Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1918
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Polygon.

Von F. Lindemann.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Mai 1918.

Für die Aufgabe, ein durch eine endliche Anzahl von Bögen algebraischer Kurven begrenztes Polygon auf den Kreis oder auf die Halbebene konform abzubilden, fehlt bisher jeder Ansatz. Für ein geradliniges Polygon hat Christoffel (Ann. di matematica, Ser. II, t. 1) bekanntlich die Lösung gegeben, und für ein von Kreisen begrenztes Polygon verdankt man Schwarz (Crelles Journal, Bd. 70) den zum Ziele führenden Ansatz. In beiden Fällen bleibt eine endliche Anzahl von Konstanten noch zu bestimmen. Die Frage, ob auch in anderen Fällen die Zurückführung auf eine Differentialgleichung gelingt, kann man bisher nicht beantworten; es dürfte deshalb Interesse haben, für eine weitere allgemeine Klasse von Polygonen, nämlich solchen, die von beliebigen Parabeln begrenzt werden, die Zurückführung des Problems auf eine Differentialgleichung zu bewerkstelligen, wie es im folgenden geschehen soll.

Auch für beliebige Kegelschnitte als Begrenzungskurven scheint sich ein analoger Ansatz durchführen zu lassen, worauf ich demnächst zurückkommen werde.

§ I. Die Differentialgleichung der Kegelschnitte.

Besteht zwischen x und y eine Gleichung zweiten Grades, so kann man y als Funktion von x auffassen, die noch von fünf willkürlichen Konstanten abhängt, und diese Funktion ist dann das allgemeine Integral einer gewissen Differentialgleichung fünfter Ordnung. Letztere kann man nach Halphen[1]) in folgender Weise gewinnen:

Die Auflösung nach y ergibt die Gleichung des in der Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

gegebenen Kegelschnittes in der Form:

$$(1)\quad a_{22}y = -(a_{12}x + a_{13}) + \sqrt{-A_{33}x^2 - 2A_{13}x - A_{23}},$$

wo mit A_{ik} die Unterdeterminanten des Kegelschnittes bezeichnet sind. Durch zweimalige Differentiation findet man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (A_{33}A_{23} - A_{23}^2)(-A_{33}x^2 - 2A_{13}x - A_{23})^{-\frac{3}{2}}$$

und folglich:

$$(2)\qquad \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

oder entwickelt:

$$(2\text{a})\quad 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5} - 45\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung aller Kegelschnitte. Für eine Parabel ist $A_{33} = 0$. Nach (1) ist also $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ eine lineare Funktion von x, und wir erhalten als Differentialgleichung aller Parabeln:

$$(3)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

Fassen wir x und y als Funktionen einer dritten Variabeln X auf, so wird bekanntlich:

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3},$$

wo $$x' = \frac{dx}{dX},\quad x'' = \frac{d^2x}{dX^2},\quad y' = \frac{dy}{dX},\quad y'' = \frac{d^2y}{dX^2}.$$

---

1) Bulletin de la Société mathématique de France, tom. 7, 1879, p. 83.

Wir erhalten also:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{U_{31}\cdot x' - 3\,U_{21}\cdot x''}{x'^4}, \tag{5}$$

wenn

$$U_{ik} = y^{(i)}x^{(k)} - y^{(k)}x^{(i)} \tag{6}$$

gesetzt wird, ferner:

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \tag{7}$$
$$= \frac{x'(U_{41}x' - 2\,U_{31}x'' - 3\,U_{21}x''' + U_{32}x') - 4\,x''(U_{31}x' - 3\,U_{21}x'')}{x'^5}$$

und:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{5}{3}} \frac{d\,\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{dX}\,\frac{1}{x'}, \tag{8}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{10}{9}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{8}{3}}\left[\frac{d}{dX}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)\right]^2\frac{1}{x'^2} \tag{9}$$
$$-\frac{2}{3}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{5}{3}}\left[\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)\right]\frac{1}{x'^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{5}{3}}\left[\frac{d}{dX}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)\right]\frac{x''}{x'^3},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(\eta)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{80}{27}\eta^{-\frac{11}{3}}\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^3\frac{1}{x'^3} + \frac{10}{3}\eta^{-\frac{8}{3}}\frac{d\eta}{dX}\,\frac{d^2\eta}{dX^2}\,\frac{1}{x'^3} \tag{10}$$
$$-\frac{10}{3}\eta^{-\frac{8}{3}}\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^2\frac{x''}{x'^4} - \frac{2}{3}\eta^{-\frac{5}{3}}\frac{d^3\eta}{dX^3}\,\frac{1}{x'^3} + 2\,\eta^{-\frac{5}{3}}\frac{d^2\eta}{dX^2}\,\frac{x''}{x'^4}$$
$$+\frac{2}{3}\eta^{-\frac{5}{3}}\frac{d\eta}{dX}\left(\frac{x'''}{x'^4} - 3\,\frac{x''^2}{x'^5}\right),$$

worin $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ zur Abkürzung durch η ersetzt ist. Der Ausdruck (9) ergibt dann die allgemeine Gleichung der Parabel in der folgenden Form:

$$5\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 x' - 3\,\eta\,\frac{d^2\eta}{dx^2}\,x' + 3\,\eta\,\frac{d\eta}{dx}\,x'' = 0.$$

