Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

KÖNIGL. PREUSS. AKADEMIE D. WISS.

Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. März 1920.

In einer Mitteilung, die kürzlich unter ähnlichem Titel, wie die vorliegende, in diesen Berichten (S. 65) erschienen ist, hat Herr Adolf Kneser einen Weg angegeben, um das als Grundlage der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie so überaus wirksame Hilfsmittel der *komplexen Integration* auch für die sogenannte *„elementare“*, d. h. Weierstraßische Funktionentheorie nutzbar zu machen. Während nun die Methode des Herrn Kneser, von einer *Spezial*definition des bestimmten Integrals einer Potenz mit positiv-ganzzahligen Exponenten ausgehend, im übrigen dem Weierstraßischen Begriffe des *bestimmten* Integrals (als Differenz der Werte des *unbestimmten* an den Integrationsgrenzen) nach Möglichkeit sich anzuschließen sucht, habe ich, in dem Bestreben einer Weiterbildung der Weierstraßischen Theorie, schon vor ziemlich langer Zeit kein Bedenken getragen, ihr in Gestalt gewisser Mittelwertbildungen als teilweisen Ersatz für die komplexe Integration ein prinzipiell *neues* Hilfsmittel einzufügen[1]) und bin inzwischen auch dazu gelangt, die Einführung der komplexen Integration auf Grund ihrer *allgemeinen* Definition und insbesondere den Beweis ihres Fundamentalsatzes, des Cauchyschen Integralsatzes, so elementar zu gestalten, daß nichts im Wege steht,

[1]) Diese Berichte, Bd. 25 (1895), S. 75 ff. und Math. Ann. 47 (1896), S. 121 ff.

sie der „*elementaren*“ Funktionentheorie an geeigneter Stelle anzugliedern. Bevor ich hierauf des näheren eingehe, sei es mir jedoch gestattet, die folgenden Bemerkungen hier einzuschalten.

In einer sehr eingehenden und sorgfältigen Besprechung[1]) der beiden ersten Abteilungen meiner „Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre“, als deren leitenden Grundgedanken ich es bezeichnet habe, die *elementaren* Methoden nach Möglichkeit *auszunützen* bzw. *auszubilden*, stellt Herr Hans Hahn die Frage auf (a. a. O., S. 338), was es denn eigentlich mit diesen „elementaren“ Methoden für eine Bewandtnis habe? Welches die Prinzipien seien, um derentwillen die eine Methode als „elementare“ bezeichnet und als solche verwendet werden dürfe, die andere nicht? Welcher charakteristische Unterschied zwischen Potenzreihe und Integral es bewirke, daß die erstere das Fundament einer „elementaren“ Funktionentheorie abgeben könne, das letztere aber nicht? Und Herr Hahn erwartet schließlich von mir, daß ich als besonderer Anhänger jener „elementaren“ Methoden in der Lage sein dürfte, zur Klärung der an diesen Ausdruck sich knüpfenden prinzipiellen Fragen etwas entscheidendes beizutragen. Ohne diese optimistische Ansicht zu teilen, möchte ich die vorliegende Gelegenheit, bei der es sich ja schließlich um eine „Elementarisierung“ der komplexen Integration handeln soll, zu einigen, lediglich meinen Standpunkt kennzeichnenden, keinerlei prinzipielle Geltung beanspruchenden Bemerkungen benützen. Dabei will ich mich, wie es der Zusammenhang mit sich bringt, auf *arithmetische*[2]) Methoden beschränken.

Auch in diesem beschränkten Umfange erscheint es mir von vornherein als ein aussichtsloses Bemühen, den Begriff „*elementare Methoden*“ ein für allemal eindeutig und einwandfrei festlegen zu wollen. Man müßte sich denn etwa uner-

[1]) Gött. gelehrte Anzeigen 1919, Nr. 9 und 10, S. 321—347.

[2]) Ich fasse unter dieser Bezeichnung alle möglichen auf die rechnerische Verknüpfung von Zahlen bezüglichen Methoden im Gegensatz zu den *geometrischen* zusammen, mag man sie auch im einzelnen als *algebraische, analytische, infinitesimale, funktionentheoretische* unterscheiden.

bittlich auf den Standpunkt stellen, die Anfangs-Rechenmethoden der Volksschule (in meiner Jugend ausdrücklich und nicht unpassend als „Elementarschule" bezeichnet), also *die vier Spezies* mit *positiven rationalen*[1]) Zahlen als die einzigen *„wirklich" elementaren* arithmetischen Methoden gelten zu lassen. Sowie man versucht, die Grenze höher zu legen, wird der Willkür ein weiter Spielraum geöffnet: ich wüßte nicht, warum es dann nicht freistehen sollte, *jede* Methode als *elementar* zu bezeichnen, wenn sie innerhalb eines bestimmten Zusammenhanges nach genügender Vorbereitung an der richtigen Stelle erscheint. Man kann z. B. die gesamte Lehre von den Funktionen *reeller* Veränderlichen bis in ihre modernsten Verfeinerungen entwickeln, ohne von der Existenz *komplexer* Zahlen den geringsten Gebrauch zu machen[2]). Hält man diesen durchaus berechtigten Standpunkt konsequent fest, so müßte man innerhalb des bezeichneten Zusammenhanges schließlich dazu gelangen, ein Lebesguesches Integral für ein *elementareres* Hilfsmittel anzusehen, als etwa eine n^{te} Einheitswurzel. Auf der anderen Seite glaube ich nicht fehl zu gehen, wenn ich das Bedürfnis, jeder quadratischen Gleichung eine Lösung zu verschaffen, für ein wesentlich *elementareres* erkläre, als dasjenige, einer im Riemannschen Sinne nicht integrierbaren Funktion noch zu einem Integral zu verhelfen, und wenn ich unter diesem Gesichtspunkte die Benützung *komplexer* Zahlen für ein Hilfsmittel äußerst *elementarer* Art halte. Dagegen scheint es mir z. B. *nicht* im Sinne einer *elementaren* Methodik zu liegen, wenn man gleich bei der ersten Einführung der komplexen Zahlen $a + bi$ deren transzendente Umformung:

[1]) Schon die *negativen* Zahlen (von den *irrationalen* und *komplexen* ganz zu schweigen!) scheiden hier aus, da sie mit einem unverkennbaren Stich ins „Nicht-Elementare" belastet sind: man erinnere sich nur, welches Zeitraums und welcher Kämpfe es bedurfte, bis sie das volle arithmetische Bürgerrecht erlangten.

[2]) Nur bei der Integration der rationalen Funktionen würde dieses Prinzip — wenigstens rein theoretisch — eine Lücke hinterlassen, die freilich für die praktische Ausführung der Integration nicht in Betracht kommt.

$$|\sqrt{a^2+b^2}|\left\{\cos \operatorname{arctang}\frac{b}{a}+i\sin \operatorname{arctang}\frac{b}{a}\right\}$$

in Anspruch nimmt (was zumeist auf rein *geometrischem* Wege, ohne ausreichende Erklärung des *arithmetischen* Zusammenhanges geschieht). Andererseits gewinnt das *nämliche* Hilfsmittel sofort den Charakter eines *elementaren*, wenn im Laufe der weiteren Entwickelungen die erforderlichen *Vorbedingungen* sich ergeben haben.

Hiernach wird man, wenn man dem Begriffe *„elementar"* näher kommen will, ihn immer nur als einen *relativen, nicht* als einen *absoluten* auffassen dürfen. Und es würde sich dann schließlich nur darum handeln, einen bestimmten Maßstab dafür aufzustellen, *welche* von zwei *vergleichbaren*, d. h. dem gleichen Zwecke dienenden Methoden als die *elementarere* zu gelten habe. Wird dann die als *elementarer* zu erachtende Methode kurzweg als *die elementare* bezeichnet, so scheint mir das nach den Gepflogenheiten unseres Sprachgebrauches gerade so erlaubt zu sein, wie wenn man z. B. von einem *großen* St. Bernhard oder *kleinen* Belt spricht.

