelnen Zonen I, II etc. und Abteilungen 1, 2 etc. fand ich folgende Sternanzahlen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
1	1	8	3	6	10.5	4.5	2	0	35
2	3.5	6.5	19.5	8.5	16	11	5	0	70
3	5	34	39	46.5	51.5	52	19	6	253
4	41.5	94	127	156.5	226.5	160	63	13.5	882
5	124.5	296	393	587	726.5	454.5	202	41.5	2825
	175.5	438.5	581.5	804.5	103.1	682	291	61	4065

Daraus ergeben sich die Anzahlen A_m:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
$A_{2\cdot5}$	1	8	3	6	10.5	4.5	2	0	35
$A_{3\cdot5}$	4.5	14.5	22.5	14.5	26.5	15.5	7	0	105
$A_{4\cdot5}$	9.5	48.5	61.5	61	78	67.5	26	6	358
$A_{5\cdot5}$	51	142.5	188.5	217.5	304.5	227.5	89	19.5	1240
$A_{6\cdot5}$	175.5	438.5	581.5	804.5	103.1	682.0	291	61	4065

Die charakteristischen Logarithmen $\log a_m = \frac{1}{2}(\log A_m - \log A_{m-1})$ sind:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$m = 3.5$	0.327	0.129	0.438	0.192	0.201	0.269	0.272	—
4.5	0.162	0.262	0.218	0.312	0.234	0.320	0.285	—
5.5	0.365	0.234	0.243	0.276	0.296	0.264	0.267	0.256
6.5	0.268	0.244	0.245	0.284	0.265	0.238	0.258	0.248
Mittel	0.285	0.240	0.246	0.283	0.269	0.249	0.263	0.250

Ein systematischer Gang in den untereinanderstehenden Zahlen dürfte nicht hervortreten, wohl aber sind die Schwankungen besonders stark, wo nur eine kleinere Anzahl von Sternen vereinigt sind. Es ist deshalb angezeigt, Mittelwerte zu bilden. Das ist so geschehen, daß jedem Einzelwerte von $\log a$ ein Gewicht gegeben worden ist gleich der Anzahl der mitwirkenden Sterne. Diese Gewichte wurden auf ganze Zahlen bzw. auf ganze Zehner abgerundet. In den so gebildeten Mitteln ist eine Vergrößerung der $\log a$ mit der Annäherung an die Milchstraße ziemlich deutlich angedeutet. Nimmt man nun, wie es das typische Sternsystem erfordert, die A_m für die fünf Regionen: $A = \mathrm{I}$, $B = \mathrm{II} + \mathrm{VIII}$, $C = \mathrm{III} + \mathrm{VII}$, $\mathrm{D} = \mathrm{IV} + \mathrm{VI}$, $\mathrm{E} = \mathrm{V}$ so ergibt sich:

	A	B	C	D	E	Σ
$A_{2\cdot5}$	1	8	5	10.5	10.5	35
$A_{3\cdot5}$	4.5	14.5	29.5	30	26.5	105
$A_{4\cdot5}$	9.5	54.5	87.5	128.5	78	358
$A_{5\cdot5}$	51	162	277.5	445	304.5	1240
$A_{6\cdot5}$	175.5	499.5	872.5	1486.5	1031	4065

und wie früher die $\log a_m$:

	A	B	C	D	E
$m = 3.5$	0.327	0.129	0.385	0.228	0.201
4.5	162	287	236	316	234
5.5	365	237	251	270	296
6.5	268	245	249	262	265
Mittel	0.285	0.244	0.251	0.267	0.269

Die Zunahme der Mittelwerte mit der Annäherung an die Milchstraße ist sehr deutlich ausgesprochen, wenn man von Zone A absieht. Das ist aber in keiner Weise auffallend, da

Zone I nur ein engbegrenztes Gebiet umschließt, das selbstverständlich, wie überall am Himmel, von der durchschnittlichen Beschaffenheit erheblich abweichen kann. Die großen Schwankungen der $\log a_m$ für die ganz hellen Sterne dürften ebenfalls nichts Auffälliges darbieten. Die Anzahlen bis zu $m = 3.5$ sind so gering, daß statistische Merkmale nur sehr gestört hervortreten können.