Setzt man hier die Ausdrücke (4), (5) und (6) ein, so wird schließlich die Differentialgleichung der Parabel:

$$5\,(U_{31}x' - 3\,U_{21}x'')^2 - 3\,U_{21}[U_{41}x'^2 - 6\,U_{31}x''x' - 3\,U_{21}x'''x'$$
$$+ U_{32}x'^2 + 12\,U_{21}x''^2] + 3\,U_{21}(U_{31}x' - 3\,U_{21}x'')\,x'' = 0$$

oder, da links ein Faktor x' heraustritt:

$$(11)\quad 9U_{21}^2 x''' - 9U_{21}U_{31}x'' + [5U_{31}^2 - 3(U_{41}+U_{32})U_{21}]x' = 0.$$

Durch Vertauschung von x mit y ergibt sich die weitere Gleichung:

$$(12)\quad 9U_{21}^2 y''' - 9U_{21}U_{31}y'' + [5U_{31}^2 - 3(U_{41}+U_{32})]y' = 0.$$

Um das entsprechende für beliebige Kegelschnitte zu erhalten, bedürfen wir noch der aus (7) durch Differentiation nach x fließenden Relation:

$$\begin{aligned}\frac{d^3\eta}{dX^3} = \frac{1}{x'^7}[(U_{51}+2U_{42})x'^3 - (U_{41}+5U_{32})x'^2x'' - 5U_{31}x'^2x'''\\ (13)\qquad + 9U_{21}x'x''x'''].\end{aligned}$$

Gemäß (2) erhalten wir die betreffende Differentialgleichung durch Nullsetzen der rechten Seite von (10) in der Form:

$$\begin{aligned}40\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^3 x'^2 - 45\eta\frac{d\eta}{dX}\frac{d^2\eta}{dX^2}x'^2 + 45\eta\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^2 x'x''\\ + 9\eta^2\frac{d^3\eta}{dX^3}x'^2 - 27\eta^2\frac{d^2\eta}{dX^2}x'x'' - 9\eta^2\frac{d\eta}{dX}(x'x''' - 3x''^2) = 0,\end{aligned}$$

in der für η und die Differentialquotienten von η die obigen Werte einzusetzen sind.

§ 2. Die Ecken des Parabelpolygons.

Wir bestimmen einen Punkt x, y der Ebenen durch die beiden Koordinaten

$$(14)\qquad z = x + iy,\quad z_1 = x - iy.$$

· Dann ist, wenn:

$$V_{kl} = z_1^{(k)}z^{(l)} - z^{(k)}z_1^{(l)} = \frac{d^k z_1}{dX^k}\frac{d^l z}{dX^l} - \frac{d^k z}{dX^k}\frac{d^l z_1}{dX^l}$$

gesetzt wird:

$$V_{kl} = -2i\,U_{kl}.$$

Aus den beiden in x bzw. y linearen Gleichungen (11) und (12) ergibt sich also auch:

$$(15)\quad 9V_{21}^2 z''' - 9V_{21}V_{31}z'' + [5V_{31}^2 - 3(V_{41}+V_{32})V_{21}]z' = 0.$$

Gelingt es also, die Größen V_{kl} als Funktionen von Z (wo Z einen Punkt der Halbebene bezeichnet, auf welche das Parabelpolygon abzubilden ist, und nunmehr X durch Z ersetzt wird) zu bestimmen, so genügt die gesuchte Funktion z von Z einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Die singulären Punkte dieser Gleichung sind die Unendlichkeits- und Verzweigungspunkte der Koeffizienten V_{kl}, d. h. der Funktionen:

$$\frac{V_{31}}{V_{21}}, \quad \frac{V_{41}}{V_{21}} \text{ und } \frac{V_{32}}{V_{21}}. \tag{16}$$

Als singuläre Stellen kommen ferner die Ecken des Parabelpolygons in Betracht. Eine solche Ecke denken wir uns der Einfachheit halber im Anfangspunkte $x = 0$, $y = 0$. Die beiden dort zusammentreffenden Parabeln lassen sich durch einen Parameter t mittels der Formeln

$$x = a_1 t + a_2 t^2, \quad y = b_1 t + b_2 t^2, \text{ und:}$$
$$x = a_1' t + a_2' t^2, \quad y = b_1' t + b_2' t^2$$

darstellen, wo dann der Wert $t = 0$ der im Anfangspunkte liegenden Ecke entspricht; also auch für die erste Parabel:

$$z = (a_1 + i b_1) t + (a_2 + i b_2) t^2, \tag{17}$$

und für die zweite Parabel:

$$z = (a_1' + i b_1') t + (a_2' + i b_2') t^2. \tag{18}$$

Die Tangenten der beiden Parabeln mögen miteinander im Punkte $t = 0$ den Winkel λ einschließen, und es seien α und α' die Winkel dieser Tangenten gegen die x-Axe; dann ist:

$$a_1 + i b_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot e^{i\alpha}$$
$$a_1' + i b_1' = \sqrt{a_1'^2 + b_1'^2} \cdot e^{i\alpha'}, \text{ und } \alpha' = \alpha + \pi - \lambda.$$