Es dürfte kaum auf Widerspruch stoßen, wenn wir, um eine Grundlage zu gewinnen, mit zweckmäßiger Erweiterung des oben gekennzeichneten Standpunktes *die vier Spezies* mit beliebigen *reellen* Zahlen für die *elementarsten* arithmetischen Methoden erklären und, nach Einführung der *komplexen* Zahlen, die entsprechend erweiterten Operationen in diesen Kreis aufnehmen, da sie unmittelbar auf die erstgenannten zurückgeführt werden können. Jedes einzelne andere arithmetische Hilfsmittel mag dann als um so *elementarer* gelten, je begrifflich-einfacher sein Zusammenhang mit den vier Spezies ist und je weniger Schritte erforderlich sind, um es auf diese zurückzuführen. Und dementsprechend wird man eine Gesamtmethode als um so *elementarer* qualifizieren, je *elementarer* die einzelnen Hilfsmittel sind, mit denen sie arbeitet. Das wichtigste, ja man kann wohl sagen, das einzige neue Hilfsmittel, welches die Analysis den vier Spezies hinzufügt, ist der *Grenzwert-*

begriff in seinen mannigfachen Abstufungen und Komplikationen. Er erscheint in seiner *elementarsten*, den vier Spezies am nächsten liegenden Form als Grenzwert einer *abzählbaren* Menge *vorgeschriebener* Zahlen a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Als (sc. möglichst) *elementare* Behandlungsweise der Lehre von der Konvergenz sogenannter unendlicher Prozesse wird man nach dem gesagten eine solche bezeichnen dürfen, die in der Wahl ihrer Hilfsmittel über den eben erwähnten Begriff nicht hinausgeht, mit konsequenter Ausschließung merklich *zusammengesetzterer* Begriffe, wie *Funktion* einer *stetigen* Veränderlichen, *Differentialquotient* und *Integral*. Wenn Herr Hahn zugibt, daß durch eine derartige Beschränkung in der Auswahl der Methoden eine gewisse ästhetische Wirkung erzielt wird, so möchte ich dem hinzufügen, daß ich in einer solchen „ästhetischen" Wirkung eine *sehr* wesentliche (ganz im geheimen vielleicht sogar die wesentlichste) Eigenschaft der reinen Mathematik (d. h. der Mathematik als Selbstzweck) erblicke, und daß daher nach meinem Dafürhalten jede zusammenhängende Darstellung einer mathematischen Theorie in diesem Sinne den Charakter eines Kunstwerkes tragen oder wenigstens anstreben sollte (was vielleicht nicht allgemein anerkannt zu sein, jedenfalls aber nicht allzu oft den wünschenswerten Erfolg zu bringen scheint). Im übrigen bin ich der Ansicht, daß die Vorzüge einer *„elementaren"* Darstellung, wie der in Rede stehenden, mit jener „ästhetischen" Wirkung keineswegs erschöpft sind. Vielmehr glaube ich, daß das Operieren mit den *elementareren* und darum durchsichtigeren Hilfsmitteln in vielen Fällen einen deutlicheren Einblick in das Wesen der Dinge gewährt, als die mechanischer und versteckter arbeitenden Infinitesimal-Methoden. So wird doch z. B. durch die Herleitung der *logarithmischen Konvergenz- und Divergenzkriterien* mit Hilfe der Integration von $D(lg_m x)^{-\varrho}$ und $D\, lg_{m+1} x$ wohl nicht im entferntesten diejenige Einsicht in die hier wirksamen Zusammenhänge gewonnen, wie durch meine freilich weit umständlichere elementare Methode. Als ein nicht ganz wertloses Zeugnis für die Richtigkeit dieser Ansicht darf ich vielleicht die Tatsache anführen, daß im Cours d'Analyse von C. Jordan[1]) trotz der sonst sichtlich sehr gedrängten Darstellung und trotzdem doch hier die Infinitesimal-Rechnung das eigentliche Thema bildet und ihre Hilfsmittel bereits vollständig zur Verfügung stehen, jene *elementare* Herleitung in ausführlicher Behandlung der *infinitesimalen* vorangeschickt wird. Auch scheint mir, um noch einige andere Beispiele anzuführen, daß die Lehre von den sogenannten *unbestimmten Quotienten*, den *Doppellimites* einschließlich des Begriffes der *gleichmäßigen Konvergenz*, ebenso die Theorie der *Doppelreihen* ganz wesentlich an Klarheit gewinnt, wenn man mit völliger Ausschaltung des *Stetigkeits*begriffs sich zunächst auf die Betrachtung *abzählbarer* Zahlenmengen beschränkt.

Im vorstehenden dürften auch bereits die erforderlichen Anhaltspunkte zur Beantwortung der von Herrn Hahn aufgeworfenen Frage enthalten sein: „Was ist der charakteristische Unterschied zwischen den Grenzprozessen, die im Begriffe der Potenzreihe und dem des Integrals stecken, und der es bewirkt, daß jener das Fundament einer „elementaren" Funktionentheorie abgeben kann, dieser aber nicht?" Macht man das *komplexe Integral* zur Grundlage für den Aufbau der Funktionentheorie (d. h. der Theorie der analytischen Funktionen komplexer Veränderlichen), so erscheint diese zunächst als eine durchaus naturgemäße Ergänzung und Weiterbildung der *reellen Infinitesimal-Analysis.* Diese Auffassung stimmt vollständig mit der historischen Entwickelung überein[2]) und

---

[1]) 2ième éd. 1 (1893), No. 303—308.

[2]) Die ersten hierher gehörigen Cauchyschen Arbeiten verfolgen ausgesprochenermaßen nur den Zweck, in der *komplexen* Integration ein neues Hilfsmittel zur Berechnung *reeller* bestimmter Integrale zu gewinnen. Es sind dies die Zusätze, die Cauchy der schon im Jahre 1814 verfaßten, aber erst 1825 (in den Mém. des Savans étrangers I) veröffentlichten Abhandlung: „Mémoire sur la théorie des intégrales définies" bei dieser Gelegenheit hinzufügte; sodann namentlich die als besondere Schrift gleichfalls 1825 erschienene Abhandlung: „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires." Die Zusätze zur erstgenannten Arbeit enthalten bereits den Cauchyschen Integralsatz

findet eine äußerliche Bestätigung in der Tatsache, daß seit etwa einem halben Jahrhundert die Funktionentheorie der fraglichen Richtung einen ansehnlichen Bestandteil der meisten größeren, als *Traité d'Analyse* oder *Cours d'Analyse* bezeichneten französischen Lehrbücher bildet. Man darf wohl sagen, daß in *diesem* Zusammenhange das *komplexe Integral* nach genügender Vorbereitung an durchaus passender Stelle erscheint, daß man also im Anschluß an die oben gemachte Bemerkung berechtigt wäre, ihm die Bezeichnung eines *elementaren* Hilfsmittels beizulegen und es als geeignete Grundlage für eine *elementare* Funktionentheorie anzusehen. Doch was wäre damit gewonnen? Daß auf Grund der von *mir* vorgeschlagenen Definition die *Potenzreihe* als eine wesentlich *elementarere* Grundlage zu gelten hätte, bedarf wohl keiner weiteren Ausführung. Aber, auch wenn ich, ohne auf dieser Definition zu bestehen, mir alle die komplizierten Gedankenreihen vergegenwärtige, welche erforderlich sind, um die Begriffe des *komplexen Integrals* und der (in dem fraglichen Zusammenhange ja unentbehrlichen) *komplexen Differenzierbarkeit* gründlich festzulegen, so komme ich zu dem Schlusse: selbst der ärgste Gegner der *Potenzreihen* könnte keine Definition des Begriffes *„elementar"* ersinnen, bei deren Anwendung die Potenzreihe nicht den Sieg über das komplexe Integral davontragen müßte. Ich kann es mir nicht versagen, in diesem Zusammenhange noch die Aussage eines sicherlich völlig unverdächtigen Zeugen zu meinen Gunsten anzuführen: in der Vorrede zu seinem „Lehrbuch der Funktionentheorie"[1]) erklärt sich Herr Osgood für möglichste Ausmerzung der Potenzreihen aus der Funktionentheorie und fährt dann fort: „Doch darf man aus praktischen Gründen jene Reihe nicht zu sehr verdrängen, denn sie dient dem Anfänger zur Übung." Also: die *Potenzreihe* als *corpus vile* zur Schulung der Anfänger — gewiß doch ein recht schlagendes Zeugnis

---

für die Begrenzung eines *Rechtecks*, in der zweiten findet sich die Ausdehnung auf einen (im damaligen Sinne) *beliebigen* geschlossenen Integrationsweg.

[1]) 1907, S. IV.

für ihren äußerst *elementaren* Charakter. Aus alledem glaube ich die volle Berechtigung entnehmen zu dürfen, die auf die Lehre von den *Potenzreihen* aufgebaute Funktionentheorie als die *elementarere* und, um sie nicht beständig mit diesem schwerfälligen Komparativ zu belasten, schlechthin als die *elementare* zu bezeichnen.

Viel wichtiger als diese Namensfrage scheint mir aber die Frage nach der *Existenzberechtigung* jener *elementaren* Funktionentheorie. Man wird ihr, wie ich ohne Widerspruch annehmen zu dürfen glaube, bei angemessener Darstellung wiederum eine gewisse harmonische Einheitlichkeit und daraus entspringende ästhetische Wirkung zubilligen. Ich bin indessen der Meinung, daß sie doch noch andere nicht unerhebliche Vorzüge besitzt: mir erscheint nicht nur die Wahl des Ausgangspunktes und die daraus sich ergebende Anordnung des ganzen Aufbaus viel natürlicher, ich möchte sagen selbstverständlicher, als bei der Cauchyschen Theorie, sondern es zeigt sich auch hier wieder, daß die Anwendung der *elementareren* Methoden zumeist eine klarere Einsicht in das Zustandekommen der grundlegenden Ergebnisse und deren arithmetischen Zusammenhang ermöglicht, welcher durch den beweiskürzenden Mechanismus der komplexen Integration meist völlig verdeckt wird. Es ist hier nicht der Ort, diese meine Ansicht mit der nötigen Ausführlichkeit zu begründen, ich beschränke mich daher auf die folgenden Bemerkungen.

