Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

J. H. Lamberts Stellung zum Raumproblem und zur Parallelentheorie in der Beurteilung der Zeitgenossen.

Von **K. Bopp**, Heidelberg.

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 5. Dezember 1914.

J. H. Lamberts Abhandlung „Theorie der Parallellinien" wurde bekanntlich von Paul Stäckel in ihrem entscheidenden Wert für die Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie erkannt und in seiner „Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie in Gemeinschaft mit Friedrich Engel herausgegeben von Paul Stäckel, Leipzig, Teubner 1895" auf den Seiten 150—208 leicht zugänglich gemacht. Leider ist das Originalmanuskript noch immer verschollen, nur über den Umfang desselben belehrt uns ein Blatt, das Lamberts Monatsbuch, welches wir demnächst mit erläuternden Anmerkungen zu veröffentlichen beabsichtigen, vorhergeht. Dort hat Lambert einen kurzen eigenhändigen Überblick über seine Manuskripte gegeben; nach demselben umfaßte das Manuskript der Parallelentheorie 53 4°-Seiten. Über das von ihm in der Herzoglichen Bibliothek zu Gotha aufgefundene Tagebuch hat Stäckel in der „Bibliotheca mathematica" vorläufig berichtet, 1899, S. 107—110 („Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien") und über Lamberts Arbeit und ihre Entstehung interessante Aufschlüsse gegeben. Wir möchten hier einige weitere Notizen hinzufügen als Frucht unserer eingehenden, auf P. Stäckels Anregung selbst angestellten Lambertstudien.

Lamberts Arbeit, die zu einem so wichtigen Dokumente der Erkenntnistheorie geworden, erschien posthum von Johann Bernoulli III, herausgegeben zuerst im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von J. Bernoulli und C. F. Hindenburg im 2. Stück 1786 S. 137—164 und im 3. Stück S. 325—358. Eine Rezension aus der Feder C. Leistes (Anonym. Sign.[1]) Qt.) brachte die „Allgemeine Deutsche Bibliothek" im 74 Bde. S. 174. Sie lautet: „Die Abhandlungen im zweyten Stück sind 1) Theorie der Parallellinien von J. H. Lambert. Der sel. Lambert sucht den berüchtigten 11. Grundsatz des Euklids, der doch so sehr eines Beweises bedarf, dadurch zu rechtfertigen, dass er dieses zu einem Grundsatz des Euklids macht: alle Sätze und Erklärungen solange als bloße Hypothesen gelten zu lassen, und nichts eher daraus zu beweisen, als sie selbst erwiesen sind. In sofern kann dieser 11. Grundsatz seinen Platz immer behalten, denn er ist an sich möglich, und Euklid beweiset nichts eher daraus, als bis er die Lehrsätze von den Parallelen erwiesen. Übrigens fügt Lambert sehr sinnreiche Betrachtungen hinzu, aus welchen dieser Grundsatz für sich als Folge anderer Euklidischer Sätze könne erwiesen werden" und „Allgemeine Deutsche Bibliothek" 74 Bd. 1787 S. 469 über die „Fortsetzung" (Magazin S. 325—358):

„Die zweyte [Abhandlung] ist eine Fortsetzung von Lamberts Theorie der Parallelinien. Wenn durch eine Gerade AB zwey Parallelen dD und cC rechtwinklicht gezogen werden und man zieht auf beiden Seiten der AB in beliebigen aber gleichen Entfernungen auf cC die lothrechten Linien CD und cd, so wird man, wenn bey d und D auch rechte Winkel

[1]) Den Schlüssel für die Signaturen der anonymen Rezensenten in der Allgem. Deutschen Bibliothek lieferte uns:

Parthey, Die Mitarbeiter an Fr. Nicolais Allgemeiner Deutscher Bibliothek, Berlin 1842;

Chr. Leiste (geb. 1738 zu Lotschau, gest. 21. Febr. 1815), Rektor der großen Schule zu Wolfenbüttel und Mitarbeiter Lessings am 6. Literaturbeitrag (am Problema bovinum).