Für die erste Parabel sei nun t durch τ, für die zweite Parabel t durch τ_1 gemäß den Formeln:

$$\tau = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot t, \quad \tau_1 = \sqrt{a_1'^2 + b_1'^2} \cdot t$$

ersetzt; dann geben die Gleichungen (17) und (18):

$$z = e^{i\alpha} \tau + (a + i b) \tau^2, \text{ und}$$
$$z = e^{i\alpha'} \tau_1 + (a' + i b') \tau_1^2.$$

Da z im Innern der oberen Halbebene ($Y > 0$) eine eindeutige Funktion von $Z = X + iY$ ist, so ist auch (abgesehen vom Brennpunkte), τ eine eindeutige Funktion von Z, und letztere ist reell auf dem Rande ($Y = 0$), und beim Übergang von der ersten Parabel auf die zweite verwandelt sich $e^{i\alpha}\tau$ in $e^{i\alpha'}\tau_1 = e^{i(\alpha+\pi-\lambda)}\tau_1$. Es kann daher, wenn $X = A$ auf der reellen Axe der Ecke $t = 0$ entspricht, in der Umgebung dieses Punktes

$$\tau = (Z - A)^{\frac{\lambda}{\pi}} \mathfrak{P}(Z - A) \tag{19}$$

gesetzt werden, wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bedeutet, deren konstantes Glied von Null verschieden ist, denn bei diesem Übergange von $X < A$ nach $X > A$ wächst $(Z - A)$ um den Faktor $e^{-\pi i}$, $(Z - A)^{\frac{\lambda}{\pi} - 1}$ also um den Faktor $e^{i(\pi-\lambda)}$. Da τ für $Z = X < A$ reell sein muß, sind die sonst reellen Koeffizienten von $\mathfrak{P}$ mit einem entsprechenden Faktor zu versehen.

Um die Koeffizienten der linearen Gleichung (15) als Funktionen von Z zu bestimmen, haben wir den Einfluß der Substitution $t = f(X)$ auf die Größen V_{ik} festzustellen, wo wieder t für τ geschrieben ist. Es ist

$$\frac{dz}{dX} = \frac{dz}{dt} f'(X), \quad \frac{d^2z}{dX^2} = \frac{d^2z}{dt^2} f'(X)^2 + \frac{dz}{dt} f''(X),$$

$$\frac{d^3z}{dX^3} = \frac{d^3z}{dt^3} f'(X)^3 + 3\frac{d^2z}{dt^2} f'(X) f''(X) + \frac{dz}{dt} f'''(X),$$

$$\frac{d^4z}{dX^4} = \frac{d^4z}{dt^4} f'(X)^4 + 6\frac{d^3z}{dt^3} f'(X)^2 f''(X) + \frac{d^2z}{dt^2}[3f''(X)^2 + 4f'(X)f'''(X)] + \frac{dz}{dt} f^{\mathrm{IV}}(X).$$

Für die Differentialquotienten von z_1 gelten die gleichen Beziehungen, denn $f(X)$ ist eine für reelle Werte von X reelle Funktion. Setzt man noch

$$W_{kl} = \frac{d^kz}{dt^k}\frac{d^lz_1}{dt^l} - \frac{d^lz}{dt^l}\frac{d^kz_1}{dt^k},$$

so wird:

$$V_{21} = f'(X)^3 W_{21}, \quad V_{31} = f'^4 \cdot W_{31} + 3f'^2 f'' \cdot W_{21},$$
$$V_{41} = f'^5 \cdot W_{41} + 6f'^3 f'' \cdot W_{31} + f'(3f''^2 + 4f'f''') \cdot W_{21},$$
$$V_{32} = f'^5 W_{32} + f'^3 f'' W_{31} + (3f'f''^2 - f'^2 f''') \cdot W_{21}.$$

Es waren aber z und z_1 ganze quadratische Funktionen von t bzw. τ; infolgedessen verschwinden die Ausdrücke W_{31}, W_{32}, W_{41}, und wir erhalten einfach:

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\frac{f''}{f'}, \quad \frac{V_{32}}{V_{21}} = 3\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{f'''}{f'},$$
$$\frac{V_{41}}{V_{21}} = 3\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + 4\frac{f'''}{f'}.$$

Setzt man endlich für $f(X)$ die in (19) gegebene Potenzreihe ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{V_{31}}{V_{21}} &= 3\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\frac{1}{X-A} + \mathfrak{P}_1(X-A), \\ \frac{V_{32}}{V_{21}} &= \left(2\frac{\lambda^2}{\pi^2} - 3\frac{\lambda}{\pi} + 1\right)\frac{1}{(X-A)^2} + \mathfrak{P}_2(X-A), \\ \frac{V_{41}}{V_{21}} &= \left(7\frac{\lambda^2}{\pi^2} - 18\frac{\lambda}{\pi} + 11\right)\frac{1}{(X-A)^2} + \mathfrak{P}_3(X-A), \end{aligned} \tag{20}$$

wo mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ wieder Potenzreihen bezeichnet sind, die in der Umgebung des Punktes A konvergieren. Schreiben wir die Differentialgleichung (15) in der Form

$$z''' + Pz'' + Qz' = 0, \tag{21}$$

so erhalten wir also für die Umgebung der singulären Stelle A:

$$\begin{aligned} P &= 3\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right)\frac{1}{X-A} - \mathfrak{P}_1(X-A), \\ Q &= \left(2\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\frac{1}{(X-A)^2} + \frac{a}{X-A} + \mathfrak{P}_4(X-A), \end{aligned} \tag{22}$$

wo a eine Konstante und $\mathfrak{P}_4$ eine neue Potenzreihe bedeutet, und zwar ist:

$$a = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)c_0,$$

wenn c_0 das konstante Glied der Reihe $\mathfrak{P}_1$ bezeichnet.