Stellen wir die gefundenen Mittelwerte (a), die also aus den Sternen, die heller als von der Größe 6.5 sind, gegenüber den Werten, welche die Sterne von der Größe 6—9 in den beiden früheren Bearbeitungen (b) und (c)[1]) ergeben haben, so erhält man folgende Tabelle:

	(a)	(b)	(c)	$M_{7\cdot 0}$	$M_{6\cdot 5}$
A	0.285	0.218	0.237	0.268	0.268
B	0.244	0.228	243	0.232	0.234
C	0.251	0.251	248	0.243	0.240
D	0.267	0.264	260	0.257	0.256
E	0.269	0.272	275	0.263	0.258

Die beiden letzten Kolumnen werden später erklärt werden.

Bevor auf eine nähere Diskussion eingegangen wird, mögen ähnliche Zusammenstellungen wie für P_{45} noch für P. D. gegeben werden. Die Herren Müller und Kempf haben in einem Aufsatze in Astronomischen Nachrichten Nr. 4312 Resultate von Abzählungen mitgeteilt, die sofort verwertet werden können. Zuerst mögen die durch einfache Addition zu erhaltenden A_m angegeben werden.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
$m = 3.99$	6	32	29	31	38	24	14	0	174
4.99	18	74	86	95	137	103	42	12	567
5.99	83	211	276	353	452	319	143	32	1869
6.99	263	619	826	1178	1516	972	431	100	5905

[1]) A. a. O., S. 391.

Daraus folgen die $\log a_m$:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$m = 4.99$	0.239	0.182	0.236	0.243	0.278	0.302	0.239	—
5.99	0.332	0.228	0.253	0.285	0.259	0.246	0.266	0.218
6.99	0.251	0.234	0.239	0.261	0.263	0.242	0.240	0.247
Mittel	0.268	0.228	0.236	0.265	0.263	0.246	0.243	0.241

und wenn wieder die Zonen A bis E eingeführt werden, ergeben sich die A_m:

	A	B	C	D	E	Σ
$m = 3.99$	6	32	43	55	38	174
4.99	18	86	128	198	137	567
5.99	83	243	419	672	452	1869
6.99	263	719	1257	2150	1516	5905

Die $\log a_m$ sind jetzt:

	A	B	C	D	E
$m = 4.99$	0.239	0.215	0.237	0.278	0.278
5.99	0.332	0.226	0.258	0.265	0.259
6.99	0.251	0,236	0.239	0.253	0.263
Mittel	0.268	0.232	0.243	0.257	0.267
einfache M.	0.274	0.226	0.245	0.265	0.267

Die ersten Mittelwerte sind in der obigen Zusammenstellung unter $M_{7 \cdot 0}$ angegeben. Schließlich möchte ich noch eine andere Zusammenstellung mitteilen. Die Abzählungsresultate der Herren Müller und Kempf sind mir leider zu spät bekannt geworden. Inzwischen hatte ich selbst eine Abzählung nach der P. D. vorgenommen, welche für die Größen 2.5, 3.5 etc. angestellt wurde. Ich führe die Resultate an, weil sie direkt vergleichbar mit den aus P_{45} gewonnenen sind.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
$A_{2 \cdot 50}$	0	6	3	4,5	9.5	5	1	0	29
$A_{3 \cdot 50}$	4.5	13.5	19	13	25	12.5	6.5	0	94
$A_{4 \cdot 50}$	9.5	45.5	54	46	70	53.5	24	4.5	307
$A_{5 \cdot 50}$	43.5	123.5	164.5	191	267	186.5	75.5	18.5	1070
$A_{6 \cdot 50}$	142	362.5	477	604.5	842	557.5	237	53.5	3276
Summe	199.5	551	717.5	859	1213.5	815	344	76.5	4776

log a_m

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$m = 3.5$	—	0.176	0.401	0.230	0.240	0.199	0.403	—
4.5	0.162	0.264	0.227	0.274	0.224	0.316	0.284	—
5.5	0.330	0.217	0.242	0.309	0.296	0.271	0.249	0.307
6.5	0.257	0.234	0.231	0.250	0.249	0.238	0.248	0.231
Mittelw.	0.268	0.231	0.237	0.259	0.258	0.249	0.252	0.239

