

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1916. Heft I

Januar- bis März-sitzung

---

München 1916

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Elementar-geometrischer Beweis des Ponceletschen Schliessungssatzes.

Von **Heinrich Liebmann**.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Februar 1916.

Der Ponceletsche Schließungssatz<sup>1)</sup> ist bekanntlich Ausgangspunkt für eine Reihe von wichtigen Untersuchungen geworden; er hat einerseits wegen seines Zusammenhanges mit dem Additionstheorem und den Teilungsproblemen der elliptischen Funktionen eine große Bedeutung, er ist ferner nach bestimmter Seite hin von den Kegelschnitten auf höhere algebraische Kurven erweitert worden.<sup>2)</sup> Poncelet selbst war sich der Wichtigkeit seiner Entdeckung wohl bewußt, sonst hätte er nicht die Figur des Satzes, versehen mit der Umschrift „*aut semper aut nunquam*“, zu seinem Siegel erwählt,<sup>3)</sup> und Chasles nennt in seinem „Rapport sur les progrès de la géométrie“ (1870) unter den Verdiensten Poncelets den Schließungssatz an erster Stelle.

Es mag als ein Wagnis erscheinen, auf einen so bekannten Stoff nochmals zurückzukommen, doch glaubt der Verfasser im Hinblick auf neuere Untersuchungen und Darstellungen dieses Wagnis unternehmen zu dürfen, selbstverständlich ohne

1) J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822), No. 531 (S. 322).

2) Vgl. hierzu *Math. Enc. III, C 1* (F. Dingeldey), Nr. 24 und 26—28 und *II, B 3* (R. Fricke), Nr. 77.

3) Nach E. Kötter, *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie I* (Leipzig 1901), S. 149.

den Anspruch, grundsätzlich Neues zu bieten. Von den beiden hier wiedergegebenen Beweisen soll vielmehr der erste nur den Formelaufwand möglichst einschränken, der zweite aber den Rahmen allerelementarster Rechnungen nicht überschreiten.

Demgemäß sollen sich die Beweise auch auf den einfachen von Poncelet selbst vorangestellten Fall beziehen, daß es sich um ein Kreisbüschel

$$(1) \quad x^2 + y^2 - r^2 - 2\lambda(x - a) = 0$$

handelt und zwar um ein hyperbolisches, so daß

$$a > r$$

vorausgesetzt wird. Dann lautet der Satz so:

Legt man von einem beliebig gewählten Punkt  $P_1$  des Kreises  $K$  ( $\lambda = 0$ ) die Tangente an einen bestimmten Kreis  $\lambda_1$  ( $< r$ ) des Büschels und bezeichnet ihren zweiten Schnittpunkt mit  $K$  durch  $P_2$ , legt man dann von  $P_2$  aus eine weitere Tangente an einen bestimmten Kreis  $\lambda_2$  ( $< r$ ) des Büschels, welche  $K$  zum zweiten Mal in  $P_3$  schneidet, so berührt unabhängig von der Wahl des Ausgangspunktes  $P_1$ , die Sehne  $P_3 P_1$  ebenfalls immer einen und denselben Kreis  $\lambda_3$  des Büschels.

### Erster Beweis (Differentialgeometrisch).

Wir betrachten zunächst nur eine Sehne  $P_1 P_2$  des Kreises  $K$  und suchen die Bedingung dafür aufzustellen, daß sie beständig einen und denselben Kreis ( $\lambda_1$ ) des Büschels berührt.

Es sei  $P_1 P_2$  eine bestimmte Lage der Berührungssehne und

$$\sphericalangle AOP_1 = \varphi_1, \quad \sphericalangle AOP_2 = \varphi_2,$$

ferner  $T$  ihr Berührungspunkt mit dem Kreis ( $\lambda_1$ ) und  $Q_1 Q_2$  eine benachbarte Berührungssehne, die denselben Kreis  $\lambda_1$  berührt, wobei

$$\sphericalangle AOQ_1 = \varphi_1 + d\varphi_1, \quad \sphericalangle AOQ_2 = \varphi_2 + d\varphi_2$$

ist. Bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden benachbarten

Sehnen  $P_1 P_2$  und  $Q_1 Q_2$ , also den Berührungspunkt mit  $(\lambda_1)$  durch  $T$ , so ist

$$\triangle TP_1 Q_1 \simeq \triangle TP_2 Q_2,$$

wenn man also die Sehnenabschnitte  $TP_1$  und  $TP_2$  mit  $s_1$  und  $s_2$  bezeichnet, hat man aus der Proportion