Das gleiche gilt für alle Ecken; es folgt also, daß bei passender Bestimmung der auftretenden Konstanten die Funktionen

$$
(22\,\mathrm{a})\qquad
\begin{aligned}
&P - 3\sum_{s=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_s}{\pi}\right)\frac{1}{Z-A_s} \quad \text{und}\\
&Q - \sum\left(2\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\left(\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\frac{1}{(Z-A_s)^2} - \sum\frac{a_s}{Z-A_s}
\end{aligned}
$$

in den Punkten A_s der reellen Axe, welche den Ecken des Polygons entsprechen, sich nicht mehr singulär verhalten.

Auf dem Rande des Parabelpolygons, d. h. auf der reellen Axe der Z-Ebene können andere singuläre Stellen nicht vorkommen, denn der Nenner V_{21} der Funktionen wird nur für einen Wendepunkt der Randkurve gleich Null, und solche Punkte treten bei Kegelschnitten nicht auf.

§ 3. Die Brennpunkte der Parabeln.

Um die Größen V_{kl} als Funktionen von Z im Innern der Halbebene $Y > 0$ zu bestimmen, müssen wir unter z_1 diejenige Funktion verstehen, welche sich ergibt, wenn man den auf dem Rande geltenden Wert $z_1 = x - iy$ stetig fortsetzt. Diese Fortsetzung fällt aber verschieden aus, je nachdem, von welcher Parabel der Begrenzung man ausgeht. Längs einer Parabel, deren Gleichung in der Form

$$
(23)\qquad a_{11}z^2 + a_{22}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + 2a_{13}z + 2a_{23}z_1 + a_{33} = 0
$$

mit der Bedingung $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ (die für die Variable z, z_1 ebenso gilt wie für die Variable x, y) gegeben ist, wird:

$$
(24)\qquad a_{22}z_1 = -(a_{12}z + a_{23}) \pm \sqrt{2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})z + a_{23}^2 - a_{22}a_{33}},
$$

und dieser Wert nimmt den zu z konjugierten Wert an, wenn der Punkt auf der Parabel liegt. Im allgemeinen definiert die vorstehende Gleichung eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, welche sich über der z-Ebene ausbreitet und einen Verzweigungspunkt im Endlichen (den zweiten im Unendlichen) besitzt. Etwa im oberen Blatte derselben denken wir uns das Parabelpolygon gezeichnet. Überschreitet der Punkt Z denjenigen

Teil der reellen Axe, welcher der Parabel (23) bei der Abbildung entspricht, so verläßt der Punkt z das Innere des Parabelpolygons, und der unteren Halbebene ($Y < 0$) der Z-Ebene entspricht im oberen Blatte der Riemannschen Fläche ein Polygon, das aus dem gegebenen Parabelpolygon durch eine Art „Spiegelung“ an der Parabel (23) entsteht[1]).

Liegt der Verzweigungspunkt p der Funktion (24), der bekanntlich mit dem Brennpunkte der Parabel (23) identisch ist, im Innern des gegebenen Polygons, so muß auch dort die Abbildung eindeutig und eindeutig umkehrbar sein. Es besteht also eine Gleichung der Form

$$z - p = \mathfrak{P}(Z - P), \tag{25}$$

wenn P den dem Punkte p in der Halbebene $Y > 0$ entsprechenden Punkt bezeichnet, wobei das konstante Glied der Potenzreihe $\mathfrak{P}$ gleich Null ist. Die Gleichung (24) ergibt also ein Resultat der Form

$$\begin{aligned} z_1 = A z + B + C\sqrt{z - p} = A\,\mathfrak{P}(Z - P) + B \\ + C\sqrt{\mathfrak{P}(Z - P)}, \end{aligned} \tag{26}$$

wo A, B, C Konstante bezeichnen. Die Funktion z_1 hat also in P einen Verzweigungspunkt. Entsprechend muß dann die Funktion z in dem konjugierten Punkte P_1 (in der Halbebene $Y < 0$) einen Verzweigungspunkt haben. Die Brennpunkte der anderen begrenzenden Parabeln spielen bei der Fortsetzung über die Parabel (23) hinaus keine besondere Rolle.

