Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft II
Mai- bis Julisitzung.

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

K. AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN

Angenäherte Bestimmung entfernter Koeffizienten in Entwicklungen nach der mittleren Anomalie in der Theorie der Keplerschen Bewegung.

Von **R. Kleeberg.**

Vorgelegt von H. v. Seeliger in der Sitzung am 4. Juli 1914.

In einer in den Leipziger Berichten vom 31. Mai 1856 veröffentlichten und im 17. Band der Math. Annalen 1880 wiedergedruckten Abhandlung hat sich W. Scheibner damit befaßt, die asymptotischen Werte der Koeffizienten in den nach den cosinus bzw. den sinus der Vielfachen der mittleren Anomalie ζ fortschreitenden Entwicklungen der Ausdrücke

(a) $\qquad r^k \cdot \cos(l\,w + m\,u)$ und $r^k \cdot \sin(l\,w + m\,u)$

zu bestimmen, wo r der Radiusvektor, w die wahre und u die exzentrische Anomalie bedeutet, während k eine beliebige positive oder negative Zahl oder Null ist, l und m aber positive oder negative ganze Zahlen bedeuten oder eventuell auch der Null gleich sind.

Scheibner gelangt weniger mit Hilfe einer allgemeinen Methode als vielmehr mittels einiger Kunstgriffe zum Ziel, indem er durch imaginäre Substitutionen das Integral, welches die Koeffizienten darstellt, transformiert, unter dem Zeichen entwickelt und gliedweise integriert.

Im Jahre 1887 hat dann J. B. Flamme in seiner Pariser These[1]) dieselbe Aufgabe als Anwendung einer Erweiterung

[1]) Auch Bordeaux observ. ann. 2 (1887), p. 83 ff.

der von G. Darboux im J. de Math. (3) 4 (1878), Nr. 1, p. 9—20 auseinandergesetzten allgemeinen Methode zur angenäherten Berechnung von Funktionen großer Zahlen[1]) nochmals durchgeführt. Die Anwendung der Darbouxschen Methode erfordert aber eine recht komplizierte Rechenarbeit.

Auf einem einfacheren und direkteren Wege erhält man das Resultat, wenn man die von Cauchy in den C. R. 20 (1845), p. 691 = Oeuvres (1) 9, p. 84 und C. R. 38 (1854), p. 990 u. 1083 = Oeuvres (1) 12, p. 160—166 gegebene Ausdehnung der Laplaceschen Methode zur Berechnung von Funktionen großer Zahlen auf das komplexe Gebiet hier anwendet.

Auf diese Methode hat in letzter Zeit H. Burkhardt[2]) wieder aufmerksam gemacht, indem er sie zugleich näher auseinandersetzte und zur asymptotischen Darstellung der Koeffizienten der Mittelpunktsgleichung verwendete.

Auf die Aufforderung von Herrn Professor Burkhardt hin unternehme ich es in nachstehender Arbeit, die Cauchysche Methode auch auf die Entwicklung der allgemeineren Scheibnerschen Ausdrücke anzuwenden und behandle auch noch den Fall, daß die Exzentrizität der Einheit gleich wird, welcher bei Scheibner und Flamme nicht berücksichtigt worden ist. Es zeigt sich dabei mit, daß die Scheibnersche Schluß-

---

[1]) Eine Darstellung der Methode von Darboux und Flamme findet sich auch bei H. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, Bd. 1, p. 177 ff. und bei H. v. Zeipel, Entwicklung der Störungsfunktion, Artikel 13 von Bd. VI_2 der Enzyklopä die d. math. Wissenschaften, p. 642.

[2]) Münchener Sitzungsb. d. math.-phys. Kl., Jahrg. 1914, p. 1 bis 11. Wie mir Herr Professor Burkhardt mitteilte, ist die in dem Nachtrag zu seiner Note durchgeführte Berechnung der Koeffizienten der Mittelpunktsgleichung für den Fall, daß die Exzentrizität ε der Einheit nahe kommt, nur unter der Voraussetzung gültig, daß der Zähler des betreffenden Integranden zwar für die angegebene Darstellung von ε entwickelt wird, daß aber im Nenner diese Darstellung nur für das dort explizite auftretende ε verwendet wird, während der Nenner als implizite Funktion von ε für den Fall $\varepsilon = 1$ entwickelt werden darf.

formel[1]) durch mehrere Fehler entstellt und daß auch das Resultat Flammes durch ein kleines Versehen nicht ganz richtig ist.