sind, 2 sich deckende Parallelogramme bekommen. Es ist aber die Frage, ob bei d oder D rechte Winkel entstehen? Um das zu untersuchen, muss man 3 Hypothesen annehmen: Entweder ist $D = R$, oder $D < R$ oder $D > R$. Jede dieser Hypothesen wird untersucht, und da auf der Richtigkeit der ersten der Beweis des Satzes sich gründet, so muss die Unrichtigkeit der beyden andern gezeigt werden. Das ist aber nicht mit der in der Geometrie erforderlichen Evidenz geschehen. Der sel. Lambert muss dies selbst bemerkt haben und vermuthlich hat er deshalb seine Methode nicht bekannt gemacht. So urtheilt auch Hr. H. [Hindenburg] in der dritten Abhandlung, wo er noch etwas über die Parallelen beybringt. Sie begreift 4 Stücke 1) Eine kurze Anzeige oder Beurtheilung der Lambert'schen Theorie, die bey dem Mangelhaften, das man nicht verkennen kann, doch noch soviel Gepräge des fruchtbaren Genies und so manche nutzbare Betrachtung enthält, dass sie immer noch verdiente bekannt gemacht zu werden." Es folgen dann weitere Rezensionen von Schriften über das Parallelenproblem.

Sehen wir so Lamberts Arbeit im Urteil der Zeit, so bieten seine eigenen Besprechungen in der „Allgemeinen deutschen Bibliothek" von einschlägigen Untersuchungen ein noch weit höheres Interesse. Stäckel hat in den vorgenannten „Bemerkungen" schon die zu Lorenz' (anonymer) Übersetzung der 6 ersten Bücher des Euklid von 1773, sowie die von K. Scherffers Schriftchen: Briefe über einen Entwurf der sphärischen Geometrie", Wien 1775, wiedergegeben. Drei weitere bringen wir hier zum Abdruck.

1. Über Scherffer, K., Institutionum geometricorum pars prior sive geometria elementaris, Wien in 4° 1770 äußert sich Lambert A. D. B. 18. Bd. I. St. S. 240: „In der Elementargeometrie hat er sich vorgesetzt in Ansehung der Ordnung dem La Caille [s. Stäckel, P., Zur Bibliographie der Parallelentheorie, B. M. 1899, Neue Folge 13, S. 47, La Caille, Nicolas Louis de, Leçons élémentaires de mathématiques, Paris 1741 (erwähnt bei Cammerer)]

zu folgen, ohne jedoch der Schärfe in Beweisen, welche bey den Alten so sehr gerühmt wird, etwas zu vergeben. Wir haben daher nachgesehen, wie er sich in Ansehung der bekannten Schwürigkeit bey den Parallellinien aushilft. Er sagt z. B. S. 8 die Neigung einer Linie gegen die andere sey ein einfacher Begriff und müsse eben deswegen nicht erklärt werden. Eine gerade Linie, die auf (gleicher Ebene) sich durchaus nicht gegen eine andere neigt, ist mit derselben parallel. Wird eine Perpendiculärlinie längs der Linie, auf welcher sie perpendiculär ist, fortgeschoben, so legt jeder Punkt derselben einen gleich grossen Weg zurück e. c. t. Diese Vorstellungsart hat wenigstens viel, das sich durch das Beispiel zweyer Wagenräder, zweener Reisender e. c. t. sehr fasslich machen lässt."

2. Zu Ebert J. J., Nähere Unterweisung in den philosophischen und mathematischen Wissenschaften für die oberen Klassen der Schulen und Gymnasien 1773 in 8°, Frankfurt und Leipzig bey Herlet, 36 Bogen Text und ein halber Bogen Kupferbl.[1]) in der A. D. B. 23. Bd. 2 St. 1774 S. 267/68 bemerkt Lambert: „Die Geometrie ist ebenfalls mit den Beweisen versehen und besonders findet

[1]) Die „Nähere Unterweisung" war sehr verbreitet: 2. Aufl. 1779, 3. Aufl. 1787, 4. Aufl. 1799. In der 1. Aufl. S. 51—59: Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt; S. 59—207: Die Arithmetik. S. 207 bis 333: Die Geometrie. I. Cap.: Erklärungen und Grundsätze; II. Cap.: Von den Linien, Winkeln und Figuren in Ansehung ihrer Gleichheit; III. Cap.: Von der Ausmessung der Figuren; IV. Cap.: Von der Ähnlichkeit der Figuren; V. Cap.: Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde; VI. Cap.: Von den Körpern. Nachdem Ebert I. Cap. § 10 eine erste Definition der Parallelinien gegeben, wobei er sich auf die Anschauung beruft, spricht er § 59 des II. Cap. den Satz aus: Gerade, die auf der einen Seite einer Transversalen innere Winkel bilden $= 2R$, sind parallel, denn sonst hätten sie mit gleichem Recht auf der andern Seite der Transversale noch einen Punkt gemein, was gegen Cap. II § 31 verstößt: Gerade schließen keinen Raum ein (Prinzip des Ptolemaeus).