Die Differentiation von (26) nach Z gibt:

$$z_1' = A z' + \frac{1}{2}\,\frac{C}{\sqrt{z - p}}\,z',$$

$$z_1'' = A z'' + \frac{1}{2}\,\frac{C}{\sqrt{z - p}}\,z'' - \frac{1}{4}\,\frac{C}{(z - p)^{3/2}}\,z'^2,$$

also: $$V_{21} = z_1'' z' - z_1' z'' = -\tfrac{1}{4}\,C z'^3 (z - p)^{-3/2},$$

[1]) Vgl. meinen Aufsatz „Die analytische Fortsetzung derjenigen Funktionen, welche das Innere eines Kegelschnittes konform auf die Halbebene abbilden“, diese Sitzungsberichte, Bd. 26, 1896, p. 401 ff.

ferner:

$$z_1''' = Az''' + \tfrac{1}{2}C(z-p)^{-1/2}z''' - \tfrac{3}{4}C(z-p)^{-3/2}z'z'' + \tfrac{3}{8}C(z-p)^{-5/2}z'^3,$$

also:

$$V_{31} = z_1'''z' - z_1'z''' = -\tfrac{3}{4}C(z-p)^{-3/2}z'^2z'' + \tfrac{3}{8}C(z-p)^{-5/2}z'^4 = \frac{dV_{21}}{dZ}$$

und folglich:

(27) $$\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\frac{z''}{z'} - \tfrac{3}{2}(z-p)^{-1}z'.$$

Diese Funktion hat also an der Stelle P einen Pol erster Ordnung und (da sie reell auf dem Rande ist, indem sie sich bei Vertauschung von z mit z_1, d. i. von $X+iY$ mit $X-iY$, nicht ändert) an der konjugierten Stelle P_1 ebenfalls einen Pol erster Ordnung. Es wird ferner:

$$V_{32} = z_1'''z'' - z_1''z''' = \tfrac{1}{4}C(z-p)^{-3/2}(z'^2z''' - 3z'z''^2) + \tfrac{3}{8}C(z-p)^{-5/2}z'^3z'',$$

(28) $$\frac{V_{32}}{V_{21}} = -z'^{-2}(z'z''' - 3z''^2) - \tfrac{3}{2}(z-p)^{-1}z''.$$

Auch diese Funktion hat also in den Punkten P und P_1 je einen Pol erster Ordnung. Entsprechend findet man, daß die Funktion $\frac{V_{41}}{V_{21}}$ an diesen Stellen einen Pol zweiter Ordnung haben muß.

Zur genaueren Kenntnis der durch die Gleichung (24) vermittelten „Spiegelung" an der Parabel (23) dienen noch die folgenden Überlegungen. Man hat in dieser Gleichung (24)

$$z_1 = \xi - i\eta$$

zu setzen; dann ordnet sie jedem Punkte x, y (gegeben durch $z = x + iy$) zwei Punkte ξ, η zu; und wenn x, y auf der Parabel (23) liegt, wird $\xi = x$, $\eta = y$. Liegt der Brennpunkt im Innern des gegebenen Parabelpolygons, so werden die beiden Blätter der durch die Quadratwurzel über der z-Ebene ausgebreiteten zweiblättrigen Fläche, jedes Blatt begrenzt durch das

Parabelpolygon (das aus n Parabelbögen bestehen möge), abgebildet auf ein aus $2n$ algebraischer Kurven begrenztes geschlossenes Polygon, das sich nur in dem einen (etwa dem oberen) Blatte der Riemannschen Fläche ausbreitet, in dem die Parabel (23) und das gegebene Polygon gezeichnet gedacht werden. Um die Gleichung der Kurve zu finden, die einem der gegebenen Parabelbögen entspricht, hat man in folgender Weise zu verfahren. Die Parabel, an welcher gespiegelt wird, habe die Gleichung

$$f(z, z_1) = 0 \tag{29}$$

wie in (23). Ein anderer Parabelbogen sei durch die Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{30}$$

in rechtwinkligen Koordinaten gegeben. Ersetzt man in f z_1 durch $\xi - i\eta$, so wird $f = u(x, y, \xi, \eta) + iv(x, y, \xi, \eta)$; man hat dann aus den drei Gleichungen:

$$u(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad v(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

x, y zu eliminieren, um die gesuchte Begrenzungskurve des durch Spiegelung erzeugten Polygons zu finden.

Eine Seite des letzteren wird durch die gegebene Parabel (29) geliefert, eine andere Seite derselben erhält man, indem man letztere als im unteren Blatte der Riemannschen Fläche gelegen betrachtet und demgemäß die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ durch $f(x + iy, x - iy) = 0$ ersetzt.

Jede Transformation zwischen $x + iy$ und $\xi - i\eta$ kann aufgefaßt werden als eine Transformation der Strahlen, die von den beiden imaginären Kreispunkten der Ebene ausgehen; aus jedem Strahle wird ein anderer oder werden mehrere andere. Der Punkt x, y (bzw. ξ, η) ist der eine reelle Punkt eines solchen imaginären Strahls[1]). Die Brennpunkte einer Kurve sind die reellen Punkte der von einem Kreispunkte ausgehen-

[1]) Vgl. meine Darstellung einer solchen Interpretation der komplexen Ebene in dem meiner Bearbeitung von Celebschs Vorlesungen über Geometrie, Bd. II, S. 621 ff., 1891 oder eine entsprechende Darstellung am Schlusse der neuen Auflage des ersten Bandes.

den Tangenten. Eine von einem Kreispunkte ausgehende Tangente der Kurve $\varphi = 0$ geht in eine ebensolche Tangente der neuen Kurve über; dem Brennpunkt der Parabel $\varphi = 0$ (falls er im Innern des betrachteten Polygons liegt) entsprechen daher zwei Brennpunkte der transformierten Kurve, die sich im Innern des durch „Spiegelung" erhaltenen Polygons befinden.