A_m

	A	B	C	D	E	Σ
$m = 2.5$	0	6	4	9.5	9.5	29
3.5	4.5	13.5	25.5	25.5	25	94
4.5	9.5	50	78	99.5	70	307
5.5	43.5	142	240	377.5	267	1070
6.5	142	416	714	1162	842	3276

log a_m

	A	B	C	D	E
$m = 3.5$	—	0.176	(0.402)	0.214	(0.240)
4.5	0.162	0.284	0.243	0.296	0.224
5.5	0.330	0.227	0.244	0.295	0.296
6.5	0.257	0.233	0.237	0.244	0.249
Mittelw.	0.268	0.234	0.240	0.256	0.258
einf. M.	0.250	0.230	0.241	0.262	0.252

Nach allen mitgeteilten Zahlen darf man schließen, daß mit Ausnahme der Zone A in allen übrigen Zonen die Tatsache hervortritt, daß die log a_m, ohne eine Abhängigkeit von m zu zeigen, mit der Annäherung an die Milchstraße zunehmen, daß sie aber für ganz helle Sterne durch unregelmäßige Schwankungen teilweise verdeckt wird. Diese Schwankungen sind durch die geringe Zahl der konkurrierenden Sterne zu erklären.

Die P. D.-Angaben beziehen sich auf die Größen 3.99, 4.99 etc. Um auf die vollen Größen zu reduzieren, hat man 0.005 im log A_m zu addieren. Vereinigt man diese log A_m für alle Zonen zusammen, so ergibt sich die folgende Gegenüberstellung:

log A_m

m	$P.D$		P_{45}		$P_{45} - P.D$
2.5	1.462	255	1.544	237_5	+ 0.082
3.5	1.973	273	2.021		+ 0.048
4.0	2.246	241	—	266_5	
4.5	2.487	272	2.554		+ 0.067
5.0	2.759	270		269_5	
5.5	3.029	248	3.093		+ 0.064
6.0	3.277	238		257	
6.5	3.515	261	3.609		+ 0.094
7.0	3.776				

Die log a_m ergeben sich im Mittel für $P.D : 0.257_3$, für $P_{45} : 0.257_6$, also vollkommen übereinstimmend. Dagegen ist offenbar eine konstante Differenz zwischen den beiden Katalogen vorhanden, die im Mittel beträgt:

$$P_{45} - P.D = + 0.071.$$

Das entspricht einer Differenz in den Größenangaben im Sinne

$$P_{45} - P.D = + 0\overset{m}{.}14.$$

Diese Differenz stimmt sehr gut mit dem durch den direkten Vergleich beider Kataloge erhaltenen Wert $0\overset{m}{.}16$. Im übrigen zeigen die log a_m weder bei $P.D$ noch bei P_{45} einen von m abhängigen systematischen Gang, vielmehr nur nicht bedeutende Schwankungen.

Es ist noch der Anschluß an die aus der Bonner Durchmusterung erhaltenen Resultate zu besprechen. Die mit der D. M. ausgeführten Abzählungen von $m = 6$ bis $m = 9.2$ ergaben nach eingehender Diskussion log $A_{6.5} = 3.579$, während aus P_{45} folgt 3.609. Dabei ist aber zu bemerken, daß meine Angaben sich auf das System der Harvard-Revision beziehen und nach den Herren G. Müller und Kempf[1]) dieses System, abgesehen von seiner Inhomogenität, nicht übereinstimmt mit dem von P_{45}, vielmehr $6\overset{m}{.}50$ in $P_{45} = 6\overset{m}{.}56$ H. R. Will man

[1]) Potsdamer Publikationen XVII, S. XXV.

deshalb $\log A_{6.5}$, wie es aus P_{45} folgt, auf H. R. beziehen, so muß man $0.5 \times 0.06 = 0.030$ in Abzug bringen. Man erhält so zufällig genau dasselbe Resultat, wie meine Reduktion der Resultate aus D. M. ergeben haben. Danach bedarf die schon früher von mir gefundene Differenz keiner weiteren Erklärung. Tatsächlich ist die von mir in meiner Arbeit vom Jahre 1909 gegebene Erklärung aus einer durch ein Versehen unrichtig ausgefallenen Formel entsprungen und muß als unzutreffend bezeichnet werden.

