Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1916
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die algebraisch rektifizierbaren Kurven im Nicht-Euklidischen Raum.

Von **Ludwig Berwald.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 8. Januar 1916.

Methoden zur Bestimmung aller algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien, d. h. aller algebraischen krummen Linien, deren Bogen algebraisch durch die Werte der Koordinaten seiner Endpunkte ausgedrückt werden kann, verdankt man, für den dreidimensionalen Euklidischen Raum, den Herren Darboux, Stäckel, Salkowski.[1]) Herr Salkowski geht von einem Formelsystem aus, mittels dessen Herr de Montcheuil[2]) die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen gelöst hat. Ein anderes, verwandtes[3]) Formelsystem, welches das Gleiche leistet, hatte Herr de Montcheuil schon früher angegeben.[4])

---

[1]) G. Darboux, Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues. J. math. p. appl. (4), 3 (1887), 305—325; P. Stäckel, Über algebraische Raumkurven. Math. Ann. 45 (1894), 341—370; E. Salkowski, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven. Math. Ann. 67 (1909), 445—458.

[2]) M. de Montcheuil, Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Bull. Soc. Math. France 33 (1905), 170—171.

[3]) Vgl. hierüber des Verfassers Abhandlung: „Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden." Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. K. Akad. München 1913, 143—211, wo man in § 10 (S. 179 ff.) auch weitere Literaturangaben findet.

[4]) M. de Montcheuil, Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis. Bull. Soc. Math. France 31 (1903), 233

In der vorliegenden Abhandlung werden die entsprechenden Aufgaben für den dreidimensionalen elliptischen Raum vom Krümmungsmaße $\frac{1}{k^2}$ (k reelle Konstante) und der absoluten Fläche:

$$\text{(a)} \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

erledigt. Es wird also:

1. die Gleichung

$$d x_0^2 + d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2 = d s^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen gelöst, wenn die x_i der Nebenbedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = k^2$$

genügen;[1]) und:

2. die Bestimmung aller algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien im betrachteten elliptischen Raume geleistet.

Auch hier folgt die Lösung des zweiten Problems unmittelbar aus derjenigen des ersten.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß die Wahl gerade eines elliptischen Fundamentalraumes bei der Erledigung der vorgelegten Probleme völlig unwesentlich ist. In der Tat führen, wie bekannt, die Substitutionen:

$$x_0' = i x_0, \quad x_i' = x_i \ (i = 1, 2, 3), \quad k' = i k$$

den betrachteten elliptischen Raum in den hyperbolischen Raum von Krümmungsmaß $-\frac{1}{k'^2}$ und der absoluten Fläche:

$$\text{(b)} \qquad x'^2_0 - x'^2_1 - x'^2_2 - x'^2_3 = 0$$

über. Ebenso ist auch die besondere Form (a) der Gleichung der absoluten Fläche unwesentlich, und nur der formalen Be-

—258; 32 (1904), 152—185. Das betreffende Formelsystem findet man in Bd. 31, S. 235.

[1]) Von der trivialen Lösung, die durch die Nicht-Minimalgeraden des elliptischen Raumes geliefert wird, sehen wir dabei ab.

quemlichkeit halber gewählt. Demnach lassen sich ohne besondere Schwierigkeit aus den im Texte gegebenen Formeln die entsprechenden für den hyperbolischen Raum oder für eine andere Form der Gleichung der absoluten Fläche ableiten.

I. Die krummen Linien auf der absoluten Fläche und die krummen Minimallinien.

1. Wir legen unseren Betrachtungen den elliptischen Raum vom Krümmungsmaße $\frac{1}{k^2}$ (k reelle Konstante) zugrunde, dessen absolutes Polarsystem durch die Gleichung:

$$(1) \qquad (xy) \equiv x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

in den homogenen Punktkoordinaten x_i und y_i ($i = 0, 1, 2, 3$) zweier Punkte gegeben ist. Zwei Punkte x, y, die dieser Gleichung genügen, heißen zueinander orthogonal. Die nullteilige Fläche 2. Ordnung:

$$(2) \qquad (xx) \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

der Ort aller zu sich selbst orthogonalen Punkte, ist die absolute Fläche des elliptischen Raumes.