Zunächst will ich die Cauchysche Methode folgendermaßen kurz darstellen:

Ist der Wert des Integrals

$$(1) \qquad \int_W f(u)[\varphi(u)]^n du \qquad (u = x + iy)$$

für große Werte von n längs eines Weges W zu bestimmen, so verschiebt Cauchy den Integrationsweg nach einem äquivalenten, welcher durch einen Punkt $u_0 = x_0 + iy_0$ hindurchgeht, der als senkrechte Projektion eines Sattelpunktes der über der u-Ebene ausgebreiteten Fläche des absoluten Betrags von $\varphi(u)$ auf diese Ebene angesehen werden kann. Die Richtung, in welcher der Weg durch einen solchen Punkt u_0 hindurchläuft, muß so beschaffen sein, daß dort längs des Weges der absolute Betrag der Funktion $\varphi(u)$ die Eigenschaft eines Maximums besitzt.

Die Entwicklung der in einem solchen Punkte u_0 als analytisch vorausgesetzten Funktion $\varphi(u)$ lautet dort dann im allgemeinen

$$(2) \qquad \varphi(u) = \varphi(u_0) \cdot [1 - \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \cdots],$$

wo t den Parameter der Kurve bedeutet längs welcher integriert wird, und der reelle Teil des Koeffizienten α positiv ist.

Ferner ist das Produkt

$$(3) \qquad \varphi(u) \cdot e^{\alpha t^2} = \varphi(u_0) \cdot [1 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5 + \cdots].$$

Von der Funktion $f(u)$ sei vorausgesetzt, sie lasse sich in der Nähe des betrachteten Punktes u_0 längs des Integrationsweges in eine Reihe der Form entwickeln:

$$(4) \qquad f(u) = a \cdot t^\lambda \cdot [1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \cdots],$$

wo a einen konstanten Faktor und λ eine positive oder negative Zahl bedeutet oder gleich 0 ist.

[1]) Math. Ann. 17 (1880), p. 556. Bei uns die Reihe (7a).

Dann ist

$$\int_W f(u)[\varphi(u)]^n du = \varphi(u_0)\cdot a \cdot \int_{t=-t_1}^{t=+t_2} t^\lambda \cdot (1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \cdots)$$

$$\cdot (1 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5 + \cdots)^n \cdot e^{-n\alpha t^2} dt, \tag{5}$$

wo t_1 und t_2 positive Zahlen bedeuten.

Wird nun durch die Substitution

$$n t^2 = v^2 \tag{6}$$

eine neue Integrationsvariable v eingeführt und beachtet, daß für große Werte des Arguments n nur die Teile des Integrationsweges einen merklichen Beitrag zum Integral liefern, welche dem Punkt u_0 unmittelbar benachbart sind, so ergibt sich

$$\int_W f(u)[\varphi(u)]^n du \sim \frac{\varphi(u_0)\cdot a}{n^{\frac{\lambda+1}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} v^\lambda \cdot \Big[1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}[Av + a_1 v^3]$$

$$+ \frac{1}{n}[Bv^2 + (Aa_1 + a_2)v^4 + b_1 v^6] \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}[Cv^3 + (Ba_1 + Aa_2 + a_3)v^5 + (Ab_1 + b_2)v^7 + c_1 v^9]$$

$$+ \frac{1}{n^2}[Dv^4 + (Ca_1 + Ba_2 + Aa_3 + a_4)v^6 + (Bb_1 + Ab_2 + b_3)v^8$$

$$+ (Ac_1 + c_2)v^{10} + d_1 v^{12}] + \cdots\Big] \cdot e^{-\alpha v^2} dv.$$

Die Entwicklung in eine derartige nach Potenzen von $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ fortschreitende Reihe, wobei die Koeffizienten nur eine endliche Anzahl von Summanden enthalten, ist nur deshalb möglich, weil in der Reihe (3) die Glieder mit t und t^2 durch die getroffene Wahl des Integrationsweges und durch die Multiplikation mit $e^{\alpha t^2}$ entfernt worden sind. Durch gliedweise Integration von (7) erhält man dann die gesuchte asymptotische Darstellung der Koeffizienten.

1.