Die Erforschung der *Potenzreihen*, als der durch Hinzunahme des Grenzwertbegriffes entstehenden Verallgemeinerung des *einfachsten* Funktionstypus, der ganzen rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, entspricht einem unmittelbaren logischen Bedürfnis. Sie führt in bekannter Weise zu den Begriffen der *analytischen Fortsetzung* und der *analytischen Funktion* und zeigt, daß eine solche Funktion durch eine *abzählbare Menge von Konstanten* in ihrem ganzen Verlaufe bestimmt wird. Die naheliegende Vermutung, daß auch umgekehrt jene Konstanten durch eine passend gewählte *abzählbare Menge von Funktionswerten* darstellbar sein dürften, läßt sich unmittelbar durch Benützung einer gewissen Gattung von *Mittelwerten*[1]) bestätigen, die begrifflich *wesentlich einfachere* arithmetische Konstruktionen als die *Integrale*, insbesondere *keine unmittelbaren Spezialfälle*[2]) der letzteren sind. Man findet auf diese Weise, wenn $f(x) = \sum_0^\infty{}^\lambda a_\lambda (x - x_0)^\lambda$ gesetzt wird und der Kreis $|x - x_0| = r$ dem Bereiche gleichmäßiger Konvergenz dieser Reihe angehört[3]):

$$(1) \quad a_\lambda = \mathfrak{M}(r^{-\lambda} f(x_0 + r)) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_1^{2^n}{}^\nu (\alpha^\nu r)^{-\lambda} f(x_0 + \alpha^\nu r)$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

unter α die Hauptwurzel der Gleichung $x^{2^n} = 1$ verstanden.

Vergleichen wir hiermit die entsprechenden Anfangsschritte der Cauchyschen Theorie. Man geht hier von der Frage aus: Was läßt sich von einer Funktion $f(x)$ aussagen, von der man nichts weiter weiß, als daß sie in irgend einem zusammenhängenden Bereiche eindeutig ist und im komplexen Sinne einen Differentialquotienten besitzt? Mir erscheint diese Fragestellung äußerst willkürlich. Warum verlangt man überhaupt einen Differentialquotienten „im komplexen Sinne?" Es wäre ja möglich, daß man mit einer noch geringeren Forderung auskommt[4]). Oder aber: Warum verlangt man nicht gleich Differentialquotienten jeder beliebigen Ordnung? Oder zum mindesten noch einen solchen zweiter Ordnung — eine Forderung, die ja bei Zurückführung der Differentiationsbedingung auf Beziehungen zwischen reellen partiellen Differentialquotienten durch die in diesem Zusammenhange sich ergebende Laplacesche Differentialgleichung geradezu suggeriert wird?

---

[1]) Math. Ann. 47 (1896).

[2]) Das Gegenteil wäre nur der Fall, wenn die Mittelwertbildung sich auf ein *reelles Intervall* der Veränderlichen x bezöge.

[3]) A. a. O., S. 138, Gl. (3).

[4]) Das ist in der Tat der Fall: vgl. L. Lichtenstein: Über einige Integrabilitätsbedingungen zweigliedriger Differentialausdrücke mit einer Anwendung auf den Cauchyschen Integralsatz. (Sitzungsber. Math. Ges. Berlin, 9 [22. Juni 1910], S. 86 ff.)

Die Antwort kann nur lauten: Weil der *Erfolg* diese Fragestellung rechtfertigt, ein Erfolg, der auf einer glänzenden, aber zunächst für ganz andere Zwecke[1]) gemachten Entdeckung, dem Cauchyschen Integralsatze [einschließlich der Goursatschen Vervollkommnung[2])] beruht. Als wichtigste Folgerung erscheint dann zunächst, falls $f(x)$ in der Umgebung $|x - x_0| \leq r$ eindeutig und differenzierbar ist, der Cauchysche Randintegralsatz, nämlich:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{+(K)} \frac{f(z)\,dz}{z - x}, \tag{2}$$

wenn man mit $+(K)$ den in positiver Integrationsrichtung zu durchlaufenden Kreis $|x - x_0| = r$ bezeichnet. Das hierin liegende Ergebnis, daß die Werte der Funktion $f(x)$ im ganzen *Innern* des Kreises (K) durch ihre Werte auf dem *Rande* (K) völlig eindeutig bestimmt sind, erscheint in *diesem* Zusammenhange als äußerst überraschende Wirkung eines geheimnisvollen Mechanismus, obschon es doch sehr viel weniger besagt, als die oben auf Grund einer nahe liegenden Vermutung und vermittelst einer sehr einfachen und durchsichtigen Rechnung gewonnene Gleichung (1). Freilich kann man ja von Gl. (2) ausgehend zu dem mit Gl. (1) analogen Ergebnis[3]) (dem Cauchy-Taylorschen Satz) gelangen:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\lambda a_\lambda (x - x_0)^\lambda, \quad \text{wo: } a_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{+(K)} \frac{f(z)\,dz}{(z - x_0)^{\lambda+1}}, \tag{3}$$

d. h. man landet schließlich an demselben Punkte, von dem man bei der zuerst besprochenen Methode ausgegangen war, und muß dann, um zu einem brauchbaren Begriffe der analy-

---

[1]) Vgl. S. 150, Fußn. 2).

[2]) Ohne diese müßte man ja $f'(x)$ noch als *stetig* oder zum mindesten mit gewissen *Integrabilitäts*-Eigenschaften behaftet voraussetzen, wie früher (wenn auch zuweilen nur stillschweigend) zu geschehen pflegte.

[3]) Man beachte, wie der durchsichtige Inhalt von Gl. (1) in der Form von Gl. (3) durch das überflüssige Eindringen des Fremdkörpers π verdunkelt wird.

tischen Fortsetzung zu gelangen, einen erheblichen Teil der „elementaren“ Betrachtungen nachholen, die im ersten Falle den Ausgangspunkt bildeten[1]). Dafür hat man allerdings die

[1]) Herr Osgood, der ja die Potenzreihen lediglich als ein zweckmäßiges Übungsmaterial für Anfänger ansieht, macht a. a. O. (s. oben S. 151) die folgende Bemerkung: „Es ist vielleicht nicht allgemein bekannt, daß die Taylorsche Reihenentwickelung für die Begründung der Funktionentheorie durchaus entbehrlich ist, die Beweise gestalten sich sogar einfacher, wenn man sich nur des Analogons des Mittelwertsatzes in der Differentialrechnung (Kap. 7, § 7) bedient.“ Wie aus dem letzten Hinweise hervorgeht, ist unter dem „Analogon zum Mittelwertsatze“ die Entwickelung der Integralformel (2) des Textes nach Potenzen von $x - x_0$ mit dem *Restintegral* $\frac{(x-x_0)^n}{2\pi i}\int_{+(K)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x_0)^n (z-x)}$ zu verstehen. Wie durch das beständige Mitschleppen dieses Restgliedes eine *Vereinfachung* der zur Begründung der Funktionentheorie dienenden Beweise eintreten soll, entzieht sich in der Tat meiner Kenntnis. Dagegen möchte ich mir gestatten, noch auf eine andere von Herrn Osgood a. a. O. ausgesprochene Ansicht etwas näher einzugehen. An die Ankündigung, daß der Beweis des sogenannten Weierstraßischen Doppelreihensatzes und gewisser daraus resultierender Folgerungen durch Anwendung der komplexen Integration vereinfacht werde, knüpft er die folgenden Bemerkungen: „Aber auch die Sätze selbst gewinnen an Deutlichkeit durch das Abstreifen des Nebensächlichen, welches in der häufigen Erwähnung der Potenzreihen besteht. In der Tat beziehen sich die wichtigsten unter diesen Sätzen auf *Funktionen.* Daß diese nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelbar sind, ist hier belanglos.“ Der erste Satz dieser Aussage hat überhaupt keinen Sinn: denn, wie können die *Sätze* in der Osgoodschen Fassung an *Deutlichkeit* gewinnen, da sie genau so lauten, wie in der Weierstraßischen Theorie? Es könnte also höchstens ihr *Wesen*, ihre *Grundlage* an *Deutlichkeit* gewinnen. Das *Gegenteil* ist aber der Fall: denn das *wahre Wesen*, die *unmittelbar einleuchtende Grundlage* der Sätze besteht in der einfachen Tatsache, daß unter den gemachten Voraussetzungen die *Summe unendlich vieler Potenzreihen* sich in eine *einfache Potenzreihe* umordnen läßt, und wird durch Anwendung der komplexen Integration *nicht verdeutlicht*, sondern *verdunkelt.* Ob man die hierdurch erzielte *mäßige* Abkürzung des Beweises als ausreichendes Äquivalent ansehen soll, scheint mir zum mindesten zweifelhaft. Doch möchte ich zu völliger Klarstellung des wahren Sachverhalts noch auf folgendes hinweisen. Faßt man den sogenannten Vitalischen Satz ins Auge, der ja eine wesentliche