Zur Darstellung eines „eigentlichen", d. h. nicht auf der absoluten Fläche (2) liegenden (reellen oder komplexen) Punktes x benutzen wir normierte Punktkoordinaten, d. h. vier Größen x_0, x_1, x_2, x_3, welche durch die Gleichung:

$$(3) \qquad (xx) = k^2$$

verknüpft sind. Sie sind, bis auf den gemeinsamen Faktor -1, vollkommen bestimmt.[1]

Ebenso kann man zur Darstellung einer „Nicht-Minimalebene", d. h. die absolute Fläche nicht berührenden (reellen oder komplexen) Ebene u normierte Ebenenkoordinaten benutzen, d. h. vier Größen u_0, u_1, u_2, u_3, welche durch die Gleichung:

$$(4) \qquad (uu) \equiv u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = k^2$$

[1] (x_0, x_1, x_2, x_3) und ($-x_0$, $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$) stellen also denselben Punkt dar.

verbunden und dadurch, bis auf den gemeinsamen Faktor -1, bestimmt sind.

Die Ebene x ist dann die absolute Polarebene des Punktes x.

Weiterhin werden, woferne nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, stets nur eigentliche Punkte und Nicht-Minimalebenen betrachtet.

Außer Punkten und Ebenen spielen im folgenden vor allem analytische Kurven, bzw. Stücke von solchen, eine Rolle. Bei ihrer Darstellung setzen wir voraus, daß die normierten Koordinaten eines Kurvenpunktes analytische Funktionen eines Parameters sind, die (mindestens) ein gemeinsames Existenzbereich besitzen und sich nicht sämtlich auf Konstante reduzieren. Differentiation nach dem Parameter deuten wir durch Akzente an. Wir beschränken uns dabei durchaus auf die regulären Kurvenpunkte x, d. h. auf diejenigen, für welche eine derartige (reguläre)[1]) Parameterdarstellung existiert, daß mindestens einer der vier Differentialquotienten x_i' $(i = 0, 1, 2, 3)$ nicht verschwindet.

2. Sei nun insbesondere eine krumme Minimallinie M des betrachteten elliptischen Raumes vorgelegt. Ihre Tangenten, und ebenso ihre Schmiegungsebenen, berühren die absolute Fläche in den Punkten einer unebenen krummen Linie A, die der Minimallinie umkehrbar eindeutig zugeordnet ist: die Tangentialebenen der absoluten Fläche längs der Kurve A umhüllen eine Regelfläche, deren Gratlinie die Minimallinie M ist.[2])
In jedem Punkte der Kurve A sind die Tangente dieser Kurve und die zugehörige Tangente der Minimalkurve M absolutpolare Geraden. Wir wollen die beiden Kurven A und M zueinander zugehörig nennen.

[1]) Ein Parameter τ heißt an der Stelle $\tau = 0$, $x_i = x_i^0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ regulär, wenn in der Umgebung der Stelle für jede der Koordinaten eine einzige Reihenentwickelung nach ganzen Potenzen von τ existiert (immer abgesehen vom gemeinsamen Faktor -1).

[2]) Die Tangentialebenen der absoluten Fläche längs einer ebenen krummen Linie derselben gehen bekanntlich alle durch den absoluten Pol der Ebene dieser Linie: sie umhüllen einen Minimalkegel.

Seien jetzt die Koordinaten eines Punktes x der Linie M in der oben (Nr. 1) angegebenen Weise als Funktionen des Parameters τ gegeben. Wir können dann die Gleichung:

$$(5) \qquad (xt) \equiv x_0 t_0 + x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 = 0,$$

wo die t_i Koordinaten einer willkürlichen Ebene (oder ihres absoluten Poles) bedeuten, als Gleichung des Punktes x ansehen. Die Koordinaten von x genügen der Gleichung (3) und außerdem, da die Linie M eine Minimallinie ist, der Identität:

$$(6) \qquad (x'x') \equiv 0, \qquad \{\tau\}.$$[1]

Ein beliebiger Punkt y der Kurventangente im Punkte x hat die Gleichung:

$$(7) \qquad (yt) \equiv \pi(xt) + \varkappa(x't) = 0.$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt y der absoluten Fläche (2) angehört, ergibt sich sofort $\pi = 0$. M. a. W.: Die zur krummen Minimallinie (5) gehörige Kurve A auf der absoluten Fläche hat die Gleichung:

$$(8) \qquad (yt) \equiv \varkappa(x't) = 0,$$

wo $\varkappa$ einen (innerhalb unserer Festsetzungen) willkürlich bleibenden Proportionalitätsfaktor bedeutet. Wir nennen die Kurve (8) auch das absolute Bild der Kurve (5).