Indessen müssen doch noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden. Die eben angegebene Differenz der Größen $P_{45} - P.D$ ist nur sehr unsicher bestimmt. Die Herren Müller und Kempf machen selbst darauf aufmerksam, daß gerade bei $m = 6.5$ die Kurve der Differenzen eine starke Veränderung zeigt, auch machen sich bedeutende regionale Einflüsse geltend, die wohl H. R. zuzuschreiben sind. Danach ist zu vermuten, daß auch für die einzelnen Milchstraßenzonen die Beziehungen der beiden Kataloge verschieden ausfallen werden. Da nun nicht nur der Anschluß für alle Sterne von der Größe 6.5 an die Resultate der D. M. von Interesse ist, sondern für jede Milchstraßenzone, ist es von Wichtigkeit, die Beziehungen der drei Kataloge P_{45}, H. R. und P. D. etwas näher zu untersuchen. Ich habe deshalb die langweilige Ausführung der Vergleichung von P_{45} und H. R. nicht gescheut. Für ganz helle Sterne ist die Zahl der Vergleichungsobjekte, da die H. R. schwächere Sterne bevorzugt, viel zu gering, um etwas Bestimmtes aussagen zu können, auch sind hier, namentlich in H. R., große Schwankungen und Unsicherheiten vorhanden. Ich habe deshalb nur die Frage zu beantworten gesucht: welche Größe der auf der nördlichen Halbkugel gelegenen Sterne entspricht in der H. R. der Größe 6.50 in P_{45}? Hier handelt es sich um eine rein formale Beziehung, durch welche die Abzählungen, welche an einem der beiden Kataloge gemacht worden sind, auf die an dem anderen angestellten reduziert werden sollen. Es darf deshalb weder auf die Farbe der Sterne noch auf den Umstand Rücksicht genommen werden, daß P_{45} bekanntlich kein einheitlicher, ganz homogener Katalog ist, vielmehr auch aus der H. R. herübergenommene Sterne enthält. Da es, wie schon erwähnt worden ist, wahrscheinlich ist, daß die Beziehungen der beiden Kataloge gerade bei $m = 6.5$ schnelleren Veränderungen unterworfen ist, habe ich das Intervall, in dem sich die zu vergleichenden Sterngrößen bewegen, möglichst eng um 6.50 herum gehalten. Aber es mußte andererseits nicht zu klein genommen werden, um eine genügende Zahl von Vergleichsobjekten zu erhalten. Die einmal festgesetzte Größe des Intervalls muß aber ausnahmslos festgehalten werden, wenn man Willkür vermeiden will. Wegen der Zunahme der Sternanzahlen mit m bildet 6.50 nicht die Mitte des Intervalls, vielmehr wurde für P_{45} angenommen für die Zonen I, II, III, VII und VIII: 6.04 bis 6.80, für die sternreichen Zonen IV, V und VI: 6.24 bis 6.70. So ergeben sich

	Anzahl	$P_{45} - H.R$	Mittlere Größe P_{45}
		m	
Zone I	50	-0.011	6.50
II	90	$+0.002$	6.46
III	164	-0.019	6.49
IV	167	-0.024	6.49
V	152	-0.052	6.50
VI	135	-0.066	6.49
VII	73	-0.074	6.52
VIII	12	-0.066 :	6.47

Dabei wurden alle Differenzen $> \overset{m}{0.40}$, als durch irgendwelche Versehen entstanden, ausgeschlossen. Indessen wurde dadurch das Resultat in keiner irgendwie erheblichen Weise geändert. Das Gesamtmittel mit Rücksicht auf die Zahl aller Sterne bei P_{45} ist -0.0382. Die Reduktion von $\log A_{6.5}$ in P_{45} auf H. R. ist also 0.019, wozu noch die früher überschätzte Reduktion hinzutritt, so daß die oben konstatierte sich auf etwa 0.009 reduziert, was genügend sein dürfte.

Wenn als Reduktionsfaktor der mittlere Wert für eine Sterngröße $\frac{1}{2}$, was ausreichend ist, angenommen wird, erhält man folgende Tabelle:

Zone	P_{45}	Red.	$H.R$	P_{45}	Red.	$H.R$	f	log δ	DM
I	2.244	— 6	2.238	2.244	— 6	A 2.238	3.082	9.156	9.169
II	2.642	+ 1	2.643	2.699	— 3	B 2.696	3.559	9.137	9.151
III	2.765	— 10	2.755	2.941	— 19	C 2.922	3.733	9.189	9.171
IV	2.906	— 12	2.894	3.172	— 22	D 3.150	3.832	9.318	9.313
V	3.013	— 28	2.985	3.013	— 28	E 2.985	3.556	9.429	9.404
VI	2.834	— 33	2.801						
VII	2.464	— 37	2.427						
VIII	1.785	— 31	1.754						