$$P_1 Q_1 : TP_1 = P_2 Q_2 : TP_2$$

oder

$$r d\varphi_1 : s_1 = r d\varphi_2 : s_2$$

die Gleichung

$$(2) \quad \frac{d\varphi_1}{s_1} - \frac{d\varphi_2}{s_2} = 0.$$

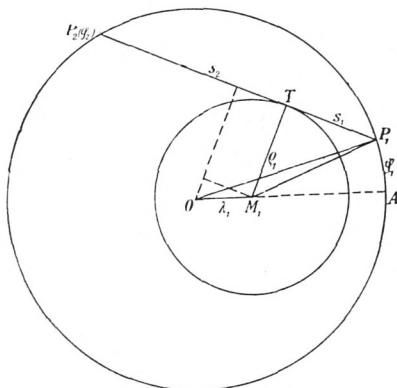


Fig. 1

Ist ferner (nach 1)

$$\varrho_1 = \sqrt{r^2 - 2a\lambda_1 + \lambda_1^2}$$

der Radius des Kreises  $(\lambda_1)$ , so gibt die aus den beiden Dreiecken  $M_1 T P_1$  und  $O M_1 P_1$  folgende Formel

$$\varrho_1^2 + s_1^2 = (M_1 T)^2 = r^2 + \lambda_1^2 - 2r\lambda_1 \cos \varphi_1$$

in Verbindung mit dem Wert von  $\varrho_1^2$  den Wert

$$s_1^2 = 2\lambda_1 (a - r \cos \varphi_1).$$

In derselben Weise folgt

$$s_2^2 = 2\lambda_1(a - r \cos \varphi_2),$$

und aus (2) folgt dann

$$(3) \quad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r \cos \varphi_1}} - \frac{d\varphi_2}{\sqrt{a - r \cos \varphi_2}} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Zentriwinkel ( $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ), welche zu den Endpunkten  $P_1$  und  $P_2$  der Sehne gehören, dann und nur dann die Differentialgleichung (3) erfüllen, wenn die Sehne  $P_1P_2$  beständig einen und denselben Kreis  $\lambda_1$  berührt.

Auf der andern Seite denken wir uns jetzt  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  frei veränderlich, dann kann man immer den Parameter ( $\lambda_1$ ) desjenigen Kreises bestimmen, der von  $P_1P_2$  berührt wird. Bei dieser Betrachtung wird also  $\lambda_1$  eine Funktion von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  und  $d\lambda_1$  drückt sich linear durch  $d\varphi_1$  und  $d\varphi_2$  aus; und wenn  $\lambda_1$  konstant ist, muß hieraus die Gleichung (3) entstehen. Demnach folgt für diesen allgemeinen Fall

$$(3') \quad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r \cos \varphi_1}} - \frac{d\varphi_2}{\sqrt{a - r \cos \varphi_2}} = d\lambda_1 \cdot f(\varphi_1, \varphi_2).$$

Mit dieser einen einfachen Überlegung ist aber der Schließungssatz bewiesen; denn wenn sowohl  $P_1P_2$  beständig denselben Kreis  $\lambda_1$  wie  $P_2P_3$  denselben Kreis  $\lambda_2$  berührt, so folgt durch zweimalige Anwendung von (3), daß auch

$$\frac{d\varphi_3}{\sqrt{a - r \cos \varphi_3}} - \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r \cos \varphi_1}} = 0$$

ist, daß also auch  $P_3P_1$  beständig denselben Kreis ( $\lambda_3$ ) berührt.

Zusatz zum ersten Beweis.

Obwohl dies die bisherige Betrachtung nicht erfordert, möge nun doch noch der Vollständigkeit halber die genaue Berechnung von (3') folgen unter Verwendung der Abkürzungen

$$u_1 = a - r \cos \varphi_1, \quad u_2 = a - r \cos \varphi_2.$$

Aus Fig. 1 entnimmt man

$$2r \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = s_1 + s_2 = \sqrt{2\lambda_1}(\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} (\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}) \cdot (\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}) &= u_2 - u_1 = r(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \\ &= 2r \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) \end{aligned}$$

und hieraus folgt in Verbindung mit der ersten Formel für  $\lambda_1$

$$\sqrt{2\lambda_1} \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = \sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}.$$