Vorstehendes gilt, wenn der Brennpunkt der gegebenen Parabel $f = 0$ im Innern des gegebenen Polygons liegt. Ist dies nicht der Fall, so ist das Polygon im oberen Blatte der Riemannschen Fläche schon geschlossen, und die Spiegelung gibt ein Polygon, das ebenfalls durch n Kurvenbögen (nicht $2n$) begrenzt wird.

Liegt der Brennpunkt der Parabel (23), d. h. der Verzweigungspunkt der betrachteten Riemannschen Fläche, nicht innerhalb des gegebenen Parabelpolygons, so kommt letzteres nur insofern in Betracht, als es im oberen Blatte der Fläche sich befindet, und durch die Spiegelung an der Parabel (23) entsteht wieder ein von n Kurvenbögen begrenztes Flächenstück, denn für das Innere des Polygons ist jetzt die Transformation eindeutig.

§ 4. Die Brennpunkte als scheinbar singuläre Punkte.

Auf Grund der Formeln (25), (27) und (28) und auf Grund der daran geknüpften Darlegungen lassen sich Konstante β, β', β'', γ so bestimmen, daß die Funktionen

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} - \frac{\beta_1}{Z-P_1} - \frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}}, \quad \frac{V_{32}}{V_{21}} - \frac{\beta_1'}{Z-P_1} - \frac{\beta_{11}'}{Z-P_{11}},$$

$$\frac{V_{41}}{V_{21}} - \frac{\beta_1''}{Z-P_1} - \frac{\gamma_1}{(Z-P_1)^2} - \frac{\beta_1''}{Z-P_{11}} - \frac{\gamma_{11}}{(Z-P_{11})^2}$$

als Funktionen von z auf derjenigen zweiblättrigen Fläche, welche entsteht, wenn man z_1 entsprechend der Gleichung (26) als Funktion von z auffaßt, im Innern des Parabelpolygons nicht mehr singulär sind. Dabei ist $Z = P_1$ derjenige Punkt der Halbebene $Y > 0$, welcher dem Brennpunkt der Parabel (23) entsprechen soll, P_{11} der konjugiert imaginäre Punkt, und β_1, β_1', β_1'', γ_1 sind Konstante, die nur dann von Null verschieden sind, wenn der bezeichnete Brennpunkt im Innern des gegebenen Polygons liegt, während β_{11}, β_{11}', β_{11}'', γ_{11} die konjugiert imaginären Konstanten bedeuten.

Haben für eine zweite von den begrenzenden Parabeln die Konstanten P_2, P_{21}, β_2, β_{21}, β_2', β_{21}', β_2'', β_{21}'', γ_2, γ_{21} die entsprechende Bedeutung, so werden die Funktionen

$$(31)\quad \begin{aligned}
&\frac{V_{31}}{V_{21}}-\frac{\beta_1}{Z-P_1}-\frac{\beta_2}{Z-P_2}-\frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}}-\frac{\beta_{21}}{Z-P_{21}},\\
&\frac{V_{32}}{V_{21}}-\frac{\beta_1'}{Z-P_1}-\frac{\beta_2'}{Z-P_2}-\frac{\beta_{11}'}{Z-P_{11}}-\frac{\beta_{21}'}{Z-P_{21}},\\
&\frac{V_{41}}{V_{21}}-\frac{\beta_1''}{Z-P_1}-\frac{\beta_{11}''}{Z-P_{11}}-\frac{\beta_2''}{Z-P_2}-\frac{\beta_{21}''}{Z-P_{21}}\\
&\quad-\frac{\gamma_1}{(Z-P_1)^2}-\frac{\gamma_2}{(Z-P_2)^2}-\frac{\gamma_{11}}{(Z-P_{11})^2}-\frac{\gamma_{21}}{(Z-P_{21})^2}
\end{aligned}$$

weder auf der zur ersten Parabel gehörigen Riemannschen Fläche in deren Brennpunkten, noch auf der zur zweiten Parabel gehörigen zweiblättrigen Fläche im Brennpunkte dieser zweiten Parabel singulär.

Die obige Gleichung (29) zeigt aber, daß der Quotient $V_{31}:V_{21}$ eine eindeutige Funktion in der Umgebung des Brennpunktes p ist. Es ist deshalb die Betrachtung der beiden Blätter der Riemannschen Flächen nicht weiter notwendig; und jener Quotient ist auch eine eindeutige Funktion von z in der Umgebung eines jeden Brennpunktes, der sich im Innern des Parabelpolygons befindet, folglich auch in der Halbebene $Y>0$. In jedem solchen Brennpunkte hat der Quotient einen Pol erster Ordnung, und er ist reell auf dem Rande; in der Z-Ebene hat er folglich an dem entsprechenden Punkte P einen Pol erster Ordnung, ebenso aber auch an dem konjugiert imaginären Punkte P_1 der Halbebene $Y<0$. Man kommt so zu dem Schluß, daß die Funktionen