Die Koeffizienten in den Entwicklungen der Scheibnerschen Ausdrücke (a) bestimmen sich, wie man leicht erkennt, durch Auswertung des Integrals

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^k \cdot e^{(l w + m u) i} \cdot e^{-n \zeta i}\, d\zeta. \tag{8}$$

Durch Einführung der exzentrischen Anomalie u als Integrationsvariable mit Hilfe bekannter Formeln geht dieses Integral über in

$$J_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (1+\beta^2)^{k+1}} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} (1-\beta e^{u i})^{k-l+1} \cdot (1-\beta e^{-u i})^{k+l+1}$$
$$\cdot\, e^{(m+l) u i} \cdot \left[e^{i(\sin\varphi \sin u - u)}\right]^n d u\,; \tag{9}$$

dabei ist die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \sin\varphi$ und $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \beta$ gesetzt worden. Die Integration findet in der $(u = x + iy)$-Ebene längs der reellen x-Achse statt. Dieser Integrationsweg W wird durch die Substitution

$$u = i \log\beta + t \tag{10}$$

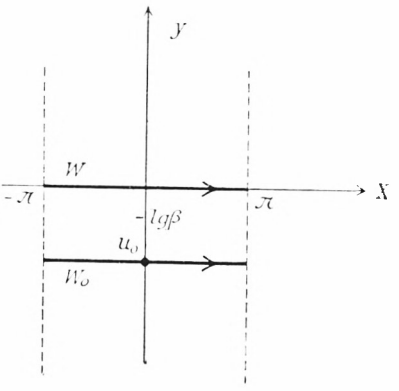

Fig. 1.

in einen äquivalenten, zu ihm parallelen übergeführt, welcher durch den Punkt $\log\beta$ des negativen Teiles der y-Achse hindurchgeht. Diesem Punkt entspricht nämlich, wie sich leicht zeigen läßt, ein Sattelpunkt der Fläche des absoluten Betrags der Funktion $\varphi(u)$:

$$z = e^{y-\sin\varphi\cos x\,\Xi\sin y} \tag{11}$$

und dieser absolute Betrag nimmt längs des Integrationsweges W_0 in diesem Punkt ein Maximum an. [Außer diesem Sattelpunkt hat der zwischen den Parallelen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ liegende Flächenstreifen noch einen zweiten, der über dem Punkt $-\log\beta$ auf dem positiven Teil der y-Achse liegt. In diesem Punkt hat aber der längs eines zur x-Achse parallelen Weges genommene absolute Betrag von $\varphi(u)$ ein Minimum.]

Durch die Substitution:

$$z = e^{-iu} \tag{12}$$

geht der Integrationsweg W_0 in einen Kreis um den Anfangspunkt der z-Ebene mit dem Radius $r = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ über, welchen Kreis bereits Cauchy zur Integration bei Entwicklungen nach der mittleren Anomalie empfiehlt.

Nach Ausführung der Substitution wird das Integral

$$J_n = \frac{\beta^{n-(m+l)}}{2\pi(1+\beta^2)^{k+1}}\int_{-\pi}^{+\pi}(1-e^{ti})^{k-l+1}\cdot(1-\beta^2e^{-ti})^{k+l+1}\cdot e^{(m+l)ti} \tag{13}$$

$$\cdot\left[e^{i(\sin\varphi\,\sin(t+i\lg\beta)-t)}\right]^n dt = \frac{\beta^{n-(m+l)}}{2\pi(1+\beta^2)^{k+1}}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)[\Phi(t)]^n\,dt.$$

Durch Multiplikation der Reihenentwicklungen für $e^{(m+l)ti}$, für

$$(1-e^{ti})^{k-l+1} = (-ti)^{k-l+1}\cdot\left[1+\frac{i}{2}(k-l+1)t-\frac{k-l+1}{24}(3(k-l)+4)t^2\right.$$

$$\left.-\frac{i(k+l+1)}{48}\cdot((k-l)(k-l+3)+2)t^3+\cdots\right] \tag{14}$$

und für

$$(15)\quad (1-\beta^2\cdot e^{-ti})^{k+l+1} = (1-\beta^2)^{k+l+1}\cdot\Big[1+i\mu(k+l+1)t + \frac{k+l+1}{2}\mu(1-(k+l)\mu)t^2 - \frac{i(k+l+1)}{6}\mu(1-3(k+l)\mu+(k+l)(k+l-1)\mu^2)t^3 + \cdots\Big],$$