fraglos wertvolle Erfahrung gemacht, daß der scheinbar allgemeinere Begriff der differenzierbaren Funktion nicht weiter trägt, als der auf die Entwickelbarkeit in Potenzreihen aufgebaute. Aber ist es wirklich so dringend notwendig, vor allen Dingen *diese* Tatsache festzustellen? Es dürfte doch schwerlich irgend einem Mathematiker einfallen, die *rationalen* Funktionen *von vornherein* als solche zu *definieren*, die eindeutig, differenzierbar und nur mit Polen behaftet sind, und sodann nachzuweisen, daß jede solche Funktion als Quotient zweier Polynome (von denen das eine sich auch auf eine Konstante reduzieren kann) darstellbar ist. Wogegen jeder, der von dieser letzteren *Darstellungsform* als der üblichen *Definition* einer *rationalen* Funktion ausgeht, es sicher als eine erfreuliche Erweiterung seiner Kenntnisse betrachten wird, wenn er späterhin einmal erfährt, daß die oben genannten Eigenschaften schon ausreichen, um eine Funktion als *rationale* zu qualifizieren. Und so scheint es mir weitaus angemessener, wenn man seinen Wissensdrang zunächst auf das bescheidenere Ziel der in *Potenzreihen* entwickelbaren (also an eine bestimmte *Darstellungsform* geknüpften) Funktionen richtet und die passende Gelegenheit abwartet, um zu erkennen, daß schon durch die bloße Voraussetzung der *Eindeutigkeit* und *Differenzierbarkeit* die *Entwickelbarkeit* in Potenzreihen gesichert erscheint, was sich (mit der unerheblichen Zusatzforderung der *Stetigkeit* des Differential-

---

Vervollkommnung des obigen Weierstraßischen darstellt, so erscheint das *unmittelbare* Ansetzen der Integrationsmaschine auf Grund der bestehenden Voraussetzungen ausgeschlossen. Infolgedessen gestaltet sich der ursprüngliche, auf dem Cauchyschen Funktionsbegriff *ohne* Taylorsche Reihe beruhende Vitalische Beweis (Annali di Mat. (3), 10 [1904], p. 73, 74) ziemlich schwierig. Vergleicht man ihn (oder auch jeden der späteren Beweise) mit dem auf der Taylorschen Reihenentwickelung beruhenden, geradezu klassisch einfachen Beweise des Herrn E. Lindelöf (Bull. Soc. Math. de France 41 [1913], p. 171), so kann für jeden Einsichtigen wohl kein Zweifel darüber bestehen, *wo* die wahren Grundlagen des fraglichen Satzes zu suchen sind. Es scheint danach, daß die Beschäftigung mit Potenzreihen auch fortgeschritteneren Mathematikern zu nützlicher Übung dienen kann.

quotienten) auch durch die von mir als *elementar* bezeichneten Methoden feststellen läßt[1]). Damit ist dann dieses ursprünglich der Cauchyschen Theorie angehörige, äußerst wichtige und bequeme *Erkennungszeichen* für den analytischen Charakter einer Funktion auch für die *elementare* Funktionentheorie gewonnen und zugleich die wünschenswerte Beziehung zwischen den Grundlagen beider Theorien hergestellt[2]). In demselben Sinne habe ich mich auch bemüht, die *komplexe Integration*, insbesondere also den Cauchyschen *Integralsatz* „an passender Stelle", d. h. da, wo die elementa*reren* Hilfsmittel nicht mehr ausreichen, der *elementaren* Funktionentheorie einzuverleiben. Nach einem früheren noch unvollkommenen Versuche[3]) in dieser Richtung ist es mir neuerdings gelungen, die aufzuwendenden Beweismittel so zu vereinfachen, daß damit die untere Grenze derartiger Möglichkeiten wohl so ziemlich erreicht sein dürfte.

Den eigentlichen Kernpunkt der folgenden Untersuchung bildet der § 1, in welchem das Integral der ganzzahligen *Potenz* [außer der $(-1)^{\text{ten}}$] direkt aus der üblichen Definition als Summe eines Grenzwertes berechnet wird. Ich halte es nicht für ausgeschlossen, daß die von mir durchgeführte Betrachtung manchem Leser geradezu trivial erscheinen dürfte, würde aber darin nur eine erfreuliche Bestätigung ihres wahrhaft „elementaren" Charakters erblicken, während ich andererseits guten Grund für die Annahme zu haben glaube[4]), daß die Möglichkeit, das fragliche Integral mit Hilfe der hier angegebenen Methode zu berechnen, bisher nicht bemerkt worden ist. Sie beruht auf einer einfachen identischen Umformung der betreffenden Definitionsgleichung und besitzt den besonderen Vorzug, in Bezug auf die Wahl des Integrationsweges jede bisher für

---

[1]) Vgl. weiter unten § 3, Nr. 3, S. 176.

[2]) Ich halte es übrigens vom historischen Standpunkt aus nicht für unmöglich, daß die Entdeckung des Cauchy-Taylorschen Satzes den ersten Anstoß zur Ausbildung der Weierstraßischen Funktionentheorie gegeben hat.

[3]) Diese Berichte, Bd. 26 (1896), S. 179.

[4]) Vgl. S. 164, Fußn. 1).

zulässig gehaltene Freiheit zu gestatten, ohne daß es erforderlich wäre, in eine jener recht mühsamen Diskussionen einzutreten, welche darauf hinauslaufen, zusammengesetzte, mit allen möglichen modernen Komplikationen ausgestattete Integrationswege in einfachere zu zerlegen und schließlich durch polygonale zu approximieren. Aus dem für das Integral der ganzen *Potenz* gewonnenen Resultat ergibt sich in § 2 durch einfache Synthese das entsprechende für eine *Potenzreihe* und sodann in § 3 für eine längs irgend eines Integrationsweges *reguläre*, d. h. durch ein System ineinander greifender Potenzreihen eindeutig definierte *analytische Funktion*, schließlich *der Cauchysche Integralsatz* für *reguläre* Funktionen bei Benützung *„beliebiger"*, d. h. nur den Bedingungen der Stetigkeit und Rektifizierbarkeit genügender Integrationswege: *er erscheint hier als das Resultat eines bis in die letzten Einzelheiten durchsichtigen Rechenexempels.* Die Ausdehnung des gewonnenen Ergebnisses auf *stetig differenzierbare* Funktionen erfolgt dann unmittelbar durch Berufung auf das oben (S. 153) erwähnte Resultat meiner elementaren Methoden, während für die Aufhebung der *Stetigkeits*voraussetzung nur noch der (sehr einfache) Beweis der Goursatschen Verallgemeinerung des Cauchyschen Satzes für ein *Dreieck*[1]) erforderlich erscheint. In § 4 werden die vorstehenden Betrachtungen noch durch eine elementare Berechnung des Integrals $\int \frac{dx}{x}$ für einen geschlossenen Weg um den Nullpunkt ergänzt und durch Anwendung auf die Herleitung des Cauchyschen Randintegral- und Residuensatzes zum Abschluß gebracht.

---

[1]) Vgl. S. 177, Fußnote.

§ 1. Das bestimmte Integral der Potenz mit ganzzahligen Exponenten m, ausgenommen $m = -1$.

1. Es sei $x = \xi + \eta i$ eine *komplexe*, t eine *reelle* Veränderliche, und es werde gesetzt:

(1) $$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t), \quad \text{also: } x = \varphi(t) + i \cdot \psi(t),$$

wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ für ein gewisses Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ bzw. $t_0 \geqq t \geqq T$ *eindeutige* und *stetige* Funktionen vorstellen, deren Auswahl nur der folgenden Einschränkung unterliegen soll. Es möge das Intervall (t_0, T) durch Einschaltung von $n-1$ Zwischenwerten:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < T$$
$$\text{bzw. } T < t_{n-1} < t_{n-2} < \cdots < t_1 < t_0$$

in n Teilintervalle zerlegt werden, und es werde analog mit Gl. (1) gesetzt:

(2) $$\begin{cases} x_\nu = \varphi(t_\nu) + i\,\psi(t_\nu) = \xi_\nu + \eta_\nu i & (\nu = 0, 1, \ldots n-1) \\ X = \varphi(T) + i\,\psi(T) = \Xi + H i. \end{cases}$$

Die durch Gl. (1) definierten Punkte x liefern dann einen von x_0 bis X sich erstreckenden *stetigen Weg*, den wir als den Weg $(x_0 \ldots X)$ bezeichnen wollen und auf welchem insbesondere die Punkte x_ν liegen. Die oben bezeichnete Einschränkung soll dann darin bestehen, daß die *Länge der gebrochenen Linie* (des „Sehnenpolygons“): $\overline{x_0 x_1 \ldots x_{n-1} X}$, also die *Summe*: $\sum_1^n{}_\nu |x_\nu - x_{\nu-1}|$ (wo: $x_n \equiv X$) bei jeder beliebigen Wahl der t_ν bzw. x_ν, insbesondere auch bei unbegrenzter Vergrößerung von n und gleichzeitigem $\lim_{n\to\infty}(t_\nu - t_{\nu-1}) = 0$ (also auch: $\lim_{n\to\infty}(x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$) stets *unter einer endlichen Schranke* bleibt, etwa:

(3) $$\sum_1^n{}_\nu |x_\nu - x_{\nu-1}| < L \qquad (\text{wo: } x_n \equiv X).$$

Man erkennt unmittelbar, daß diese Bedingung sicher erfüllt ist, wenn die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *monoton*, also auch dann, wenn sie nur *abteilungsweise monoton* sind. Denn im ersten dieser Fälle hat man offenbar:

$$\sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| = \sum_1^n{}^{\nu} \sqrt{(\xi_\nu - \xi_{\nu-1})^2 + (\eta_\nu - \eta_{\nu-1})^2}$$

$$< \sum_1^n{}^{\nu} (|\xi_\nu - \xi_{\nu-1}| + |\eta_\nu - \eta_{\nu-1}|) = |\Xi - \xi_0| + |H - \eta_0|.$$

Im übrigen folgt aus (3), daß dann gleichzeitig:

$$(4) \qquad \sum_1^n{}^{\nu} |\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})| < L, \quad \sum_1^n{}^{\nu} |\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})| < L,$$

während umgekehrt auch diese beiden Bedingungen eine solche von der Form (3) (mit $2L$ statt L) nach sich ziehen. Die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Existenz der Beziehung (3) besteht also darin, daß $\varphi(t)$, $\psi(t)$ Ungleichungen von der Form (4) genügen, d. h. Funktionen *von beschränkter Variation* sein müssen.

Des weiteren läßt sich leicht zeigen[1]), daß unter Voraussetzung der Stetigkeit von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ die durch Ungl. (3) geforderte *Beschränktheit* der Sehnenpolygone allemal schon die Existenz eines bestimmten *Grenzwertes*: $\lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| = l$,

---

[1]) Für die Fassung $\eta = f(\xi)$ zuerst bewiesen von L. Scheeffer: Acta Math. 5 (1885), S. 54, Theorem I. Die Voraussetzung der Stetigkeit läßt sich durch die allgemeinere ersetzen, daß $f(\xi)$ bzw. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ keine *„äußeren Sprünge"* besitzen dürfen, d. h. daß z. B. $f(\xi)$ niemals das Intervall $f(\xi - 0)$, $f(\xi + 0)$ verläßt: a. a. O., Theorem II. — Die Form $\xi = \varphi(t)$, $\eta = \psi(t)$ bei C. Jordan, Cours d'Analyse, 2[ième] éd. 1 (1893), No. 106, 107. Doch nennt Jordan eine Kurve *nur dann rektifizierbar*, wenn sie zugleich *stetig* ist: a. a. O., No. 110. Anders G. Kowalewski (Grundzüge der Differential- und Integralrechnung [1909], S. 327), welcher auch *unstetige* Kurven mit konvergenten Sehnenpolygonen als *rektifizierbar* bezeichnet. Um jedes Mißverständnis auszuschließen, bezeichne ich die hier verwendeten Integrationswege ausdrücklich als *stetig* und rektifizierbar und, wenn gelegentlich von „Wegen" schlechthin die Rede ist, so sind immer solche Wege gemeint.

also einer bestimmten *Weglänge* l nach sich zieht, und da das umgekehrte ja ohne weiteres ersichtlich ist, so erscheint die Bedingung (3) schließlich äquivalent mit der *Rektifizierbarkeit* des stetigen Weges $(x_0 \ldots X)$. Übrigens sei hervorgehoben, daß diese Erkenntnis zwar für die Wertung der folgenden Resultate, nicht aber für deren Herleitung in Betracht kommt, welche letztere lediglich die Bedingung (3) in Anspruch nimmt, also insbesondere bei der Beschränkung auf abteilungsweise monotone Wege keiner weiteren Diskussion bedarf.

2. Unter der Voraussetzung eines *stetigen* und der Bedingung (3) genügenden, also *rektifizierbaren* Weges $(x_0 \ldots X)$ beweisen wir nun den folgenden Fundamentalsatz:

Man hat für jedes von (-1) *verschiedene ganzzahlige* m:

$$\text{(I)} \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^m = \frac{1}{m+1} (X^{m+1} - x_0^{m+1}) \qquad (x_n \equiv X)$$

bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte x_ν, *sofern nur für* $n \longrightarrow \infty$ *durchweg* $\lim\limits_{n \to \infty} (x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$ *wird und im Falle* $m < 0$ *stets* $|x| \geqq \varrho > 0$ *ist.*

Beweis. Die Richtigkeit der Beziehung (I) für $m = 0$ ist ohne weiteres ersichtlich.

Sei nun zunächst p eine *positive* ganze Zahl, also $p \geqq 1$, so hat man identisch:

$$\begin{aligned}(p+1)\, x_\nu^p &= \sum_0^p{}^{\lambda} (x_\nu^p - x_\nu^{p-\lambda} x_{\nu-1}^\lambda) + \sum_0^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} x_{\nu-1}^\lambda \\ &= \sum_1^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} (x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda) + \frac{x_\nu^{p+1} - x_{\nu-1}^{p+1}}{x_\nu - x_{\nu-1}}\end{aligned}$$

$$(p+1)(x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^p = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_1^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} (x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda) + (x_\nu^{p+1} - x_{\nu-1}^{p+1}),$$

also durch Summation über $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$\begin{aligned}(p+1) \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^p = \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_1^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} (x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda) \\ + X^{p+1} - x_0^{p+1},\end{aligned}$$

und daher:

$$(5)\quad \begin{cases} \left|(p+1)\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^p - (X^{p+1} - x_0^{p+1})\right| \\ \leqq \sum_1^n{}^{\nu}\,|x_\nu - x_{\nu-1}|\,\sum_1^p{}^{\lambda}\,|x_\nu|^{p-\lambda}\cdot|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda|. \end{cases}$$

Ist nun etwa r die obere Grenze der $|x|$, so hat man zunächst zur Abschätzung der letzten Summe:

$$\begin{aligned} &|x_\nu|^{p-\lambda}\,|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda| \\ &= |x_\nu|^{p-\lambda}\,|x_\nu - x_{\nu-1}|\,|x_\nu^{\lambda-1} + x_\nu^{\lambda-2}x_{\nu-1} + \cdots + x_{\nu-1}^{\lambda-1}|\,^{1)} \\ &\leqq \lambda\, r^{p-1}\,|x_\nu - x_{\nu-1}|, \end{aligned}$$

also:

$$\sum_1^p{}^{\lambda}\,|x_\nu|^{p-\lambda}\,|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda| \leqq \tfrac{1}{2}p(p+1)\,r^{p-1}\cdot|x_\nu - x_{\nu-1}|,$$

und:

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_1^n{}^{\nu}\,|x_\nu - x_{\nu-1}|\,\sum_1^p{}^{\lambda}\,|x_\nu|^{p-\lambda}\,|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda| \\ \leqq \tfrac{1}{2}p(p+1)\,r^{p-1}\sum_1^n{}^{\nu}\,|x_\nu - x_{\nu-1}|^2. \end{cases}$$

Wird jetzt zu beliebig klein angenommenen $\delta > 0$ eine untere Schranke für n so fixiert, daß für jedes ν:

$$(7)\qquad |x_\nu - x_{\nu-1}| < \delta,$$

so geht die Ungleichung (5) mit Benützung von (6), (7) und (3) in die folgende über:

$$\left|(p+1)\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^p - (X^{p+1} - x_0^{p+1})\right| < \delta\cdot\tfrac{1}{2}p(p+1)\,r^{p-1}L,$$

und man findet somit:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^p = \frac{1}{p+1}(X^{p+1} - x_0^{p+1}).$$

Um das entsprechende Resultat für negative Exponenten abzuleiten, gehen wir für $p \geqq 1$ von der Identität aus:

---

[1]) Gilt auch für $\lambda = 1$, in welchem Falle der letzte Faktor sich auf 1 reduziert, die betreffende Gleichung in eine vollkommene Identität übergeht.

$$p x_\nu^{-(p+1)} = \sum_1^p{}^\lambda \left(x_\nu^{-(p+1)} - x_\nu^{\lambda-p-1} x_{\nu-1}^{-\lambda}\right) + \sum_1^p{}^\lambda x_\nu^{\lambda-p-1} x_{\nu-1}^{-\lambda}$$

$$= -\sum_1^p{}^\lambda x_\nu^{-(p+1)} x_{\nu-1}^{-\lambda} \left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right) + x_\nu^{-p} x_{\nu-1}^{-p} \sum_1^p{}^\lambda x_\nu^{\lambda-1} x_{\nu-1}^{p-\lambda}$$

$$p(x_\nu - x_{\nu-1}) x_\nu^{-(p+1)} = -(x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_1^p{}^\lambda x_\nu^{-(p+1)} x_{\nu-1}^{-\lambda} \left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right)$$

$$+ x_\nu^{-p} x_{\nu-1}^{-p} \left(x_\nu^p - x_{\nu-1}^p\right)$$

$$= -(x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_1^p{}^\lambda x_\nu^{-(p+1)} x_{\nu-1}^{-\lambda} \left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right) - \left(x_\nu^{-p} - x_{\nu-1}^{-p}\right).$$