Später hat J. J. Ebert den Parallelen noch eine besondere Schrift gewidmet: Programma academium de lineis parallelis, Wittenberg 1792, 4°, 14 pp.

sich der bestrittene Grundsatz der Parallellinien § 60 am behörigen Orte, wo er sich nemlich am deutlichsten begreifen lässt."

Eine wahrhaft klassische Stellungnahme zum Raumproblem aber enthält die Besprechung A. D. B. 29 Bd. S. 198 des Anonymus:

3. Über die allgemeine spekulative Philosophie", Bützow und Weimar, 6 Bogen, 1775, 8^{0}. „Der Verfasser merkt inzwischen mit Recht an, dass ohne Rücksicht auf diese Streitigkeiten gefragt werden kann, was und wieviel der Verstand von solchen Begriffen, wie die von Zeit, Raum, Kraft e. c. t. sind, eigentlich besitze oder genauer zu reden, ob oder wiefern diese Begriffe die Dinge selbst vorstellen? Nach S. 64 wird diese Frage in eine andere aufgelöset, ob die Empfindung des Raums, soferne nemlich der Raum sich empfinden lässt, eine reine Empfindung sey? Es ist nun an dem, dass wir auf der Erdfläche den Raum zugleich mit einer Reyhe von Körpern sehen, aber von einem Bergegipfel zum andern durch die Luft durch sehen wir doch wohl nicht mehr als den Abstand, den Zwischenraum rein weg. Überdies wird der Begriff des Raumes nirgends reiner als in der Geometrie gedacht. Soweit würde also nach S. 64 dieser Begriff ein brauchbares Bild, ein richtig bedeutendes Zeichen seyn. Mit allem dem könnte er ein blosser Schein, oder wie es S. 84 heisst ein verwirrter Verstandesschein seyn. Wer dieses behauptet, wird müssen dem Copernicus nachahmen, das wahre System angeben, dessen Wirklichkeit beweisen und noch zeigen, wie sich alle Erscheinungen daraus erklären lassen, woher z. B. der Raum oder auch die Ausdehnung der Körper sich unter dem Bilde von drey Dimensionen zeigt, was in den Körpern ist, das diesen Dimensionen so genau entspricht, dass trotz aller geometrischen Schärfe und Evidenz, noch nicht das geringste hat gefunden werden können, wodurch sich dieser Schein als Schein verraten hätte?"

Man hat oft schon betont, daß mit einer scharfen und präzisen Formulierung eines Problems die Eroberung der Lösung schon gewährleistet wird, und der gewaltige Fortschritt Lamberts zu C. F. Gauß hin springt in die Augen, wie seine gegensätzliche Stellung zu Kant. Die oft gekennzeichnete Skepsis Kaestners, die wir etwa mit einer Belegstelle aus dem Briefwechsel mit J. F. Pfaff belegen können, erscheint hier überwunden. Diese Briefstelle lautet: Kaestner an Pfaff, Göttingen, 2. August 1789 (Auszüge aus Briefen von J. F. Pfaff an Herzog Carl von Württemberg, F. Bouterwek, A. von Humboldt, A. G. Kaestner und Andere, Leipzig 1853) „Mit der Geschichte der Lehre von den Parallelen werden Sie am besten tun sich nicht einzulassen: man muss darüber so gar viel Unnützes lesen. Ich habe viel Zeit damit verderben müssen; weil ich aber mit den Dingen sehr bekannt bin, finde ich immer gleich, wo der Fehler steckt. Eigentlich haben wir noch keine Definition von einer geraden Linie, sondern nur Ausdrückungen des klaren Begriffs von ihr, den uns die Sinne geben." Und im 82. Bande der „Allgemeinen „Deutschen Bibliothek, S. 157 schließt Kaestner eine Rezension von Gensichen J. F., Bestätigung der Schulzeschen Theorie der Parallelen und Widerlegung der Bendavidschen Abhandlung über die Parallelen, Königsberg, 8⁰, 1786 in gleichem Sinne mit den Worten: „Möchten doch die Paralleltheoristen eine jetzige Plage den Geometern, wie die Cirkelquadrierer waren, erst geometrische Deutlichkeit und Evidenz durch fleissiges Studieren Euklids recht kennen lernen, ehe sie ergänzen wollen, was Euklid nicht zu ergänzen wusste."