wo

$$(16)\qquad \mu = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1-\cos\varphi}{2\cos\varphi}$$

gesetzt ist, ergibt sich für $f(t)$ die Darstellung:

$$(4\,a)\quad f(t) = (1-\beta^2)^{k+l+1}\cdot\binom{t}{i}^{k-l+1}\cdot[1+At+Bt^2+Ct^3+\cdots],$$

wo

$$A = i\left[m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}\right]$$

$$B = -\frac{1}{12}\left[2k+l+2+6m^2+\frac{6m(k+l+1)}{\cos\varphi}+\frac{3(k+l+1)(k+l)}{2\cos^2\varphi}\right]$$

$$C = -\frac{i}{12}\left[m(2k+l+2+2m^2)+\frac{(k+l+1)(2k+l+1+6m^2)}{2\cos\varphi} + \frac{3m(k+l+1)(k+l)}{2\cos^2\varphi}+\frac{(k+l+1)(k+l)(k+l-1)}{4\cos^3\varphi}\right].$$

Die Entwicklung der Funktion $\Phi(t)$:

$$(2\,a)\quad \Phi(t) = e^{\cos\varphi}\cdot\Big[1-\frac{\cos\varphi}{2}t^2-\frac{i}{3!}t^3+\frac{\cos\varphi(1+3\cos\varphi)}{4!}t^4 + \frac{i(1+10\cos\varphi)}{5!}t^5-\frac{10+\cos\varphi+15\cos^2\varphi+15\cos^3\varphi}{6!}t^6+\cdots\Big]$$

gibt mit derjenigen von $e^{\frac{\cos\varphi}{2}\cdot t^2}$ multipliziert die Darstellung:

$$(3\,a)\quad \begin{aligned}\Phi(t)\cdot e^{\frac{\cos\varphi}{2}\cdot t^2} &= 1+a_1t^3+a_2t^4+a_3t^5+a_4t^6+\cdots\\ &= 1-\frac{i}{6}t^3+\frac{\cos\varphi}{24}t^4+\frac{i}{120}t^5-\frac{10+\cos\varphi}{720}t^6+\cdots.\end{aligned}$$

Nach Vornahme der Substitution

$$(6\,a) \qquad n\frac{\cos\varphi}{2}t^2 = v^2$$

kann man jetzt unmittelbar die Reihe angeben, welche der unter (7) entspricht. Diese lautet, wenn wir uns damit begnügen, die Rechnung bis auf die Potenz $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ einschließlich zu treiben:

$$(7\,a)\quad 1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot i\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}\right)v-\frac{1}{3\cos\varphi}v^3\right]$$
$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\left[\left[\frac{2k+l+2+6m^2}{6}+\frac{m(k+l+1)}{\cos\varphi}+\frac{(k+l+1)(k+l)}{4\cos^2\varphi}\right]v^2\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3\cos\varphi}\left[m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}+\frac{\cos\varphi}{4}\right]v^4+\frac{1}{9\cos^2\varphi}v^6\right]$$
$$-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{i}{12}\cdot\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\left[m(2k+l+2+2m^2)+\frac{(k+l+1)(2k+l+1+6m^2)}{2\cos\varphi}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{3m(k+l+1)(k+l)}{2\cos^2\varphi}+\frac{(k+l+1)(k+l)(k+l-1}{4\cos^3\varphi}\right]v^3$$
$$-\left[\frac{m\cos\varphi}{2}+\frac{35k+25l+41+60m^2}{60}+\frac{m(k+l+1)}{\cos\varphi}+\frac{(k+l)(k+l+1)}{4\cos^2\varphi}\right]\frac{2}{\cos\varphi}\cdot v^5$$
$$\left.+\left[\frac{\cos\varphi}{12}+\frac{1}{6}\left(m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}\right)\right]\cdot\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^2\cdot v^7-\frac{1}{108}\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^3\cdot v^9\right]+\cdots.$$

Bei Scheibner sind die Koeffizienten von $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ durch mehrere Fehler entstellt. Flamme hat dies nicht bemerkt, weil er nur die beiden bei Scheibner richtigen ersten Bestandteile dieser Reihe mit seinen Resultaten verglichen hat[1]).