Summiert man wieder über $\nu = 1, 2, \ldots n$, so findet man:

$$p \sum_1^n{}^\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) x_\nu^{-(p+1)}$$

$$= -\sum_1^n{}^\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_1^p{}^\lambda x_\nu^{-(p+1)} x_{\nu-1}^{-\lambda} \left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right) - \left(X^{-p} - x_0^{-p}\right),$$

und daher:

$$(9) \quad \begin{cases} \left| p \sum_1^n{}^\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) x_\nu^{-(p+1)} + \left(X^{-p} - x_0^{-p}\right) \right| \\ \leqq \sum_1^n{}^\nu |x_\nu - x_{\nu-1}| \cdot \sum_1^p{}^\lambda |x_\nu|^{-(p+1)} \cdot |x_{\nu-1}|^{-\lambda} \cdot |x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda|. \end{cases}$$

Um die letzte Summe abzuschätzen, hat man mit Benützung der Voraussetzung $|x| \geqq \varrho > 0$:

$$|x_\nu|^{-(p+1)} |x_{\nu-1}|^{-\lambda} |x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda|$$

$$= |x_\nu|^{-(p+1)} |x_{\nu-1}|^{-\lambda} |x_\nu - x_{\nu-1}| \sum_0^{\lambda-1}{}^\varkappa |x_\nu|^\varkappa |x_{\nu-1}|^{\lambda-1-\varkappa}$$

$$= |x_\nu - x_{\nu-1}| \sum_0^{\lambda-1}{}^\varkappa |x_\nu|^{\varkappa-p-1} |x_{\nu-1}|^{-\varkappa-1}$$

$$\leqq |x_\nu - x_{\nu-1}| \lambda \varrho^{-(p+2)},$$

also:

$$\sum_1^p{}^\lambda |x_\nu|^{-(p+1)} \cdot |x_{\nu-1}|^{-\lambda} \cdot |x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda| \leqq \tfrac{1}{2} p(p+1) \varrho^{-(p+2)} |x_\nu - x_{\nu-1}|$$

und:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| \sum_1^p{}^{\lambda} |x_\nu|^{-(p+1)} |x_{\nu-1}|^{-\lambda} |x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda| \\ &\qquad \leqq \tfrac{1}{2} p(p+1)\, \varrho^{-(p+2)} \sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}|^2. \end{aligned}\right.$$

Wird jetzt wieder n groß genug angenommen, daß durchweg $|x_\nu - x_{\nu-1}| < \delta$ ausfällt, so geht die Ungleichung (9) mit Benützung von (10) und (3) in die folgende über:

$$\left| p \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^{-(p+1)} + (X^{-p} - x_0^{-p}) \right| < \delta \cdot \tfrac{1}{2} p(p+1)\, \varrho^{-(p+2)} L,$$

und man findet somit:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^{-(p+1)} = -\frac{1}{p}(X^{-p} - x_0^{-p}) \qquad (p \geqq 1),$$

oder, wenn man schließlich noch p mit $p-1$ vertauscht:

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^{-p} = \frac{1}{-p+1}(X^{-p+1} - x_0^{-p+1}) \qquad (p \geqq 2).$$

Durch Zusammenfassung von Gleichung (8) und (11) ergibt sich, wenn man noch p bzw. $-p$ durch m ersetzt, das oben als Formel (I) ausgesprochene Resultat.

3. Wir *definieren* jetzt das (bestimmte) *Integral* einer Potenz x^m ($m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) erstreckt über einen *beliebigen* von x_0 bis X verlaufenden, *stetigen und rektifizierbaren Integrationsweg* (der nur im Falle $m < 0$ in endlicher Entfernung von der Stelle $x = 0$ verlaufen muß) durch den zuvor näher erklärten Grenzwert:

$$(\text{II a})\qquad \int_{x_0}^{X} x^m\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^m \qquad (\text{wo: } x_n \equiv X).$$

Infolge von Satz (I) der vorigen Nummer besteht dann die Beziehung[1]):

---

[1]) Dieses Ergebnis, d. h. die direkte Wertbestimmung des Integrals $\int_{x_0}^{X} x^m\, dx$ vermittelst des definierenden Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^m$,

$$\text{(II b)} \qquad \int_{x_0}^{X} x^m\, dx = \frac{1}{m+1}(X^{m+1} - x_0^{m+1}).$$

Das fragliche Integral ist also vom *Integrationswege* völlig *unabhängig*, sein Wert hängt (nach Art eines *reellen* Integrals) lediglich von den Grenzen x_0 und X ab.

Ist der Weg ein *geschlossener*, also $X = x_0$, so hat das Integral allemal den Wert *Null*.

§ 2. Das bestimmte Integral eines Polynoms und einer konvergierenden Potenzreihe.

1. Es sei $f(x)$ eine längs eines stetigen rektifizierbaren Weges $(x_0 \ldots X)$ eindeutige und *stetige* Funktion. Alsdann *definieren* wir das über diesen Weg erstreckte Integral von $f(x)$ durch die Formel:

---

scheint mir bei Beschränkung auf *reelle* x auch für die gewöhnliche Integralrechnung von Nutzen zu sein. Ohne Zweifel besteht doch in diesem Zusammenhange das didaktische Bedürfnis, die Möglichkeit der Berechnung eines bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe an irgendwelchen Beispielen evident zu machen. In der Tat dürfte es kaum ein größeres, den fraglichen Gegenstand behandelndes Lehrbuch geben, welches diesem Bedürfnis nicht Rechnung zu tragen sucht. Dies geschieht nun in *allen* mir bekannten Lehrbüchern (und ich habe eine sehr große Anzahl daraufhin kontrolliert!) stets in der Weise, daß zunächst die *Existenz* des Grenzwertes bei *beliebiger* Wahl der Teilung erwiesen und sodann die *Auswertung* an die Benützung einer *speziellen* Teilung geknüpft wird — z. B. bei der Berechnung von $\int_{x_0}^{X} e^x\, dx$ an eine Teilung in *gleiche* Intervalle, bei der Berechnung von $\int_{x_0}^{X} x^m\, dx$ (nach dem Vorgange von Dirichlet) an eine solche, bei der die Zwischenwerte x_ν eine *geometrische Progression* bilden, während doch die unmittelbare Auswertung des allgemeineren, auf einer *beliebigen* Teilung beruhenden Grenzwertes dem fraglichen Zwecke in noch prägnanterer Weise dienen würde. Gerade aus diesem Umstande glaubte ich mit ziemlicher Sicherheit schließen zu dürfen, daß die hier mitgeteilte Methode, so naheliegend sie erscheinen mag, bisher nicht bemerkt worden ist.

$$\text{(III)} \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) f(x_\nu) \qquad (x_n \equiv X),$$

sofern dieser (im Sinne des vorigen Paragraphen zu bildende) *Grenzwert existiert.* Daß dies allemal wirklich der Fall ist, läßt sich ohne besondere Schwierigkeit nachweisen[1]), wird aber hier nicht benützt. Wir können nämlich in dem vorliegenden Zusammenhange uns damit begnügen, *für den Fall, daß jener Grenzwert existiert,* daraus die nachstehenden Folgerungen zu ziehen:

1) Es ist stets:

$$\text{(III a)} \qquad \left| \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \right| \leqq M \cdot L,$$

wenn M das Maximum von $|f(x)|$ längs des Integrationsweges bedeutet und, wie früher (§ 1, Ungl. (3)): $\sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| < L.$

2) Gleichzeitig mit (III) besteht auch die Beziehung:

$$\text{(III b)} \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) f(x_{\nu-1}).$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Umstande, daß $f(x)$ längs des Weges $(x_0 \ldots X)$ *gleichmäßig* stetig sein muß und daher durchweg $|f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| < \varepsilon$ wird, sofern nur $|x_\nu - x_{\nu-1}| < \delta$, also für alle n oberhalb einer passend fixierten Schranke.

3) Durch gleichzeitige Benützung von (III) und (III b) ergibt sich:

$$\text{(III c)} \qquad \int_{X}^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

---

[1]) Beweis s. bei C. Jordan, a. a. O., Nr. 193. Von der dort gemachten Voraussetzung, daß die betreffende Funktion *synektisch* (= im komplexen Sinne differenzierbar) sei, wird für den Beweis nur die *Stetigkeit* benützt.

4) Es ist:

$$\text{(III d)} \qquad \int_{x_0}^{X} c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx \qquad (c \text{ eine Konstante}).$$

5) Es ist:

$$\text{(III e)} \qquad \int_{x_0}^{X} f_1(x)\, dx + \int_{x_0}^{X} f_2(x)\, dx = \int_{x_0}^{X} (f_1(x) + f_2(x))\, dx,$$

und umgekehrt kann die *linke* Seite dieser Gleichung zur *Definition* der *rechten* dienen. (Analog für eine beliebige Anzahl von Summanden.)