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} - \sum_s \left(\frac{\beta_s}{Z - P_s} + \frac{\beta_{s1}}{Z - P_{s1}} \right), \quad \frac{V_{32}}{V_{21}} - \sum_s \left(\frac{\beta'_s}{Z - P_s} + \frac{\beta'_{s1}}{Z - P_{s1}} \right),$$

$$(32) \quad \frac{V_{41}}{V_{21}} - \sum_s \left(\frac{\beta''_s}{Z - P_s} + \frac{\beta''_{s1}}{Z - P_{s1}} + \frac{\gamma_s}{(Z - P_s)^2} + \frac{\gamma_{s1}}{(Z - P_{s1})^2} \right),$$

wo sich die Summen über alle im Innern des Polygons liegenden Brennpunkte der begrenzenden Parabeln erstrecken, im Innern der oberen Halbebene keine Singularität mehr besitzen; aber auch in der unteren Halbebene ($Y < 0$) verhalten sie sich überall regulär; nur auf der reellen Axe liegen die singulären Stellen, die den Ecken des Polygons entsprechen.

§ 5. Aufstellung der Differentialgleichung.

Die in der Differentialgleichung (15) auftretenden Koeffizienten P und Q sind durch vorstehende Untersuchungen bis auf Konstante bestimmt, denn andere als die in den §§ 2 und 4 besprochenen singulären Punkte können nicht vorkommen. Bis auf stets konvergente Potenzreihen setzen sich also die Funktionen P, Q aus den Summen zusammen, die für die Quotienten $V_{31} : V_{21}$, $V_{32} : V_{21}$ und $V_{41} : V_{21}$ in den Gleichungen (22a) und (32) aufgestellt wurden.

Damit kein singulärer Punkt im Unendlichen auftritt, muß die lineare homogene Differentialgleichung (15) zu der sogenannten Fuchsschen Klasse gehören, d. h. die betreffenden Potenzreihen müssen sich auf Null reduzieren. Wegen der Identitäten

$$\frac{dV_{21}}{dZ} = V_{31}, \quad \frac{dV_{31}}{dZ} = V_{41} + V_{32}$$

genügen die oben eingeführten Konstanten α, β, β', β'' und γ gewissen leicht aufzustellenden Bedingungen; die vollständige Aufstellung derselben würde die Entwicklung des Quadrates des Quotienten $V_{31} : V_{21}$ in Partialbrüche verlangen. Schließlich wird somit das Problem der Abbildung des Parabelpolygons der z-Ebene auf die Halbebene $Y > 0$ der Z-Ebene durch die Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$z''' + Pz'' + Qz' = 0 \tag{33}$$

vermittelt, worin

$$P = -\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\sum_{s=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_s}{\pi}\right)\frac{1}{Z-A_s} - \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\beta_s}{Z-P_s} + \frac{\beta_{s1}}{Z-P_{s1}}\right)$$

$$Q = \frac{5}{9}\left(\frac{V_{31}}{V_{21}}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{V_{32}+V_{41}}{V_{21}} = \sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{2\lambda_s}{\pi}-1\right)\left(\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\frac{1}{(Z-A_s)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a_s}{Z-A_s}\right] + \frac{5}{9}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\beta_s}{Z-P_s} + \frac{\beta_{s1}}{Z-P_{s1}}\right)^2 - \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\delta_s}{Z-P_s}\right.$$
$$\left. + \frac{\delta_{s1}}{Z-P_{s1}} + \frac{\gamma_s}{(Z-P_s)^2} + \frac{\gamma_{s1}}{(Z-P_{s1})^2}\right]. \tag{34}$$

Hierbei haben die Konstanten β, γ, P die frühere Bedeutung, und es ist $\delta_s = \beta_s' + \beta_s''$, $\delta_{s1} = \beta_{s1}' + \beta_{s1}''$ gesetzt; mit A_s sind die reellen Punkte der X-Axe bezeichnet, welche den n Ecken des Parabelpolygons entsprechen sollen, a_s sind zugehörige reelle Konstanten, λ_s sind die Winkel des Polygons an diesen Ecken. Die Konstanten β, γ, δ sind nur für diejenigen Werte des Index s von Null verschieden, für welche der dem Punkte P_s entsprechende Parabelbrennpunkt im I n n e r n des gegebenen Polygons liegt.

Die Punkte P sind zwar singuläre Punkte der Differentialgleichung (33), aber nicht singuläre Punkte der Abbildung. Für jeden solchen Punkt muß also eine Wurzel der zugehörigen determinierenden Fundamentalgleichung gleich Null sein; da in (33) das Glied mit z' fehlt, ist diese Bedingung von selbst erfüllt. Es muß ferner die analytische Fortsetzung des so zu einem Punkte P gehörigen eindeutigen Fundamentalintegrals übergehen in das zu einem anderen Punkte P in gleicher Weise gehörige eindeutige Fundamentalintegral.

Als ein erstes Integral der Differentialgleichung (33) kann die zu (27) analoge Gleichung

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\frac{z''}{z'} - \frac{3}{2}\frac{z'}{z-C} \tag{35}$$

betrachtet werden, in welcher C eine Integrationskonstante bedeutet; in der Tat ergibt sich durch Differentiation und Elimination von C wieder die Gleichung (15) bzw. (21). Die linke Seite ist dabei durch die in (34) angegebene Funktion $-P$ von Z zu ersetzen.