Mit Zuhilfenahme der Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\cdot\left(\frac{v}{i}\right)^r dv = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)},$$

[1]) Vgl. p. 7 der These.

wobei der längs der reellen Achse geführte Integrationsweg für $r < -1$ den Nullpunkt so umgeht, daß er den positiven Teil der rein imaginären Achse schneidet, läßt sich die gliedweise Integration ausführen, so daß man erhält:

$$(18)\qquad J_n = \frac{e^{n\cos\varphi}}{n^{\frac{k-l+2}{2}}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{n-m} \cdot (\operatorname{tg}\varphi)^{-l} \cdot (2\cdot\cos\varphi)^{\frac{k+l}{2}}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{l-k}{2}\right)} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(m+\frac{k+2l}{3\cos\varphi}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{l-k-1}{2}\right)} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{l-k-2}{2}\right)}\right.$$

$$\cdot\left[\frac{k+l+4m^2}{4} + \frac{m[2(k+2l)-1]}{3\cos\varphi} + \frac{4(k+2l)(k+2l-2)-3(k+l)}{36\cos^2\varphi}\right]$$

$$-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{24\cdot\Gamma\left(\frac{l-k-3}{2}\right)}\cdot\left[m[3(k+l)-1+4m^2]\right.$$

$$+\frac{10(2k+l+1+6m^2)(k+2l-1)-(k-l+5)(5k+10l-2)}{15\cos\varphi}$$

$$+\frac{m[4(k+2l)^2-12(k+2l)-(3k+3l-5)]}{3\cos^2\varphi}$$

$$\left.\left.+\frac{4(k+2l)^3-33(k+2l)^2+(9l+59)(k+2l)-24l}{27\cos^3\varphi}\right]+\cdots\right].$$

Dieses Resultat stimmt mit dem von Flamme erhaltenen überein bis auf das Glied im Koeffizienten von $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, welches $\cos\varphi$ im Nenner enthält. Der Unterschied beruht auf einem Versehen, welches Flamme bei der Zusammenziehung der beiden ersten Integrale im Koeffizient von $u^3 i$ in der Formel (8) auf p. 57 seiner These unterlaufen ist. Daß das Resultat Flammes nicht richtig ist, erkennt man auch durch Annahme der speziellen Werte $k = l = m = 0$, für welche die einzelnen Glieder in den obigen eckigen Klammern für sich verschwinden müssen.

2.

Die gewonnene asymptotische Darstellung des Integrals J_n gilt nicht mehr, wenn die Exzentrizität ε der Einheit gleich ist.

Im Falle parabolischer Bahnen verliert zwar die mittlere Anomalie ihre astronomische Bedeutung, jedoch ist es vom rein mathematischen Standpunkt aus nicht uninteressant und für die Erkenntnis der Leistungsfähigkeit der Cauchyschen Methode jedenfalls wünschenswert zu wissen, wie sich das Verfahren in diesem Falle modifiziert.

Die beiden Sattelpunkte des von den Parallelen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ eingefaßten Streifens der Fläche des absoluten Betrags von $\varphi(u)$:

$$z = e^{y - \cos x \,\mathfrak{Sin}\, y} \tag{11a}$$

sind jetzt im Nullpunkt vereinigt, für welchen neben $\varphi'(u)$ auch $\varphi''(u)$ verschwindet, während längs der x-Achse der absolute Betrag von $\varphi(u)$ den konstanten Wert Eins annimmt. Der bisher angewandte Integrationsweg wird jetzt unbrauchbar.

Aus der Gestalt jener Fläche in der Nähe der Punkte $x = y = 0$, $z = 1$ ist zu ersehen, daß der absolute Betrag von $\varphi(u)$ längs eines jeden Strahles im Nullpunkt ein Maximum annimmt, der auf der Seite der negativen y verläuft, an der x-Achse im Nullpunkt reflektiert wird und mit dem Einfallslot einen Winkel von mindestens 30^0 bildet. Jeder dieser Strahlen liefert einen brauchbaren Integrationsweg. Welcher von ihnen zu der bequemsten Rechnung führt, zeigt die Entwicklung der Funktion $\varphi(u)$ in der Nähe des Anfangspunktes. Längs eines solchen Weges ist

$$u = \lambda \cdot t$$

und

$$\varphi(t) = e^{i(\sin \lambda t - \lambda t)} = 1 - i\frac{\lambda^3 t^3}{6} + \frac{i}{120}\lambda^5 t^5 + \frac{1}{72}\lambda^6 t^6 \pm \cdots.$$