Es ist hierin P_{45} der log $A_{6.5}$, wie er direkt aus den Abzählungen aus P_{45} folgt; reduziert ist die Reduktion auf H. R., den Vergleichungen der beiderseitigen Sterngrößen entsprechend. H. R. der auf das System der Harvard-Revision bezogene log $A_{6.5}$. Ferner bedeutet f den Logarithmus des betreffenden Areals in Quadratgraden und δ die Zahl der Sterne auf einem Quadratgrad. Unter D. M. steht das Resultat aus den früheren von mir bestimmten Sternanzahlen aus dem Material der Bonner Durchmusterung. Ich habe nämlich[1]) für die abgezählten $A_{6.5}$ etc. die in folgender Tabelle enthaltenen Zahlen gefunden:

Zone	log $A_{6\cdot5}$	log $A_{7\cdot5}$	log $A_{9\cdot2}$	log f
I	2.315	2.792	3.493	3.146
II	2.609	3.048	3.818	3.439
III	2.760	3.269	4.089	3.563
IV	2.827	3.367	4.279	3.550
V	2.953	3.514	4.421	3.549
VI	2.829	3.323	4.224	3.479
VII	2.436	2.933	3.837	3.317
VIII	1.889	2.381	3.236	2.326

	log $A_{6\cdot5}$	log $A_{7\cdot5}$	log $A_{9\cdot2}$	log f
A	2.315	2.792	3.493	3.146
B	2.685	3.133	3.919	3.534
C	2.929	3.434	4.282	3.758
D	3.129	3.647	4.553	3.816
E	2.953	3.514	4.421	3.549

[1]) Zur Verteilung der Sterne am Himmel. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1899, S. 390.

Daraus folgen der Wert log δ, wo δ die Anzahl Sterne auf einem Quadratgrad sind:

	log δ		
	$m = 6.5$	7.5	9.2
A	9.169	9.646	0.347
B	9.151	9.599	0.385
C	9.171	9.676	0.524
D	9.313	9.831	0.737
E	9.404	9.965	0.872

Die Übereinstimmung der Zahlen log δ und D. M. für $m = 6.5$ zeigen immerhin eine erfreuliche Übereinstimmung, wenn man die komplizierten und nicht ganz sicheren Reduktionen berücksichtigt, die zu den D. M. geführt haben. Direkte Mittel P_{45} für $m < 6.5$ auf das System der H. R. zurückzuführen, gibt es nicht, da bekanntlich beide Kataloge verhältnismäßig wenige helle Sterne gemein haben. Bei dieser Sachlage und solange nicht etwa P_{45} oder P. D. bis zu den Sternen 10. Größe weitergeführt worden ist und dann eine Bezugnahme auf H. R. unnötig sein wird, bleibt nichts übrig, als anzunehmen, daß die hellen Sterne mit derselben Reduktion, wie die von der Größe 6.5 auf das System der H. R. zu reduzieren sind. Bringt man also diese Korrektionen an die aus den direkten Abzählungen aus P_{45} gewonnenen log A_m an und fügt gleich die aus D. M. erhaltenen Resultate hinzu, so erhält man folgendes Tableau für **log δ**:

Zone	A	B	C	D	E
$m = 3.5$	7.565—10	7.599	7.719	7.623	7.839
4.5	7.890	8.174	8.191	8.255	8.308
5.5	8.620	8.648	8.692	8.794	8.900
6.5	9.156	9.137	9.189	9.318	9.429
7.5	9.646	9.599	9.676	9.831	9.965
9.2	10.346	10.383	10.524	10.737	0.872

Die Zahlen dieser Tabelle, welche ich als das beste Resultat ansehe, das ich mit den angewandten Reduktionsgrößen erhalten konnte, stimmen mit den beiden in den früheren Abschnitten dieser Arbeit benutzten Daten fast vollkommen überein.