3. Wir wollen jetzt, umgekehrt von einer unebenen, krummen Linie A auf der absoluten Fläche ausgehend, für die zu A zugehörige Minimallinie M eine Parameterdarstellung angeben, die frei von Integralzeichen ist.

Wir stellen dazu die Kurve A in Punktkoordinaten y durch:

$$(9) \qquad \begin{aligned} y_0 &= -\varrho i(lr+1), & y_1 &= \varrho(l+r), \\ y_2 &= \varrho i(l-r), & y_3 &= \varrho(lr-1) \end{aligned}$$

mit der Nebenbedingung:

$$\varrho \cdot l' \cdot r' \neq 0, \qquad \{\tau\}$$

[1] D. h. $(x'x') \equiv 0$ für alle (regulären) τ.

dar, wo l, r, ϱ drei analytische Funktionen eines Parameters τ mit gemeinsamem Existenzbereich bedeuten.

Man kann insbesondere l oder r selbst als Parameter wählen. Wir nennen dann l den linken, r den rechten Normalparameter.[1])

Beziehen wir alles etwa auf den rechten Normalparameter r als unabhängige Veränderliche, so reduziert sich die Nebenbedingung auf:

$$\frac{dl}{dr} \cdot \varrho(r) \not\equiv 0, \qquad \{r\}. \tag{10}$$

Wir bezeichnen ferner noch, wie üblich, mit $\{l, r\}$ den Schwarzschen Klammerausdruck:

$$\{l, r\} \equiv \frac{2\,l' \cdot l''' - 3\,l'' \cdot l''}{2\,l' \cdot l'}.$$

Die Kurve (9) ist bekanntlich dann und nur dann eben, wenn

$$\{l, r\} \equiv 0, \qquad \{r\} \tag{11}$$

ist. Wir setzen demnach bis auf weiteres voraus, daß (11) für die krumme Linie (9) nicht erfüllt sei, und schließen auch alle Stellen dieser Kurve von der Betrachtung aus, für welche der Schwarzsche Klammerausdruck verschwindet.

Faßt man in (9) die y nicht als Koordinaten eines Punktes, sondern als solche einer Ebene auf, so stellen jetzt die Gleichungen (9) in Ebenenkoordinaten die Tangentenfläche derjenigen krummen Minimallinie M dar, deren absolutes Bild die

---

[1]) Über die Begriffe „links“ und „rechts“ in der elliptischen Geometrie vgl. die grundlegende Arbeit von E. Study (Beiträge zur Nicht-Euklidischen Geometrie II.), Amer. J. math., 29 (1907), 116—159. Der Name „Normalparameter“ stammt unseres Wissens von Herrn Eisenhart, der damit den Parameter in der einleitungsweise erwähnten de Montcheuilschen Kurvendarstellung bezeichnet. (L. P. Eisenhart, A fundamental parametric representation of space curves, Ann. Math. (2) 13 (1912), 17—34.) — Durch $l =$ konst., bzw. $r =$ konst., sind die „linksseitigen“, bzw. „rechtsseitigen“ Erzeugenden der absoluten Fläche — bis auf je eine — gegeben.

Kurve A ist. Um die Gleichungen von M in Punktkoordinaten x zu erhalten, setzen wir zunächst $\varrho = 1$, und haben dann:

$$(12) \qquad (x\,t) \equiv \sigma(y\,y'\,y''\,t) = 0;$$

hierin bedeutet der Klammerausdruck rechts die Determinante $|y_0 y_1' y_2'' t_3|$, und σ einen Proportionalitätsfaktor, der sich aus der Identität

$$(x\,x) = k^2$$

bestimmt. Eine leichte Rechnung ergibt für σ den Wert[1])

$$\sigma = -\frac{i}{8}\cdot\frac{k}{l'\sqrt{l'}}$$

und für die einzelnen Koordinaten x_i selbst:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{k}{4}\,\dfrac{1}{l'\sqrt{l'}}\,\{l''(l\,r+1) - 2\,l'(l'\,r - l)\}, \\[2ex] x_1 = i\,\dfrac{k}{4}\,\dfrac{1}{l'\sqrt{l'}}\,\{l''(l+r) - 2\,l'(l'-1)\}, \\[2ex] x_2 = -\dfrac{k}{4}\,\dfrac{1}{l'\sqrt{l'}}\,\{l''(l-r) - 2\,l'(l'+1)\}, \\[2ex] x_3 = i\,\dfrac{k}{4}\,\dfrac{1}{l'\sqrt{l'}}\,\{l''(l\,r-1) - 2\,l'(l'\,r - l)\}. \end{cases}$$

Die Indices zeigen dabei Differentiation nach r an.