Aus der ersten Formel für  $\lambda_1$  folgt

$$\begin{aligned} (\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}) \frac{d\lambda_1}{\sqrt{2\lambda_1}} = \\ r \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(d\varphi_2 - d\varphi_1) - \sqrt{2\lambda_1} \left( \frac{r \sin \varphi_1 d\varphi_1}{2\sqrt{u_1}} + \frac{r \sin \varphi_2 d\varphi_2}{2\sqrt{u_1}} \right). \end{aligned}$$

Setzt man nun rechts den zweiten Wert ein, also

$$\sqrt{2\lambda_1} = \frac{\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

so findet man nach kurzer Rechnung

$$(3'') \quad \frac{d\varphi_2}{\sqrt{u_2}} - \frac{d\varphi_1}{\sqrt{u_1}} = \frac{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1}}{r\sqrt{2\lambda_1}} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin \varphi_2 \sqrt{u_1} + \sin \varphi_1 \sqrt{u_2}} \cdot d\lambda_1,$$

womit (3') ergänzt und bestätigt ist. —

Der Umstand, daß

$$\lambda_1 = \text{constans}$$

ein Integral der Differentialgleichung (3) ist, führt bekanntlich nach einer schon von Euler<sup>1)</sup> herrührenden, von Legendre aufgenommenen Betrachtung zum Additionssatz der elliptischen Integrale bzw. der elliptischen Funktionen, und zwar gelangt man mit Leichtigkeit gerade zur Legendreschen Normalform.

<sup>1)</sup> Vgl. Fricke, a. a. O., Nr. 1, 6 und 77.

Dies soll natürlich hier nicht rechnerisch durchgeführt werden, aber ein Hinweis mag deswegen erlaubt sein, weil die längst gewonnene Erkenntnis, daß das Integral  $\lambda_1$  eben gerade durch den Schließungssatz gewonnen wird, noch mehrfach in den Darstellungen über Gebühr zurücktritt.

### Zweiter Beweis (Elementargeometrisch).<sup>1)</sup>

Bei diesem zweiten Beweis, der naturgemäß etwas mehr Rechnung erfordert, dafür aber auch die bisher nicht abgeleitete „Schließungsbedingung“ zwischen den Parametern  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  der von den drei Sehnen  $P_1P_2, P_2P_3$  und  $P_3P_1$  berührten Kreise liefert, bezeichnen wir die Zentriwinkel

$$\sphericalangle AOP_1, \sphericalangle AOP_2, \sphericalangle AOP_3$$

mit  $2\varphi_1, 2\varphi_2, 2\varphi_3,$

weil dadurch die Formeln einfacher werden.

Die Radien der berührten Kreise hängen mit den Parametern  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  zusammen durch die Gleichungen

$$(4) \quad \rho_i = \sqrt{r^2 - 2a\lambda_i + \lambda_i^2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

<sup>1)</sup> Der Ponceletsche Beweis, von E. Kötter (a. a. O., S. 150 genau besprochen) macht bekanntlich von der Betrachtung Gebrauch, daß eine Kurve, die von Kegelschnitten eines Büschels in jedem ihrer Punkte berührt wird, notwendig ein bestimmter Kegelschnitt des Büschels sein muß. — R. Sturm (Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, Leipzig 1908, § 31) erhält den Satz aus allgemeineren über cyklische Involutionen. — Vgl. auch K. Rohn (Jahresberichte der Deutschen Math. Ver. 22 (1913), S. 330—340) und Leipz. Ber. 60 (1908), S. 94—131. — J. Steiner (Ges. Werke I, Berlin 1881, S. 159) hat bekanntlich die Beziehungen für Vierecke, Fünfecke usw. bis zu den Achtecken angegeben, welche bestehen, wenn ein solches Vieleck einem Kreis unbeschrieben und zugleich einem andern einbeschrieben ist. Die Vermutung, die auch E. Kötter schon früher ausgesprochen hat (a. a. O., S. 152), daß Steiner den Schließungssatz aus seinem „Kreisreihen-Satz“ (Werke I, S. 43) abgeleitet hat, ist wohl schwer nachzuprüfen. Ein Versuch, durch die Laguerresche Linieninversion in Verbindung mit der Transformation durch reciproke Radien den viel schwierigeren Ponceletschen Satz aus dem Kreisreihen-Satz abzuleiten, hat zu keinem Ergebnis geführt.

außerdem ist im Hinblick auf Fig. 1 und die neu eingeführten Winkelbezeichnungen ( $2\varphi$  an Stelle von  $\varphi$ )

$$(5) \quad \begin{aligned} \varrho_1 &= r \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \lambda_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \varrho_2 &= r \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \lambda_2 \cos(\varphi_3 + \varphi_2), \\ \varrho_3 &= -r \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \lambda_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_3). \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, diejenige Beziehung zwischen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  aufzustellen, vermöge deren die Formeln 4 und 5 für die Winkel eine ganze Wertschar ( $\infty^1$  Wertsysteme) liefern. — Eine endliche Anzahl von (imaginären) Wertsystemen für die trigonometrischen Funktionen erhält man selbstverständlich auch dann, wenn die aufzustellende Bedingung nicht erfüllt ist.