Sie weichen nur an einer Stelle um mehr als eine Einheit der 3. Dezimale voneinander ab, d. i. für $m = 7.5$ und die Zone D, wo die genannten Rechnungen mit 9.851 ausgeführt wurden. Die Differenz rührt von einer provisorisch angebrachten Korrektion her, ehe die definitiven Werte hergestellt waren, die nicht gerechtfertigt ist. Im übrigen kommt sie wohl kaum in Betracht, da die angestellten Rechnungen nicht mehr als einen orientierenden Charakter haben können. Die mittlere Unsicherheit der einzelnen $\log \delta$ dürfte etwa $10 \pm$ Einheiten der 3. Stelle sein.

Noch muß das Verhältnis der Potsdamer Durchmusterung zu den Harvard-Katalogen besprochen werden. Es liegt selbstverständlich keine Unterschätzung der nach jeder Richtung ausgezeichneten P. D. vor, wenn bei den hier angestellten Rechnungen die Harvard-Resultate benutzt worden sind. Aber der Anschluß an die Resultate aus der D. M. schien mir für P_{45} etwas sicherer zu sein, weil die ersteren auf das System der H. R. bezogen worden sind (vgl. die Bemerkungen in der Einleitung).

Um die Anschlußstelle zwischen P_{45} und DM bei $m = 6.5$ auch für die P. D. zu diskutieren, muß eine Vergleichung P. D. und P_{45} für die einzelnen Milchstraßenzonen ausgeführt werden. Da mir bekannt war, daß am Potsdamer Observatorium das Material in einer zur Vergleichung viel geeigneteren Form vorhanden ist, als mir zu Gebote stand, habe ich Herrn G. Müller ersucht, die gewünschte Vergleichung vorzunehmen. Er und Herr Kempf sind diesem Wunsche in bereitwilligster Form entgegengekommen. Es wurden die Differenzen $P_{45} - PD$ für alle Sterne, welche bis P_{45} zwischen den Grenzen 6.00 und 6.99 liegen zusammengefaßt nach galaktischen Zonen und es ergab sich:

Zone	$P_{45} - PD$	Anzahl	$\log A_{6.5}$	$\log a$	Red.	$P.D^*$		$[P.D]$
I	− 0.163	146	2.152	0.51	+ 0.083	2.235	− 5	2.230
II	− 0.173	327	2.559	0.47	81	2.640	+ 1	2.641
III	− 0.178	458	2.679	0.46	82	2.761	− 9	2.752
IV	− 0.180	739	2.781	0.50	90	2.871	− 12	2.859
V	− 0.192	971	2.925	0.49	94	2.019	− 25	2.994
VI	− 0.201	623	2.746	0.47	94	2.840	− 31	2.809
VII	− 0.196	227	2.375	0.49	96	2.471	− 36	2.435
VIII	− 0.158	50	1.728	0.46	73	1.801	− 30	1.771

In die vorstehende Tabelle sind gleich mit aufgenommen die $\log A_{6.5}$, wie ich sie aus der P. D. gewonnen habe unter der Rubrik $\log A_{6.5}$. In der 5. Kolumne stehen die $\log \alpha$, wie sie oben aus P. D. für 6.5 abgeleitet wurden, in der 6. Kolumne die Reduktion auf P_{45}, die das negative Produkt von (2) und (5) ist. PD^* ist die auf P_{45} reduzierte Angabe der P. D. Darauf folgt die Reduktion auf H. R. nach den obigen Annahmen schließlich [P. D.], d. i. die auf H. R. reduzierte Angabe von P. D. Daraus ergibt sich für die Zonen A, B etc.:

	$\log A_{6.5}$	$[P.D]$	Diff.	$\log \delta$ $P.D$	P_{45}	DM
A	2.152	2.230	+ 78	9.147	9.156	9.169
B	2.619	2.696	+ 77	137	9.137	9.151
C	2.854	2.923	+ 69	190	9.189	9.171
D	3.065	3.136	+ 71	304	9.318	9.313
E	2.925	2.994	+ 69	438	9.429	9.404

Die Übereinstimmung der verschiedenen $\log \delta$ ist jedenfalls eine gute.