Die Gleichungen (I) stellen, so lange nicht:

$$\{l, r\} \equiv 0, \qquad \{r\}$$

ist,[2]) die Koordinaten einer beliebigen krummen Minimallinie des betrachteten elliptischen Raumes

---

[1]) σ, und ebenso weiter unten ϱ, usw., ist natürlich nur bis auf den Faktor -1 bestimmt.

[2]) Ist
$$l' \mp 0, \qquad \{l, r\} \equiv 0, \qquad \{r\}$$
d. h. also
$$l = \frac{a\,r + b}{c\,r + d}, \quad (a\,d - b\,c \mp 0),$$
wo a, b, c, d Konstante bedeuten, so stellen die Gleichungen (I) überhaupt keine Kurve, sondern einen festen Punkt dar. (Vgl. S. 15, (27)).

ohne jedes Integralzeichen in Funktion des rechten Normalparameters dar.

Wir fragen schließlich noch, wie man in den Gleichungen (9) den Faktor ϱ zu bestimmen hat, damit gerade:

$$(8^*) \qquad (y\,t) \equiv (x'\,t), \qquad \{r\}$$

ist. Differentiation irgend einer der Gleichungen (I) ergibt sofort:

$$(13) \qquad \varrho = i\frac{k}{4}\,\frac{\{l,r\}}{\sqrt{l'}}.$$

4. Wir hätten die Gleichungen (I) auch aus einem System von Formeln ableiten können, mittels deren Herr de Montcheuil die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen gelöst hat.[1]) Wegen der Wichtigkeit dieser Formeln für die Bestimmung der algebraisch rektifizierbaren algebraischen Kurven des Euklidischen Raumes wollen wir auch diese Ableitung der Gleichungen (I) geben.

Durch die Substitution:

$$s = i x_0, \quad x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$

geht die obige Gleichung in die Definitionsgleichung

$$(6^*) \qquad (dx\,dx) = 0$$

der Minimalkurven unseres elliptischen Raumes in normierten Punktkoordinaten x über. Als Lösungen von (6*) folgen aus den de Montcheuilschen Formeln:[2])

[1]) A. a. O. (Bull. Soc. Math. France 33). — Dieser im Texte ausgeführte Gedanke ist bereits angegeben bei E. Salkowski, Zur Theorie der Kurven im elliptischen Raum. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 21 (1912), 25—52, u. z. auf S. 31.

[2]) Wir schließen uns in der Bezeichnungsweise Herrn Salkowski an (vgl. die in der Einleitung zitierte Abhandlung).

$$(14)\qquad \begin{cases} x_0 = -i\{w' + (uv' - v)\}, \\ x_1 = v' + (uw' - w), \\ x_2 = -i\{v' - (uw' - w)\}, \\ x_3 = w' - (uv' - v), \end{cases}$$

wo v, w zwei analytische Funktionen der Veränderlichen u mit gemeinsamem Existenzbereich bedeuten.[1]) In (14) sind die Koordinaten x_i noch gemäß (3) zu normieren; das gibt die Bedingung:

$$(15)\qquad v'w - vw' = -\frac{k^2}{4},$$

aus der weiter durch Differentiation:

$$(16)\qquad \frac{w''}{v''} = \frac{w}{v}$$

folgt. Nennt man den Wert dieses Bruches l, so ergibt sich nach einiger Rechnung aus (14):

$$(\mathrm{I}^*)\qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{ki}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(u+l) + 2l'(1-l')\}, \\[2ex] x_1 = -\dfrac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(ul+1) + 2l'(l-ul')\}, \\[2ex] x_2 = -\dfrac{ki}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(ul-1) + 2l'(l-ul')\}, \\[2ex] x_3 = \dfrac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(u-l) + 2l'(1+l')\}, \end{cases}$$

wo die Indices Differentiation nach u anzeigen. Endlich führt die Substitution

$$(17)\qquad u = \frac{1}{r}$$

die Gleichungen (I*) in (I) über.