§ 6. Beispiele.

Es handle sich erstens um die Abbildung des Innern einer einzelnen Parabel. Dieselbe läßt sich auf eine Gleichung von der Form[1])

$$\frac{dz}{\sqrt{z-p}} = C \frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}}$$

zurückführen, wo p den Brennpunkt der Parabel bezeichnet, welchem der Punkt $Z = i$ entsprechen soll, und C eine Konstante bedeutet. Also:

$$z' = C\sqrt{\frac{z-p}{1+Z^2}}, \quad z'' = \tfrac{1}{2} C \frac{z'}{\sqrt{z-p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}} - C\frac{Z\sqrt{z-p}}{(1+Z^2)^{3/2}}$$
$$= \tfrac{1}{2} C^2 \frac{1}{1+Z^2} - \frac{Z \cdot z'}{1+Z^2},$$

$$z''' = -\frac{C^2 Z}{(1+Z^2)^2} - \frac{z'}{1+Z^2} - \frac{Zz''}{1+Z^2} + 2\frac{Z^2 \cdot z'}{(1+Z^2)^2}$$
$$= -\frac{2 \cdot Z}{1+Z^2}\left(z'' + \frac{Zz'}{1+Z^2}\right) - \frac{z'}{1+Z^2} - \frac{z'' Z}{1+Z^2} + \frac{2Z^2 z'}{(1+Z^2)^2}.$$

In der Tat besteht also die lineare Gleichung dritter Ordnung

$$z''' + 3\frac{Z}{1+Z^2} z'' + \frac{1}{1+Z^2} z' = 0,$$

wie es nach § 5 sein soll. Hier ist

$$\frac{\beta_1}{Z-P_1} + \frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}} = -\frac{3Z}{1+Z^2},$$
$$P_1 = -P_{11} = i, \quad \beta_1 = \beta_{11} = -\tfrac{3}{2},$$

[1]) Vgl. meine Abhandlung: Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen konfokaler Kegelschnitte begrenzt wird, Bd. XXV dieser Sitzungsberichte, 1895, p. 219 ff.

$$\frac{5}{9}\left(\frac{\beta_1}{Z-P_1}+\frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}}\right)^2 4-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta_1}{Z-P_1}+\frac{\delta_{11}}{Z-P_{11}}\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_1}{(Z-P_1)^2}+\frac{\gamma_{11}}{(Z-P_{11})^2}\right)=\frac{1}{1+Z^2},$$

also:
$$\gamma_1=\gamma_{11}=\tfrac{5}{4},\quad \delta_1=-\delta_{11}=i\,\tfrac{9}{2}.$$

Die Konstanten werden hiermit durch das Verhalten im Unendlichen bestimmt, da sich das Innere der Parabel ins Unendliche erstreckt, was bei den oben behandelten Parabelpolygonen nicht vorkommt.

Es handle sich zweitens um ein Parabelpolygon, in dessen Innern sich kein Brennpunkt der begrenzenden Parabeln befindet. Dann sind alle Konstanten β, γ und δ in den Formeln (34) gleich Null.

Ein solches Polygon entsteht aus einem geradlinigen Polygon der ζ-Ebene durch die Abbildung[1])

$$z=\zeta^2. \tag{36}$$

Nach dem Christoffelschen Resultate ist dann

$$\zeta'=C\cdot\prod_{s=1}^{n}(Z-A_s)^{\frac{\lambda_s}{\pi}-1},$$

wo C eine Konstante bedeutet; und

$$\frac{\zeta''}{\zeta'}=\sum_s\left(\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\frac{1}{Z-A_s}=R$$

ist reell auf dem Rande (d. h. für $Y=0$, $Z=X$).

Hier wird:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}+\frac{\zeta''}{\zeta'}=\frac{z''}{z'}$$

$$\frac{\zeta''}{\zeta}-\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}=\frac{z'''}{z'}-\left(\frac{z''}{z'}\right)^2-R'$$

oder:

---

[1]) Vgl. z. B. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, S. 122 ff.

$$\frac{\zeta''}{\zeta'}\left(\frac{z''}{z'} - R\right) - \left(\frac{z''}{z'} - R\right)^2 = \frac{z'''}{z'} - \left(\frac{z''}{z'}\right)^2 - R'$$

und schließlich:

$$z''' - 3\,R z'' + (2\,R^2 - R')\,z' = 0, \tag{37}$$

in Übereinstimmung mit den obigen Gleichungen (33) und (34), wie man mittelst der Identität

$$2\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right) = \left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\left(2\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)$$

leicht bestätigt. Die determinierende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (37) für den singulären Punkt A lautet:

$$\varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2) + 3\varrho(\varrho - 1)\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right) + \varrho\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\left(2\frac{\lambda}{\pi} - 1\right) = 0.$$

Sie hat die Wurzeln

$$\varrho = \frac{\lambda}{\pi}, \quad \varrho = 2\frac{\lambda}{\pi} \quad \text{und} \quad \varrho = 0,$$

was mit der Relation (36) in Übereinstimmung ist.