Zunächst eliminieren wir  $\varphi_2$  aus den beiden ersten Gleichungen (5), wobei beständig von (4) und (5) Gebrauch zu machen ist. Das Ergebnis ist bei Anwendung der Abkürzungen

$$(6) \quad \begin{aligned} u &= \cos(\varphi_1 + \varphi_3), \quad v = \cos(\varphi_1 - \varphi_3), \\ g(u, v) &= (r^2 + \lambda_1 \lambda_2) v - r(\lambda_1 + \lambda_2) - \varrho_1 \varrho_2, \\ f_2(u, v) &= r^2(u^2 + v^2 - 1) - 2aruv + a^2 \end{aligned}$$

die Gleichung zweiten Grades

$$(7) \quad F_2(u, v) \equiv (g(u, v))^2 - 4\lambda_1 \lambda_2 f_2(u, v) = 0.$$

Die weitere Untersuchung wird nun zeigen, daß eine einzige Gleichung zwischen den Parametern  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  hinreicht, damit jedes Wertsystem  $u$ ,  $v$ , das die dritte Gleichung (5) oder

$$(8) \quad h(u, v) \equiv \lambda_3 \cdot u - r \cdot v - \varrho_3 = 0$$

erfüllt, auch (7) erfüllt.

[Projektivische Begründung. Die Gleichungen (7) und (8) zeigen unmittelbar, wie man nun die weitere Ausführung zu gestalten hat, wenn man sich der Gedankengänge der analytischen projektiven Geometrie bedienen will und  $u$  und  $v$  als rechtwinklige Koordinaten deutet.



(7) stellt einen Kegelschnitt dar, der den Kegelschnitt

$$f_2(u, v) = 0$$

in den beiden Schnittpunkten mit der Geraden

$$g(u, v) = 0$$

berührt.

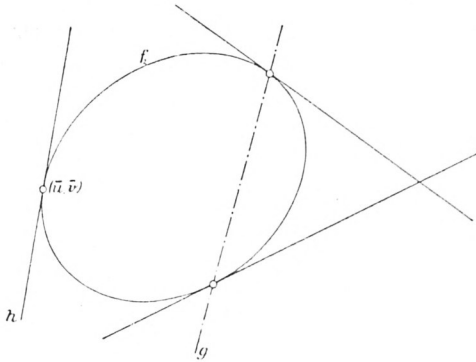


Fig. 2

Soll nun unsere ganze Betrachtung zum Ziel führen, so muß vor allem der Kegelschnitt (7), in dessen Gleichung  $\lambda_3$  gar nicht vorkommt, von selbst in ein Geradenpaar zerfallen.

Das ist in der Tat der Fall, und man rechnet dies am einfachsten in der Weise nach, daß man zeigt, daß  $F_2'(u, v) = 0$  den Pol der Geraden  $g(u, v) = 0$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $f_2(u, v) = 0$  enthält. Dies läßt sich durch kurze Rechnung zeigen, und damit ist dann bewiesen, daß (7) in ein Geradenpaar zerfällt, und zwar in die beiden Tangenten, die von jenem Pol an  $f_2(u, v) = 0$  sich legen lassen.

Weiterhin wird verlangt, daß (8) eine der beiden Geraden werden soll, also jedenfalls eine Tangente von  $f_2(u, v) = 0$ .