---

[1]) Da wir nur krumme Minimallinien betrachten, dürfen wir $v'' \cdot w'' \neq 0$, $\{u\}$ annehmen.

5. Aus den Gleichungen (I) findet man ohne Schwierigkeit:

$$
(18)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{dx_2 - i\,dx_1}{dx_0 + i\,dx_3} = -\dfrac{dx_0 - i\,dx_3}{dx_2 + i\,dx_1}, \\[2ex] l = \dfrac{x_0 - i\,x_3 + (x_2 + i\,x_1)\,r}{x_2 - i\,x_1 - (x_0 + i\,x_3)\,r}. \end{cases}
$$

Hieraus folgt:

Man erhält alle *algebraischen* krummen Minimallinien des betrachteten elliptischen Raumes, wenn man in (I) für l beliebige algebraische Funktionen von r einsetzt, ausgenommen nur die Funktion $\dfrac{ar+b}{cr+d}$, (a, b, c, d Konstante).

Zu entsprechenden Resultaten wären wir gelangt, wenn wir den linken Normalparameter als unabhängige Veränderliche benutzt hätten: eine Bemerkung, die auch für alle folgenden Entwicklungen gilt.

II. Die eigentlichen, nicht-isotropen krummen Linien.[1])

5. Wir leiten nun auch für die eigentlichen krummen Nicht-Minimallinien des elliptischen Raumes eine von Integralzeichen freie Parameterdarstellung ab.

Zunächst betrachten wir diejenigen unter diesen Linien, die auf der Tangentenfläche (mindestens) einer krummen Minimallinie liegen.

Sei wie oben:

$$
(19)\qquad (x\,t) = 0 \qquad ((x\,x) \equiv k^2,\ (x'\,x') \equiv 0,\ \{\tau\})
$$

die Gleichung einer krummen Minimallinie M in normierten Punktkoordinaten x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) bezogen auf einen (regulären) Parameter τ. Dann stellt die Gleichung

[1]) Eigentliche Kurven sollen die (abgesehen von einzelnen Punkten) im Endlichen verlaufenden Kurven heißen; nicht-isotrope Linie bedeutet s. v. w. Nicht-Minimallinie.

(20) $$(z\,t) \equiv (x\,t) + a(x'\,t) = 0,$$

wo a gleichfalls eine analytische Funktion des Parameters τ von geeignetem Existenzbereich bedeutet, eine krumme Linie K auf der Tangentenfläche von M dar, und zwar in Punktkoordinaten z, die wegen der Nebenbedingungen von (19) gleichfalls normiert sind:

$$(z\,z) \equiv (x\,x) + 2a(x\,x') + a^2(x'\,x') \equiv k^2, \quad \{\tau\}.$$

Bezeichnet jetzt s^2 die quadrierte Bogenlänge der Kurve K, so hat man:

(21) $$s'^2 = (z'\,z')$$

oder, wegen (20):

(21*) $$s'^2 = a^2(x''\,x'').$$

Man gelangt auf diese Weise zu folgender Gleichung der nunmehr orientierten Linie K:

(20*) $$(z\,t) \equiv (x\,t) + \frac{s'}{\sqrt{(x''\,x'')}}(x'\,t) = 0.$$

Diese Darstellung würde nur versagen, wenn

$$(x''\,x'') \equiv 0, \quad \{\tau\}$$

wäre. Nun aber ist für die Minimalkurve M:

(22) $$|x_0\,x_1'\,x_2''\,x_3'''|^2 \equiv -k^2(x''\,x'')^3, \quad \{\tau\},$$

so daß $(x''\,x'')$ im betrachteten Gebiete nur an einzelnen Stellen verschwinden kann, die wir von der Betrachtung ausschließen. Im entgegengesetzten Falle müßte nämlich in (22) auch die Determinante links für alle τ identisch Null sein: die Minimalkurve wäre eben, was unmöglich ist.

An Stelle der Gleichungen (20) und (20*) kann man auch die folgenden benutzen:

(20 a) $$(z\,t) \equiv (x\,t) + a(y\,t) = 0, \text{ bzw.:}$$

(20* a) $$(z\,t) \equiv (x\,t) + \frac{s'}{\sqrt{(y'\,y')}}(y\,t) = 0.$$

Hierin hat y die durch (8*) gegebene Bedeutung. Gibt man also y durch (9), mit r als Parameter, so ist ϱ der Wert (13) beizulegen.