6) Bedeutet x' irgend einen auf dem Wege $(x_0 \ldots X)$ gelegenen Punkt, so hat man:

$$\text{(III f)} \qquad \int_{x_0}^{x'} f(x)\, dx + \int_{x'}^{X} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx,$$

und umgekehrt kann die *linke* Seite dieser Gleichung zur *Definition* der *rechten* verwendet werden. (Analog für eine beliebige Anzahl von Zwischenpunkten.)

7) Ist der Integrationsweg ein *geschlossener*, also etwa bei x_0 beginnender und wieder endigender, so ergibt sich mit Benützung von 6), daß der Integralwert ungeändert bleibt, wenn ein beliebiger anderer Punkt zum Anfangs- und Endpunkt der Integration genommen wird.

2. Es sei wieder m eine *ganze* Zahl mit Ausschluß von -1, außerdem sei a eine beliebige komplexe Zahl, die nur im Falle $m < 0$ nicht dem Wege $(x_0 \ldots X)$ angehören darf. Alsdann hat man nach Definitionsgleichung (III) zunächst:

$$\text{(IV a)} \int_{x_0}^{X} (x - a)^m\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} {}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\,(x_\nu - a)^m \quad (x_n \equiv X),$$

sofern dieser Grenzwert für den Integrationsweg $(x_0 \ldots X)$ existiert. Daß dies aber der Fall ist, ergibt sich, wenn etwa gesetzt wird:

$$x_\nu - a = x'_\nu \ (\nu = 0, 1, \ldots n), \quad X - a = X',$$

also:

$$\sum_1^n{}^\nu (x_\nu - x_{\nu-1})(x_\nu - a)^m = \sum_1^n{}^\nu (x'_\nu - x'_{\nu-1})\, x'^m_\nu \qquad (x'_n \equiv X'),$$

unmittelbar aus § 1, und zwar findet man mit Benützung der Formel (I):

$$\text{(IV b)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^X (x-a)^m\,dx = \frac{1}{m+1}\left((X-a)^{m+1} - (x_0 - a)^{m+1}\right) \\ &\qquad\qquad (m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Wird jetzt ferner $m > 0$ angenommen und setzt man:

(1) $$g_m(x-a) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m,$$

so gilt nach Formel (III e) und (III d) die Definitionsgleichung:

$$\text{(V a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^X g_m(x-a)\,dx &= c_0 \int_{x_0}^X dx + c_1 \int_{x_0}^X (x-a)\,dx + \cdots \\ &\quad + c_m \int_{x_0}^X (x-a)^m\,dx \end{aligned} \right.$$

und man findet mit Benützung von (IV b):

$$\text{(V b)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^X g_m(x-a)\,dx &= c_0\left((X-a) - (x_0-a)\right) \\ &\quad + \frac{c_1}{2}\left((X-a)^2 - (x_0-a)^2\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{c_m}{m+1}\left((X-a)^{m+1} - (x_0-a)^{m+1}\right) \\ &= g^*_{m+1}(X-a) - g^*_{m+1}(x_0-a), \end{aligned} \right.$$

wenn gesetzt wird:

(2) $$g^*_{m+1}(x-a) = c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_{m+1}}{m+1}(x-a)^{m+1},$$

so daß also:

(3) $$g_m(x-a) = D\, g^*_{m+1}(x-a).$$

Analoge Beziehungen gelten offenbar für ein nach *negativen* Potenzen $(x-a)^{-\nu}$ (wo $\nu \geqq 2$) fortschreitendes Polynom, etwa:

$$g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) = c_2(x-a)^{-2} + \cdots + c_m(x-a)^{-m}. \tag{4}$$

Man findet insbesondere:

$$\int_{x_0}^{x} g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) dx = g^*_{m-1}\left(\frac{1}{X-a}\right) - g^*_{m-1}\left(\frac{1}{x_0-a}\right), \tag{VI}$$

wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} g^*_{m-1}\left(\frac{1}{x-a}\right) = &-\frac{c_2}{1}(x-a)^{-1} - \frac{c_3}{2}(x-a)^{-2} - \\ &\cdots - \frac{c_m}{m-1}(x-a)^{-(m-1)}, \end{aligned} \tag{5}$$

so daß also:

$$g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) = D g^*_{m-1}\left(\frac{1}{x-a}\right). \tag{6}$$

3. Bedeutet jetzt $\mathfrak{P}(x-a)$ eine konvergente Potenzreihe, etwa:

$$\mathfrak{P}(x-a) = \sum_0^\infty{}^{\varkappa} c_\varkappa (x-a)^\varkappa \tag{7}$$

und ist $(x_0 \ldots X)$ ein ganz *im Innern* ihres Konvergenzbereiches verlaufender (stetiger und rektifizierbarer) Weg, so besteht nach Formel (III) zunächst die Definitionsgleichung:

$$\int_{x_0}^{X} \mathfrak{P}(x-a)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, \mathfrak{P}(x_\nu - a) \quad (x_n \equiv X). \tag{VIIa}$$

Wir wollen zeigen, daß nach Analogie von Gl. (Vb) die Beziehung besteht:

$$\int_{x_0}^{X} \mathfrak{P}(x-a)\, dx = \mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a), \tag{VIIb}$$

wenn gesetzt wird:

$$x_\nu - a = x'_\nu \ (\nu = 0, 1, \ldots n), \quad X - a = X',$$

also:

$$\sum_1^n{}^\nu (x_\nu - x_{\nu-1})(x_\nu - a)^m = \sum_1^n{}^\nu (x'_\nu - x'_{\nu-1})\, x'^m_\nu \qquad (x'_n \equiv X'),$$

unmittelbar aus § 1, und zwar findet man mit Benützung der Formel (I):

$$\text{(IV b)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^{X} (x - a)^m\, dx = \frac{1}{m+1}\left((X - a)^{m+1} - (x_0 - a)^{m+1}\right) \\ &\qquad\qquad (m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Wird jetzt ferner $m > 0$ angenommen und setzt man:

(1) $$g_m(x - a) = c_0 + c_1(x - a) + \cdots + c_m(x - a)^m,$$

so gilt nach Formel (III e) und (III d) die Definitionsgleichung:

$$\text{(V a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{X} g_m(x - a)\, dx &= c_0 \int_{x_0}^{X} dx + c_1 \int_{x_0}^{X} (x - a)\, dx + \cdots \\ &\quad + c_m \int_{x_0}^{X} (x - a)^m\, dx \end{aligned} \right.$$

und man findet mit Benützung von (IV b):

$$\text{(V b)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{X} g_m(x - a)\, dx &= c_0\left((X - a) - (x_0 - a)\right) \\ &\quad + \frac{c_1}{2}\left((X - a)^2 - (x_0 - a)^2\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{c_m}{m+1}\left((X - a)^{m+1} - (x_0 - a)^{m+1}\right) \\ &= g^*_{m+1}(X - a) - g^*_{m+1}(x_0 - a), \end{aligned} \right.$$

wenn gesetzt wird:

(2) $$g^*_{m+1}(x - a) = c_0(x - a) + \frac{c_1}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{c_{m+1}}{m+1}(x - a)^{m+1},$$

so daß also:

(3) $$g_m(x - a) = D\, g^*_{m+1}(x - a).$$

Analoge Beziehungen gelten offenbar für ein nach *negativen* Potenzen $(x-a)^{-\nu}$ (wo $\nu \geqq 2$) fortschreitendes Polynom, etwa:

$$(4) \qquad g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) = c_2(x-a)^{-2} + \cdots + c_m(x-a)^{-m}.$$

Man findet insbesondere:

$$(\mathrm{VI}) \qquad \int_{x_0}^{x} g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) dx = g^*_{m-1}\left(\frac{1}{X-a}\right) - g^*_{m-1}\left(\frac{1}{x_0-a}\right),$$

wenn gesetzt wird:

$$(5) \qquad \begin{aligned} g^*_{m-1}\left(\frac{1}{x-a}\right) = -\frac{c_2}{1}(x-a)^{-1} - \frac{c_3}{2}(x-a)^{-2} - \\ \cdots - \frac{c_m}{m-1}(x-a)^{-(m-1)}, \end{aligned}$$

so daß also:

$$(6) \qquad g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) = D g^*_{m-1}\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

3. Bedeutet jetzt $\mathfrak{P}(x-a)$ eine konvergente Potenzreihe, etwa:

$$(7) \qquad \mathfrak{P}(x-a) = \sum_0^{\infty}{}^{\varkappa}\, c_\varkappa (x-a)^\varkappa$$

und ist $(x_0 \ldots X)$ ein ganz *im Innern* ihres Konvergenzbereiches verlaufender (stetiger und rektifizierbarer) Weg, so besteht nach Formel (III) zunächst die Definitionsgleichung:

$$(\mathrm{VII\,a}) \quad \int_{x_0}^{X} \mathfrak{P}(x-a)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^{n}{}^{\nu}\,(x_\nu - x_{\nu-1})\,\mathfrak{P}(x_\nu - a) \quad (x_n \equiv X).$$