Zwischen Kaestner und Lambert mitten drinnen steht L. Fr. Meister.[1]) Er sagt in der Besprechung von Johann Bern-

[1]) Albrecht Ludwig Friedrich Meister (1724—1788), war seit Tob. Mayers Tode und Lowitzs Fortgang 1764 Professor der angewandten Mathematik zu Göttingen. In der Abhandlung: de genesi et affectationibus figurarum planarum Novi Com. soc. reg. Gott. 1 (s. 770), welche sogar Gauß' Aufmerksamkeit erregte, hat er zum erstenmale systematisch den Gedanken durchgeführt, den Flächeninhalt von Figuren je nach dem Umlaufsinn der Kontur positiv oder negativ zu rechnen. Außerdem

hard Basedows bewiesenen Grundsätzen der reinen Mathematik: (A. D. B. 25. Bd. S. 518): „Dass zwei Triangel (oder jede andere Figuren) sich decken, wenn ihre Figuren (so nennet der Herr Verfasser ihre Gränzen) sich decken, wird hier, so wie auch von andern blos angenommen, nicht bewiesen. Es sollte aber billig geschehen, da es bei unebenen Figuren wahr oder falsch seyn kann, bei ebenen aber immer wahr ist.“ Ferner zu S. 23: „Denn daraus, dass in einem Dreyeck mit einem rechten Winkel die gegenüberliegende Seite grösser ist als die andern, folget gar nicht, dass kein Dreyeck zween rechte Winkel haben könnte, und dass sonst von zweyen Seiten jede die grösste unter allen Dreyen seyn müsste. In einem sphärischen Dreyeck mit einem rechten und zween spitzigen Winkeln, ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite grösser als jede der beyden andern: in einem sphärischen Dreyeck mit zween rechten und einem spitzigen Winkel ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nicht grösser als jede der beyden andern. Hierin liegt aber kein Widerspruch, aus dem sich die Unmöglichkeit zweyer rechten Winkel in einem Dreyecke dartun liesse. Der Bürgermeister ist der Vornehmste im Rath, aber können des wegen nicht zween Bürgermeister sein, weil sonst jeder der Vornehmste seyn müsste“ und zu S. 26: „Mit dem Lehrsatz von den Parallelen ist der Herr Verfasser sehr bald fertig; sie nähern sich niemals, weil sie sonst endlich zusammenlaufen müssten, als wenn es keine Linien gäbe, die sich ohne Ende näherten! Daher ist jeder Punkt der einen soweit von der andern entfernt, als jeder Punkt der andern von dieser. (Wahr! aber keine Folge des Vorhergehenden.)“ (Sp.=Meister aus Göttingen nach Parthey.)

hat Meister noch viele wertvolle Arbeiten in den Comment. der Societät publizirt und 25 Jahre mit großem Erfolg neben Kaestner dozirt. Vergl. C. H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik in Göttingen. Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, begründet von M. Cantor, XVII. Heft, Leipzig 1903, S. 51—143. Siehe auch Günther, Verm. Unters. z. Gesch. d. math. Wissensch., Leipzig 1876, Kap. I.

Diese noch nicht wieder ins Licht gerückten Auslassungen dreier hervorragender Denker einer großen, erkenntnistheoretisch eminent interessierten Epoche führen uns mitten hinein in das Ringen um den Begriff der geraden Linie und das große Problem der Raumauffassung, das sich nach Leibniz' Zeugnis (Nouveaux Essais Lib. IV ch. 12 p. 418, Raspes Ausgabe von 1765) herleitet aus dem klassischen Altertum: „Archimed setze voraus, die gerade Linie, von der er redet, sei eben dieselbe, von der Euklids Grundsätze reden", bis es in der Schöpfung der Nichteuklidischen Geometrie Beruhigung und Klärung fand.