Die Reduktion für Größen $m < 6.5$ ist natürlich nicht mit Sicherheit zu ermitteln, da hier genügende und direkt verwertbare Vergleichungen nicht vorliegen, vielleicht auch gar nicht ausführbar sind. Indessen scheint aus den Angaben der P. D. (Publikation des Potsdamer Observatoriums XVII, Seite XXIX folgendes hervorzugehen:

Die Vergleichungen von C_{II} mit P_{45} sind zu wenig zahlreich, um berücksichtigt werden zu können, wie überhaupt für Sterne, deren $m < 4.5$ ist. Man findet nun für die Sterne $\overset{m}{5.5}$ Differenz $C_{\text{I}} - P_{44}$, etwa $+ 0.11$, während die Reduktion C_{I} auf den Hauptkatalog (S. XII) 0.00 beträgt. Also ist $PD - P_{44} = + 0.11$; da weiter $P_{44} - P_{45} = - 0.01$ (S. XXVII), so folgt $P.D - P_{45} = + 0.10$ für $m = 5.5$. Aus den Beobachtungen am Photometer D folgt: $D - P_{45} = + 0.19$ und da $P.D - D = - 0.09$, also genau dasselbe Resultat, wie aus C_{I}, nämlich $P.D - P_{45} = + 0.10$. Um also $\log A_{6.5}$ nach $P.D$ auf P_{45} zu reduzieren, müßte man nicht wie bei $m = 6.5$, die in der letzten Tabelle unter der Rubrik Diff. stehende Reduktion anbringen, sondern eine kleinere, etwa $+0.050$. Ob diese Korrektion für die Sterne $m < 5.5$ gilt, ist ebenfalls ganz zweifelhaft, aber es ist immerhin wahrscheinlich, daß sie mehr der Sachlage entspricht, als die für $m = 6.5$ gefundene, da sich öfter bei photometrischen Beobachtungen in der Nähe von $m = 5$ oder 6 Änderungen der Auffassung zeigen. Jedenfalls bleibt nichts anderes übrig, als so zu verfahren.

Um demnach P.D. auf H.R. zu reduzieren, müssen noch die Korrektionen angebracht werden, durch welche die $\log A_m$ nach P_{45} auf $H.R$ bezogen werden. Es sollen also, ohne das Problematische dieser Reduktion zu verkennen, die $\log \delta$, welche aus den direkten Abzählungen aus der P. D. hervorgegangen sind, für $m \leqq 5.5$ auf das System der H. R. reduziert werden durch die Korrektionen für die einzelnen Zonen:

$$A + 0.044, \quad B + 0.047, \quad C + 0.031, \quad D + 0.028, \quad E + 0.022.$$

Man erhält so folgende Gegenüberstellung des auf H. R. reduzierten $\log \delta$ aus PD und P_{45}, wobei unter $(PD)_0$ die unkorrigierten Logarithmen stehen:

	A			*B*			*C*		
	$(PD)_0$	$P.D$	P_{45}	$(PD)_0$	$P.D$	P_{45}	$(PD)_0$	$P.D$	P_{45}
$m = 3.5$	7.571	7.615	7.565	7.571	7.618	7.599	7.674	7.705	7.719
4.5	7.896	7.940	7.890	8.140	8.187	8.174	8.159	8.190	8.191
5.5	8.556	8.600	8.620	8.593	8.640	8.648	8.647	8.678	8.692
6.5	9.070	9.148	9.156	9.060	9.137	9.137	9.121	8.190	9.189

	D			*E*		
	$(PD)_0$	$P.D$	P_{45}	$(PD)_0$	$P.D$	P_{45}
$m = 3.5$	7.575	7.603	7.623	7.842	7.864	7.839
4.5	8.166	8.194	8.255	8.289	8.311	8.308
5.5	8.745	8.773	8.794	8.871	8.893	8.900
6.5	9.233	9.304	9.318	9.369	9.438	9.429

Die Übereinstimmung ist eine fast überraschend gute. Sie zeigt jedenfalls, daß die angewandten Korrektionen berechtigt sind, denn sie wurden keineswegs so gewählt, daß eine gute Übereinstimmung erzielt werden sollte, sondern sie wurden vor der Vergleichung festgesetzt.

Tabelle

für die Begrenzungen der Milchstrassenzonen

(Vgl. S. 491.)