Der reelle Teil des ersten von Null verschiedenen Koeffizienten in der Entwicklung von $\varphi(t)$ nach Potenzen von t,

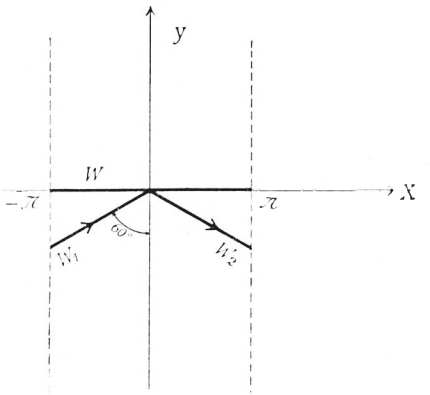

Fig. 2.

also hier von t^3, muß, soll die Cauchysche Methode angewendet werden können, negativ sein. Die bequemste Rechnung wird also durch die Annahmen

$$\lambda_1 = e^{-\frac{5\pi i}{6}} \text{ längs des einfallenden Strahls } W_1$$

$$\lambda_2 = e^{-\frac{\pi i}{6}} \text{ längs des reflektierten Strahls } W_2$$

erreicht.

Durch die Abbildung (12) der u-Ebene auf eine z-Ebene gehen die auf diese Weise bestimmten Geradenstücke in jene zwei Bogen logarithmischer Spiralen in der z-Ebene über, welche Cauchy als Integrationsweg für den Fall $\varepsilon = 1$ empfohlen hat[1]).

Die Rechnung gestaltet sich nun analog der im Fall $\varepsilon \neq 1$. Das Integral

$$J_n = \frac{1}{2^{k+2} \cdot \pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 - e^{ui})^{k-l+1} \cdot (1 - e^{-ui})^{k+l+1} \cdot e^{(m+l)ui} \cdot [e^{i(\sin u - u)}]^n \, du$$

spaltet sich in zwei Teile:

[1]) Man vergleiche die Ausführungen darüber von H. Burkhardt, a. a. O., p. 8.

$$J_n = \frac{1}{2^{k+2} \cdot \pi} \cdot \left[\int_0^{t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} (-iu_1)^{k-l+1} \cdot (iu_1)^{k+l+1} \right.$$

$$\cdot \left[1 + imu_1 - \frac{1}{12}(6m^2+k+1)u_1^2 - \frac{mi}{12}(2m^2+k+1)u_1^3 \pm \cdots \right]$$

$$\left. \cdot \left[1 - \frac{iu_1^3}{6} + \frac{iu_1^5}{120} + \frac{u_1^6}{72} \pm \cdots \right]^n du_1 + \int_0^{t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \{u_2\} \cdot du_2 \right].$$

Dabei ist

$$u_1 = \lambda_1 t = e^{-\frac{5\pi i}{6}} t$$

$$u_2 = \lambda_2 t = e^{-\frac{\pi i}{6}} t.$$

Durch Multiplikation der Reihen in den zweiten eckigen Klammern in den beiden Integranden mit den Reihen für $e^{i\frac{u_1^3}{6}}$ bzw. für $e^{i\frac{u_2^3}{6}}$ ergibt sich dann weiter nach Vornahme der Substitution:

(6 b) $$\frac{n}{6} t^3 = v^3$$

$$J_n = \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{2k+3}{3}} \cdot \frac{1}{2^{k+2} \cdot \pi} \cdot \left[\int_0^{v=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{6}}} (-iw_1)^{k-l+1} \cdot (iw_1)^{k+l+1} \right.$$

$$\cdot \left[1 + \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}} imw_1 - \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6m^2+k+1}{12} w_1^2 - \frac{6}{n} \cdot \frac{mi}{12}(2m^2+k+1) w_1^3 \pm \cdots \right]$$

$$\left. \cdot \left[1 + \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{i}{120} \cdot w_1^5 + \cdots \right]^n \cdot e^{-v^3} dw_1 + \int_0^{v=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{6}}} \{w_2\} e^{-v^3} dw_2 \right];$$

dabei bedeutet

$$w_1 = \lambda_1 v$$

$$w_2 = \lambda_2 v.$$

Nun ist:

$$\left[1 + A\frac{v}{n^{\frac{1}{3}}} + B\frac{v^2}{n^{\frac{2}{3}}} + C\frac{v^3}{n} + \cdots\right] \cdot \left[1 + a_1\frac{v^5}{n^{\frac{5}{3}}} + a_2\frac{v^6}{n^2} + \cdots\right]^n$$
$$= 1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} A v + \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \cdot [B v^2 + a_1 v^5] + \frac{1}{n} \cdot [C v^3 + (a_2 + a_1 A) v^6]$$
$$+ \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \cdot \left[D v^4 + (a_3 + a_2 A + a_1 B) v^7 + \frac{a_1^2}{2} v^{10}\right] + \cdots.$$

Wird diese Umformung auf die Produkte der beiden Reihen in jedem der beiden Integrale in dem Ausdrucke für J_n angewendet, so nimmt dieser die Form an:

$$J_n = \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{2k+3}{3}} \cdot \frac{(-1)^l}{2^{k+2} \cdot \pi} \cdot \left[-e^{-\frac{5\pi i}{3}(k+1)} \cdot \lambda_1 \int_0^\infty v^{2k+2} \cdot \left[1 + \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot i m w_1\right.\right.$$
$$- \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left[(6m^2 + k + 1) w_1^2 - \frac{i \cdot 3}{5} w_1^5\right]$$
$$\left. - \left(\frac{6}{n}\right) \cdot \frac{m}{12} \cdot \left[i(2m^2 + k + 1) w_1^3 + \frac{3}{5} w_1^6\right] + \cdots\right] e^{-v^3} \cdot dv$$
$$\left. + e^{\frac{5\pi i}{3}(k+1)} \cdot \lambda_2 \int_0^\infty v^{2k+2} \{w_2\} e^{-v^3} dv\right].$$

Durch gliedweise Integration vermittelst der Formel

$$\int_0^\infty t^r e^{-t^3} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right)$$

und Zusammenziehung ergibt sich dann für J_n der gesuchte Ausdruck:

$$J_n = \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{2k+3}{3}} \frac{(-1)^l}{2^{k+1} \cdot 3 \cdot \pi} \cdot \left[\sin\frac{5\pi}{3} k \cdot \Gamma\left(\frac{2k+3}{3}\right)\right.$$
$$+ \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot m \cdot \sin\frac{5\pi}{3}(k+1) \cdot \Gamma\left(\frac{2k+4}{3}\right)$$
$$+ \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{10m^2 + k}{20} \sin\frac{5\pi}{3}(k+2) \Gamma\left(\frac{2k+5}{3}\right)$$
$$\left. - \frac{1}{n} \cdot \frac{m(10m^2 + 3k - 1)}{10} \sin\frac{5\pi}{3} k \Gamma\left(\frac{2k+6}{3}\right) \pm \cdots\right],$$

welcher bei Benutzung der Relation:

$$\Gamma(\mu)\cdot\Gamma(1-\mu)=\frac{\pi}{\sin\mu\pi}$$

auch in der Form geschrieben werden kann

$$J_n=\binom{6}{n}^{\frac{2k+3}{3}}\cdot\frac{(-1)^{l+1}}{3\cdot 2^{k+1}}\cdot\left[\frac{\sin\frac{5k\pi}{3}}{\sin\frac{2k\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k}{3}\right)}\right.$$

$$+\binom{6}{n}^{\frac{1}{3}}\cdot m\cdot\frac{\sin\frac{5k+1}{3}\pi}{\sin\frac{2k+1}{3}\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k-1}{3}\right)}$$

$$+\binom{6}{n}^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{10m^2+k}{20}\cdot\frac{\sin\frac{5k+2}{3}\pi}{\sin\frac{2k+2}{3}\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k-2}{3}\right)}$$

$$\left.+\frac{1}{n}\cdot\frac{m(10m^2+3k-1)}{10}\cdot\frac{\sin\frac{5k\pi}{3}}{\sin\frac{2k\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k-3}{3}\right)}+\cdots\right].$$

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1914

Band/Volume: 1914

Autor(en)/Author(s): Kleeberg Rudolf

Artikel/Article: Angenäherte Bestimmung entfernter Koeffizienten in Entwicklungen nach der mittleren Anomalie in der Theorie der Keplerschen Bewegung 191-204