7. Wir brauchen jetzt nur die Koordinaten x_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ der Minimalkurve M in der Form (I) als Funktionen des rechten Normalparameters anzunehmen, um nach Anweisung von (20*) die gesuchte Parameterdarstellung der Kurve K zu erhalten. Man findet mit Hilfe von (13) und (9):

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} z_0 = \dfrac{k}{2\sqrt{l'}} \{f'(lr+1) - (l'r - l)\}, \\ z_1 = \dfrac{ik}{2\sqrt{l'}} \{f'(l+r) - (l'-1)\}, \\ z_2 = -\dfrac{k}{2\sqrt{l'}} \{f'(l-r) - (l'+1)\}, \\ z_3 = \dfrac{ik}{2\sqrt{l'}} \{f'(lr-1) - (l'r - l)\}. \end{cases}$$

Hierin bedeutet f eine analytische Funktion von r mit geeignetem Existenzbereich, die beliebig angenommen werden kann, und die Indices zeigen die Differentiation nach r an. Je nach Orientierung der krummen Linie K ist dann:

$$s' = \varepsilon k i \left(f' - \frac{l''}{2l'}\right), \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{23}$$

8. Bei der Ableitung der Formeln (II) wurde wieder vorausgesetzt, daß nicht

$$\{l, r\} \equiv 0, \qquad \{r\}$$

ist.

Lassen wir nunmehr diese Voraussetzung fallen, so daß also (10) und (11) erfüllt ist. Dann ist, wie wir bereits bemerkten, die krumme Linie A auf der absoluten Fläche eine ebene Kurve, und die zugehörige Minimalkurve M reduziert sich daher auf einen festen Punkt x, den Scheitel des längs A die absolute Fläche berührenden Minimalkegels. Die Koordinaten dieses

Punktes sind gleichwohl immer noch durch (I), nur jetzt mit der Nebenbedingung (11), darstellbar.

Ebenso überzeugt man sich leicht, daß die Gleichungen (20 a) bzw. (20*a) nunmehr eine beliebige krumme Linie K auf dem Minimalkegel vom Scheitel x darzustellen fähig sind, wobei die durch (20 a) bzw. (20*a) definierten Koordinaten z dieser Linie sich als normierte Punktkoordinaten erweisen. Auch hier versagt die Kurvendarstellung (20*a) höchstens an einzelnen Stellen des betrachteten Bereiches.

Gibt man jetzt die Koordinaten des Punktes x durch (I) und diejenigen der ebenen krummen Linie A durch (9) als analytische Funktionen des rechten Normalparameters — nun aber mit beliebigem, von Null verschiedenen Werte der analytischen Funktion ϱ von r — so erhält man wiederum die Gleichungen (II).

Hiermit ist der Satz bewiesen:

Jede (orientierte) eigentliche nicht-isotrope krumme, analytische Linie des betrachteten elliptischen Raumes ist durch die von Integralzeichen freien Formeln (II) darstellbar, in denen f' und l zwei analytische Funktionen des rechten Normalparameters r mit gemeinsamem Existenzbereich bedeuten. l darf dabei keine Konstante, und f' nicht gleich $\frac{l''}{2l'}$ sein.

9. Durch das Gleichungssystem (II) wird zugleich die Aufgabe gelöst, alle algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien[1]) des betrachteten elliptischen Raumes zu bestimmen.

Aus den Formeln (II) folgen nämlich durch Differentiation nach r die weiteren:

---

[1]) In meiner in der Einleitung genannten Arbeit habe ich (einer Definition von Herrn Salkowski folgend) die entsprechenden Kurven im Euklidischen Raum als algebraisch rektifizierbare krumme Linien schlechthin bezeichnet, was hier ausdrücklich angemerkt sei, da der Begriff dort nicht hinreichend erklärt ist.