Daß dies immer der Fall ist, erkennt man, indem man aus (8) einsetzt

$$r v = \lambda_3 u - \varrho_3$$

und dann erhält

$$\begin{aligned}
 f_2(u, v) &= r^2(u^2 - 1) + (\lambda_3 u - \varrho_3)^2 - 2au(\lambda_3 u - \varrho_3) + a^2 \\
 &= u^2(r^2 + \lambda_3 - 2a\lambda_3) + 2u\varrho_3(\lambda_3 - a) + a^2 + \varrho_3^2 - r^2 \\
 &= u^2\varrho_3^2 - 2u\varrho_3(\lambda_3 - a) + \lambda_3^2 - 2a\lambda_3 + a^2 \\
 &= (u\varrho_3 - (\lambda_3 - a))^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Demnach ist (8) in der Tat Tangente und zwar hat der Berührungspunkt die Koordinaten

$$\bar{u} = \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3}, \quad \bar{v} = \frac{\lambda_3 \bar{u} - \varrho_3}{r} = \frac{\lambda_3(\lambda_3 - a) - \varrho_3^2}{r\varrho_3} = \frac{a\lambda_3 - r^2}{r\varrho_3}.$$

Jetzt finden wir die „Schließungsbedingung“ leicht: Wenn nämlich  $\bar{u}, \bar{v}$  einer der beiden Punkte ist, in denen  $g(u, v) = 0$  den Kegelschnitt  $f_2(u, v) = 0$  schneidet, dann ist  $h(u, v) = 0$  sicher eine der beiden Tangenten, in die (7) zerfällt (vgl. Fig. 2).

Demnach ergibt sich als einzige Bedingung, daß  $g(u, v) = 0$  den Berührungspunkt  $(\bar{u}, \bar{v})$  des Geraden  $h(u, v) = 0$  mit dem Kegelschnitt  $f_2(u, v) = 0$  enthält.

Um aber das eigentliche Ziel eines ganz elementaren Beweises zu verfolgen, gehen wir auf die Rechnung nicht ein, die diesen Gedankengang durchführt.]

Die lineare Gleichung (8) kann ersetzt werden durch

$$\begin{aligned}
 (8') \quad u &= \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} + t \cdot r = \bar{u} + t \cdot r, \\
 v &= \frac{a\lambda_3 - r^2}{r\varrho_3} + t \cdot \lambda_3 = \bar{v} + t \cdot \lambda_3,
 \end{aligned}$$

wobei  $t$  willkürlich bleibt, denn es ist

$$\begin{aligned}
 &\lambda_3(\bar{u} + tr) - r(\bar{v} + t\lambda_3) - \varrho_3 \\
 &= \lambda_3 \cdot \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} - r \cdot \frac{a\lambda_3 - r^2}{r\varrho_3} - \varrho_3 = \frac{\lambda_3^2 - 2a\lambda_3 + r^2 - \varrho_3^2}{\varrho_3} = 0.
 \end{aligned}$$

Im Anschluß hieran zeigen wir, daß jedes Wertsystem (8') der Gleichung (7) identisch, d. h. für jeden Wert von  $t$  erfüllt, sobald

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \text{ ist.}$$

Bevor dieser Nachweis erbracht wird, soll diese Forderung noch genauer berechnet werden. Man erhält zunächst die symmetrisch gebaute Gleichung

$$(9) \quad a\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + ar^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - r^4 - r\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \\ = H - r\varrho_1\varrho_2\varrho_3.$$

Rationalisiert man diese Gleichung, indem man in

$$H^2 - r^2\varrho_1^2\varrho_2^2\varrho_3^2 = 0$$

die Werte (4) der Radien der berührten Kreise einsetzt, so kommt ein Ausdruck, der in  $r$  vom sechsten Grade ist und von dem sich überdies der von Null verschiedene Faktor  $a^2 - r^2$  abspalten läßt. (9) ist dann ersetzbar durch

$$(9') \quad r^4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1) - 2r^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 \\ + \lambda_3 - 4a) + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 0.$$

Um nun die Wirkung der Bedingung (9) oder (9') zu prüfen, stellen wir zunächst fest, daß

$$g(\bar{u} + tv, \bar{v} + t\lambda_3) = -t(r^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3)$$

wird. Außerdem wird

$$f_2(\bar{u} + tr, \bar{v} + t\lambda_3) = At^2 + 2Bt + C \text{ mit}$$

$$A = r^2(r^2 + \lambda_3^2) - 2ar\lambda_3r = r^2\varrho_3^2$$

$$B = r^2(\bar{u}r + v\lambda_3) - ar(\bar{u}\lambda_3 + \bar{v}r)$$

$$= \frac{r}{\varrho_3}(r^2(\lambda_3 - a) + a\lambda_3^2 - r^2\lambda_3 - a(\lambda_3^2 - a\lambda_3 + a\lambda_3 - r^2)) = 0$$

$$C = \bar{u}(r^2\bar{u} - ar\bar{v}) + \bar{v}(-ar\bar{u}) + r^2\bar{v} - r^2 + a^2$$

$$= \bar{u}\left(r^2\frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} - a\frac{(a\lambda_3 - r^2)}{\varrho_3}\right) + \bar{v}\left(-ar\frac{(\lambda_3 - a)}{\varrho_3}\right)$$

$$+ r\frac{(a\lambda_3 - r^2)}{\varrho_3} - r^2 + a^2 = \frac{r^2 - a^2}{\varrho_3}(\bar{u}\lambda_3 - vr - \varrho_3) = 0.$$