35^0 bis 40^0	40^0 bis 45^0	45^0 bis 50^0	50^0 bis 55^0	55^0 bis 60^0	60^0 bis 65^0	65^0 bis 70^0	70^0 bis 75^0	75^0 bis 80^0	80^0 bis 85^0	85^0 bis 90^0
VI	VI	VI	V (V, VI) V V	V	V	V	(IV, V) (IV, V) (IV, V) IV	IV	IV	IV
VI	VI VI VI V	VI (V, VI) V V	V	V	V	V V V IV	IV	IV	IV	IV
V	V	V V V (IV, V)	V V V IV	V V IV IV	V IV IV IV	IV	IV	IV	IV	IV
IV	IV	IV	IV	IV IV IV (III, IV)	IV IV IV III	IV IV IV III	IV IV IV III	IV	IV	IV
III III III II	III III III (II, III)	III	III	III	III	III	III	III	IV III III III	IV
II II II I	II II II (I, II)	II	II	III II II II	III III II II	III	III	III	III	IV IV (III, IV) (III, IV)

δ	0^0 bis 5^0	5^0 bis 10^0	10^0 bis 15^0	15^0 bis 20^0	20^0 bis 25^0	25^0 bis 30^0	30^0 bis 35^0
$12^h\ 0^m - 12^h\ 30^m$		II	I				
$12^h\ 30^m - 13^h\ 0^m$	II	(I, II)	I	I	I	I	I
$13^h\ 0^m - 13^h\ 30^m$		II	I				
$13^h\ 30^m - 14^h\ 0^m$		II	(I, II)				
$14^h\ 0^m - 14^h\ 30^m$	II	II	II	II	(I, II)	(I, II)	I
$14^h\ 30^m - 15^h\ 0^m$	II	II	II	II	II	II	II
$15^h\ 0^m - 15^h\ 30^m$	III	(II, III)	II	II	II	II	II
$15^h\ 39^m\ \ 16^h\ 0^m$	III	III	III	III	II	II	II
$16^h\ 0^m - 16^h\ 30^m$	III	III	III	III	III	III	III
$16^h\ 30^m - 17^h\ 0^m$	IV	III	III	III	III	III	III
$17^h\ 0^m - 17^h\ 30^m$	IV	IV	IV	IV	(III, IV)	III	III
$17^h\ 30^m - 18^h\ 0^m$	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV
$18^h\ 0^m - 18^h\ 30^m$	V	IV	IV	IV	IV	IV	IV
$18^h\ 30^m - 19^h\ 0^m$	V	V	V	V	IV	IV	IV
$19^h\ 0^m - 19^h\ 30^m$	V	V	V	V	V	V	V
$19^h\ 30^m - 20^h\ 0^m$	VI	V	V	V	V	V	V
$20^h\ 0^m - 20^h\ 30^m$	VI	VI	VI	(V, VI)	V	V	V
$20^h\ 30^m - 21^h\ 0^m$	VI	VI	VI	VI	VI	(V, VI)	V
$21^h\ 0^m - 21^h\ 30^m$	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VI
$21^h\ 30^m - 22^h\ 0^m$	VII	VII	(VI, VII)	VI	VI	VI	VI
$22^h\ 0^m - 22^h\ 30^m$	VII	VII			VI	VI	
$22^h\ 30^m - 23^h\ 0^m$	VII	VII	VII	VII	VII	VI	VI
$23^h\ 0^m - 23^h\ 30^m$	VIII	VII			VII	(VI, VII)	
$23^h\ 30^m - 24^h\ 0^m$	VIII	VIII			VII	VII	

35^0 bis 40^0	40^0 bis 45^0	45^0 bis 50^0	50^0 bis 55^0	55^0 bis 60^0	60^0 bis 65^0	65^0 bis 70^0	70^0 bis 75^0	75^0 bis 80^0	80^0 bis 85^0	85^0 bis 90^0
I	I	II (I, II) II II	II	II	II	(II, III) (II, III) (II, III) III	III	III	III	(III, IV)
(I, II) II II II	II	II II II (II, III)	II II II III	II II (II, III) III	II (II, III) III III	III	III	III	III	(III, IV) (III, IV) IV IV
III III III IV	III III III IV	III	III	III	III	III	III	III	III III (III, IV) III	IV
IV IV IV V	IV IV IV V	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV
V V V VI	V	V	(IV, V) V V V	IV V V V	IV IV V V	IV	IV	IV	IV	IV
VI	VI	V V VI VI	V	V	V	V	IV	IV	IV	IV

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1912

Band/Volume: 1912

Autor(en)/Author(s): Seeliger Hugo Johann

Artikel/Article: Die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne 451-509