$$
(24)\quad\begin{cases}
z_0' = \dfrac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(lr+1)+(2l'f'-l'')(l'r+l)\},\\[2ex]
z_1' = \dfrac{ik}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(l+r)+(2l'f'-l'')(l'+1)\},\\[2ex]
z_2' = -\dfrac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(l-r)+(2l'f'-l'')(l'-1)\},\\[2ex]
z_3' = \dfrac{ik}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(lr-1)+(2l'f'-l'')(l'r+l)\},
\end{cases}
$$

und mittels dieser Gleichungen nach längerer, aber keine Schwierigkeiten bietender Rechnung:

$$
(25)\quad\begin{cases}
r = \dfrac{z_0dz_3-z_3dz_0-z_1dz_2+z_2dz_1-\varepsilon k ds}{z_0dz_1-z_1dz_0-z_2dz_3+z_3dz_2-i(z_0dz_2-z_2dz_0-z_3dz_1+z_1dz_3)}\\[2ex]
\quad = -\dfrac{z_0dz_1-z_1dz_0-z_2dz_3+z_3dz_2+i(z_0dz_2-z_2dz_0-z_3dz_1+z_1dz_3)}{z_0dz_3-z_3dz_0-z_1dz_2+z_2dz_1+\varepsilon k ds}\\[2ex]
l = -\dfrac{(z_2+iz_1)r+(z_0-iz_3)}{(z_0+iz_3)r-(z_2-iz_1)}, \quad s-s_0 = \varepsilon k i(f-lg\sqrt{l'}),\\[1ex]
\qquad\qquad (\varepsilon^2 = 1, \quad s_0 = \text{konst.}).
\end{cases}
$$

Man erhält demnach alle algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien im betrachteten elliptischen Raume, wenn man in den Gleichungen (II) für l und $f-lg\sqrt{l'}$ beliebige algebraische Funktionen von r einsetzt, die keine Konstanten sind.

III. Besondere Klassen von nicht-isotropen krummen Linien.

10. Für gewisse Kurvenklassen, nämlich für die krummen Linien auf einem Minimalkegel und diejenigen in einer Minimalebene, vereinfacht sich das Gleichungssystem (II) wesentlich.

Ist die Kurve K eine krumme Linie auf (mindestens) einem Minimalkegel, so besteht, wie wir bereits sahen,[1]

[1] Vgl. S. 7, Anm. 2.

für die Berührungskurve dieses Minimalkegels mit der absoluten Fläche die Identität:

$$l \equiv \frac{ar+b}{cr+d}, \quad (ad-bc \neq 0), \qquad \{r\}, \tag{11*}$$

wo a, b, c, d Konstante bedeuten. Unbeschadet der Allgemeinheit darf man

$$ad-bc=1$$

voraussetzen. Man kann dann für die Koordinaten y der Berührungskurve A des Minimalkegels mit der absoluten Fläche:

$$\begin{cases} y_0 = -i\{ar^2+(b+c)r+d\}, \\ y_1 = cr^2+(d+a)r+b, \\ y_2 = -i\{cr^2+(d-a)r-b\}, \\ y_3 = ar^2+(b-c)r-d \end{cases} \tag{26}$$

setzen, und erhält hieraus für die Koordinaten des Scheitels x des Minimalkegels:

$$x_0 = \frac{k}{2}(b-c), \; x_1 = -\frac{ki}{2}(a-d), \; x_2 = \frac{k}{2}(a+d), \; x_3 = \frac{ki}{2}(b+c). \tag{27}$$

Nun liefert die Gleichung (20a) das System:

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{1}{2}\{k(b-c)-\varepsilon i s'\cdot[ar^2+(b+c)r+d]\}, \\ z_1 = -\dfrac{i}{2}\{k(a-d)-\varepsilon i s'\cdot[-cr^2-(d+a)r-b]\}, \\ z_2 = \dfrac{1}{2}\{k(a+d)-\varepsilon i s'\cdot[cr^2+(d-a)r-b]\}, \\ z_3 = \dfrac{i}{2}\{k(b+c)-\varepsilon i s'\cdot[ar^2+(b-c)r-d]\}, \quad (\varepsilon^2=1), \end{cases} \tag{28}$$

auf welches sich die Gleichungen (II) im vorliegenden Falle reduzieren.