Demnach wird schließlich

$$F_2(\bar{u} + tr, \bar{v} + t\lambda_3) = t^2(r^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 - 4\lambda_1\lambda_2t^2r^2\varrho^2 \\ = t^2\{r^4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1) - 2r^2(\lambda_1 + \lambda_2 \\ + \lambda_3 - 4a) + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\} \equiv 0.$$

Damit ist bewiesen, daß jedes beliebige Wertsystem  $u, v$ , welches (8) erfüllt, auch (7) erfüllt, sobald die Schließungsbedingung (9) bzw. (9') erfüllt ist.

Zusatz zum zweiten Beweis.

Es mögen noch einige Bemerkungen folgen.

Bei gegebenem  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ist die Schließungsbedingung für  $\lambda_3$  vom zweiten Grad. Man kann nun noch nachweisen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen ( $\lambda_1 < r, \lambda_2 < r$ ) nur diejenige Wurzel  $\lambda_3$  in Betracht kommt, die auch kleiner als  $r$  ist. Das geht sehr einfach durch die Betrachtung des Grenzfalls, wo die Kreise konzentrisch sind.

Sodann wollen wir den Satz auf den besonderen Fall anwenden, wenn die Sehnen alle denselben Kreis  $\lambda$  berühren. (9') geht dann über in

$$-3r^4 - 2r^2\lambda(3\lambda - 4a) + \lambda^4 = 0$$

oder wegen

$$2a\lambda = r^2 + \lambda^2 - \varrho^2$$

in

$$\lambda^4 - 2r^2\lambda^2 + r^4 - 4r^2\varrho^2 = 0$$

$$\lambda^2 = r^2 \pm 2r\varrho.$$

Von den beiden Werten kommt aber wegen  $\lambda < r$  nur der zweite in Betracht, und man erhält die längst bekannte<sup>1)</sup> Beziehung, welche zwischen den Radien  $r$  und  $\varrho$  des unbeschriebenen und einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks und dem Mittelpunktabstand der Kreise besteht.

Schon Poncelet selbst<sup>2)</sup> hat aus dem Schließungssatz für Dreiecke den Schließungssatz für Polygone gefolgert, d. h. für

<sup>1)</sup> Sie rührt (nach Angabe von M. Cantor) schon von W. Chapple (1746) her.

<sup>2)</sup> Poncelet, a. a. O., Nr. 534, S. 326.

Sehnen —  $n$  — Seite  $P_1 P_2 \dots P_n$  eines Kegelschnitts  $K$ , dessen Seiten bei der Wanderung von  $P_1$  längs  $K$  je einen bestimmten Kegelschnitt eines Büschels berühren, dem auch  $K$  angehört. Auch darf darauf hingewiesen werden, daß man selbstverständlich in einzelnen Fällen, z. B. bei der Aufstellung der Beziehung zwischen  $\lambda$ ,  $r$  und  $\rho$ , vermöge deren sich dem Kreis ( $r$ ) ein konvexes Sehnenviereck einbeschrieben läßt, dessen Seiten den Kreis ( $\rho$ ) berühren, eben auf Grund des Schließungssatzes von einer besonderen Lage ausgehen kann. Übrigens kann gerade für den Fall des Sehnen-Tangentenvierecks noch der Schließungssatz unmittelbar durch trigonometrische Rechnung abgeleitet werden, ein Verfahren, das den Anstoß zu dem hier mitgeteilten Beweis des allgemeinen Schließungssatzes gegeben hat und also dazu geführt hat, den bisher auch in neueren Werken über höhere Elementarmathematik bei Seite gelassenen Satz durch die Art der Begründung da einreihen zu können, wohin er seinem Wesen nach eigentlich gehört.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1916

Band/Volume: [1916](#)

Autor(en)/Author(s): Liebmann Heinrich

Artikel/Article: [Elementar-geometrischer Beweis des Ponceletschen Schließungssatzes 19-30](#)