11. Liegt die Kurve K in einer Minimalebene, deren Koordinaten u_i durch

$$\begin{gathered} u_0 = -i(\alpha\beta+1), \; u_1 = \alpha+\beta, \; u_2 = i(\alpha-\beta), \\ u_3 = \alpha\beta-1, \; (\alpha, \beta \text{ Konstante}) \end{gathered} \tag{29}$$

gegeben werden können, so liefert die Bedingung:

$$(uz) \equiv 0, \qquad \{r\},$$

wenn für die z_i die Werte (II) gesetzt werden, ohne Weiteres:

$$f' = \frac{l'}{l-\alpha} - \frac{1}{r-\beta}. \tag{30}$$

Trägt man diesen Wert in die Gleichungen (II) ein, so folgt aus ihnen das einfachere System:

$$\left\{\begin{aligned} z_0 &= \frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha r+1}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l\beta+1}{r-\beta}\right\}, \\ z_1 &= i\,\frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha+r}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l+\beta}{r-\beta}\right\}, \\ z_2 &= -\frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha-r}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l-\beta}{r-\beta}\right\}, \\ z_3 &= i\,\frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha r-1}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l\beta-1}{r-\beta}\right\}, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

das geeignet ist, die krumme Linie K darzustellen, so lange

$$l' \neq 0, \qquad \{r\}$$

ist.

Der Darstellung (29) entziehen sich zunächst diejenigen Minimalebenen, zwischen deren Koordinaten die Relationen

$$u_3 = i u_0, \quad u_1 = \pm i u_2 \tag{32}$$

bestehen. Doch bietet dieser Fall keine weitere Schwierigkeit: je nachdem u_1 von Null verschieden ist und in (32) das obere oder das untere Vorzeichen gilt, oder endlich u_1 verschwindet, folgen die Gleichungen der krummen Linien in diesen Ebenen aus (31), indem man den Grenzübergang zu $\frac{1}{\beta} = 0$ bei beliebigem endlichen α, denjenigen zu $\frac{1}{\alpha} = 0$ bei beliebigem endlichen β, oder endlich denjenigen zu $\frac{1}{\alpha} = 0$, $\frac{1}{\beta} = 0$ vornimmt.

12. Besonderes Interesse verdienen die Schnittkurven eines Minimalkegels und einer seinen Scheitel nicht enthaltenden Minimalebene, die (irreduzibeln) singulären Kreise des elliptischen Raumes.

Um die Parameterdarstellung eines passend gewählten singulären Kreises zu finden, setzen wir in (28):

$$a = 0,\ b = 1,\ c = -1,\ d = 0;\ \varepsilon = 1$$

und erhalten so als Gleichungen einer beliebigen krummen (orientierten) Linie auf dem Minimalkegel vom Scheitel $(k, 0, 0, 0)$:

$$z_0 = k,\ z_1 = \frac{1-r^2}{2} s',\ z_2 = i\,\frac{1+r^2}{2} \cdot s',\ z_3 = r \cdot s'.$$

Soll diese krumme Linie auch der Minimalebene:

$$(33) \qquad x_0 + i x_3 = 0$$

angehören, so muß sein:

$$s' = \frac{ik}{r}.$$

Die eigentlichen Punkte des singulären Schnittkreises der Minimalebene (33) und des Minimalkegels vom Scheitel $(k, 0, 0, 0)$ sind also darstellbar durch

$$(34) \qquad z_0 = k,\ z_1 = ik\,\frac{1-r^2}{2r},\ z_2 = -k\,\frac{1+r^2}{2r},\ z_3 = ik,$$

wobei weder r noch $\frac{1}{r}$ Null sein darf.

Als Gleichungen dieses singulären Kreises ergeben sich somit die folgenden

$$(35) \qquad x_0 + i x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0.$$

Der singuläre Kreis (35) berührt in seinen uneigentlichen Punkten $(0, 1, i, 0)$ und $(0, 1, -i, 0)$ bezüglich die absoluten Geraden

$$(36) \qquad \begin{cases} x_1 + i x_2 = 0, & x_0 + i x_3 = 0, \\ x_1 - i x_2 = 0, & x_0 + i x_3 = 0 \end{cases}$$

der Minimalebene (33). Seine Achse, d. h. die Verbindungslinie seiner beiden uneigentlichen Punkte, hat die Gleichungen

$$x_0 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Allgemein kann man die (irreduzibeln) singulären Kreise eines elliptischen Raumes auch definieren als diejenigen irreduziblen Kegelschnitte, welche in den Minimalebenen dieses Raumes liegen und ihre beiden absoluten Geraden berühren. Durch jede Bewegung des elliptischen Raumes werden singuläre Kreise wieder in singuläre Kreise übergeführt.