Wir wollen zeigen, daß nach Analogie von Gl. (Vb) die Beziehung besteht:

$$(\mathrm{VII\,b}) \qquad \int_{x_0}^{X} \mathfrak{P}(x-a)\,dx = \mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a),$$

wenn gesetzt wird:

$$(8) \qquad \mathfrak{P}^*(x-a) = \sum_0^\infty{}^{\varkappa} \frac{c_\varkappa}{\varkappa+1}(x-a)^{\varkappa+1},$$

also:

$$(9) \qquad \mathfrak{P}(x-a) = D\,\mathfrak{P}^*(x-a).$$

Wir setzen nun die beiden vorliegenden Potenzreihen in die Form:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x-a) &= \sum_0^m{}^{\varkappa} c_\varkappa (x-a)^\varkappa + \sum_{m+1}^\infty{}^{\varkappa} c^\varkappa (x-a)^\varkappa \\ &= g_m(x-a) + R_m(x-a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^*(x-a) &= \sum_0^m{}^{\varkappa} \frac{c_\varkappa}{\varkappa+1}(x-a)^{\varkappa+1} + \sum_{m+1}^\infty{}^{\varkappa} \frac{c_\varkappa}{\varkappa+1}(x-a)^{\varkappa+1} \\ &= g^*_{m+1}(x-a) + R^*_{m+1}(x-a).\end{aligned}$$

Man hat sodann:

$$\begin{aligned}\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,\mathfrak{P}(x_\nu - a) &= \sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,g_m(x_\nu - a) \\ &\quad + \sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,R_m(x_\nu - a)\end{aligned}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0 - a) &= (g^*_{m+1}(X-a) - g^*_{m+1}(x_0 - a)) \\ &\quad + R^*_{m+1}(X-a) - R^*_{m+1}(x_0-a).\end{aligned}$$

Hieraus durch Subtraktion und Übergang zum absoluten Betrage:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,\mathfrak{P}(x_\nu - a) - (\mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a))\right| \\ (10)\quad &\leqq \left|\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})g_m(x_\nu - a) - (g^*_{m+1}(X-a) - g^*_{m+1}(x_0-a))\right| \\ &\quad + \left|\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})R_m(x_\nu - a)\right| + |R^*_{m+1}(X-a)| + |R^*_{m+1}(x_0-a)|.\end{aligned}$$

Infolge der gleichmäßigen Konvergenz der beiden Potenzreihen läßt sich zunächst m so fixieren, daß für jedes in Betracht kommende x:

$$|R_m(x-a)| < \varepsilon, \quad |R^*_{m+1}(x-a)| < \varepsilon,$$

und daher (mit Berücksichtigung von: $\sum_{1}^{n}{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| < L$) die Summe der drei letzten Glieder von Ungleichung (10) *kleiner als* $(L+2)\,\varepsilon$ ausfällt.

Hierauf kann man mit Rücksicht auf Formel (III) und (Vb) ein N so auswählen, daß für $n \geqq N$:

$$\left| \sum_{1}^{n}{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) g_m(x_\nu - a) - (g^*_{m+1}(X-a) - g^*_{m+1}(x_0 - a)) \right| < \varepsilon,$$

so daß die Ungleichung (10) in die folgende übergeht:

$$\left| \sum_{1}^{n}{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) \mathfrak{P}(x_\nu - a) - (\mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0 - a)) \right| < (L+3)\,\varepsilon$$

und schließlich ergibt sich:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) \mathfrak{P}(x_\nu - a) = \mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0 - a),$$

womit die fragliche Behauptung (VIIb) bewiesen ist. Ihr Inhalt kann offenbar auch durch die Formel ausgedrückt werden:

$$\text{(VIIc)} \qquad \int_{x_0}^{X} \left(\sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa} c_\varkappa (x-a)^\varkappa \right) dx = \sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa} c_\varkappa \int_{x_0}^{X} (x-a)^\varkappa \, dx$$

mit Hinzunahme der Integralformel (IVb), d. h. schließlich des Fundamentalsatzes (I).

Im übrigen enthält Gleichung (VIIb) die Aussage, daß das Integral von $\mathfrak{P}(x-a)$ längs eines *im Innern* ihres Konvergenzbereiches verlaufenden (stetigen und rektifizierbaren)[1]) Weges $(x_0 \ldots X)$ nur von dessen *Endpunkten* abhängt, also

---

[1]) Unsere Beweismethode trägt also etwas weiter, als diejenige, welche Herr Kowalewski in seinem Lehrbuch „Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen (1911)" bei seinen sehr ausführlichen und exakten Untersuchungen über die vorliegende Frage angewendet hat. Dort muß zu den Voraussetzungen der *Stetigkeit* und *Rektifizierbarkeit* noch die weitere hinzukommen, daß der Quotient *„Bogen durch Sehne"*, wenn die letztere gegen Null konvergiert, stets *unter einer endlichen Schranke* bleibt (a. a. O. S. 158). An einem sehr einfachen und lehrreichen Beispiel wird ausdrücklich gezeigt, daß es stetige rektifizierbare Wege gibt, welche diese Eigenschaft *nicht* besitzen.

bis auf diese beiden *vom Wege unabhängig* ist. *Ist der Weg ein geschlossener, also* $X = x_0$, *so hat das Integral den Wert Null.*

Schließlich findet man noch, wenn man mit x einen beliebig veränderlichen Innenpunkt des Konvergenzbereiches bezeichnet und zum Unterschiede für den Integrationsbuchstaben x ein anderes Zeichen, etwa z benutzt, nach Gleichung (VII b):

$$(11) \qquad \int_{x_0}^{x} \mathfrak{P}(z-a)\,dz = \mathfrak{P}^*(x-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a)$$

für jeden im Innern des Konvergenzbereiches verlaufenden Integrationsweg, also mit Benützung von Gleichung (9):

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{x} d\,\mathfrak{P}^*(z-a) = \mathfrak{P}^*(x-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a)$$

(wobei es offenbar freisteht, $\mathfrak{P}^*(x-a)$ durch $\mathfrak{P}^*(x-a) + \mathit{konst.}$ zu ersetzen: Zusammenhang zwischen dem unbestimmten und dem bestimmten Integral) und:

$$(13) \qquad \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \mathfrak{P}(z-a)\,dz = D\,\mathfrak{P}^*(x-a) = \mathfrak{P}(x-a)$$

(das Integral als eindeutige differenzierbare Funktion seiner oberen Grenze). Analoge Beziehungen gelten mit Berücksichtigung von Gleichung (VI) auch für eine Reihe, die nach *negativen* Potenzen von $x-a$ mit Ausschluß von $(x-a)^{-1}$ fortschreitet. Insbesondere findet man für jeden im Innern des Konvergenzbereiches verlaufenden Weg $x_0 \ldots X$:

$$(\mathrm{VIII}) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{X} \left(\sum_{2}^{\infty}{}_{\varkappa}\, c_{\varkappa} (x-a)^{-\varkappa} \right) dx &= \sum_{2}^{\infty}{}_{\varkappa}\, c_{\varkappa} \int_{x_0}^{X} (x-a)^{-\varkappa}\, dx \\ &= -\left(\sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa} \frac{c_{\varkappa+1}}{\varkappa} (X-a)^{-\varkappa} - \sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa} \frac{c_{\varkappa+1}}{\varkappa} (x_0-a)^{-\varkappa} \right) \end{aligned} \right.$$

und das betreffende Integral hat wiederum den Wert *Null*, wenn der Weg ein *geschlossener* ist (gleichgültig, ob er die Stelle a, also schließlich das ganze Divergenzgebiet der Reihe umschließt oder nicht).

§ 3. Das bestimmte Integral einer regulären analytischen Funktion. Der Cauchysche Integralsatz.

1. Es seien $\mathfrak{P}(x-a)$, $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ zwei Potenzreihen mit teilweise zusammenfallenden Konvergenzkreisen und es bestehe in dem gemeinsamen Stücke B ihrer Konvergenzbereiche die Beziehung:

$$\mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}_1(x-a_1),$$

so definieren die beiden Potenzreihen zusammen eine im Innern des aus beiden Konvergenzkreisen bestehenden Bereiches A analytische Funktion regulären Verhaltens $f(x)$. Dann läßt sich zunächst zeigen, daß $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ für jeden einzelnen im Innern von (A) verlaufenden Weg $x_0 \ldots X$ einen bestimmten Wert besitzt, auch wenn der Weg sich über die *beiden* Teilbereiche erstreckt, in denen nur je *eine* der beiden Potenzreihen konvergiert. Dabei genügt es offenbar den Fall zu betrachten, daß x_0 dem einen, X dem anderen dieser Teilbereiche angehört und daß der verbindende Weg $x_0 \ldots X$ den gemeinsamen Konvergenzbereich B *einmal* durchsetzt, da ja Wege zusammengesetzterer Art sich im allgemeinen[1]) in eine *endliche* Anzahl *solcher* bzw. ganz in einem *einzigen* Konvergenzkreise verlaufender Wege zerlegen lassen. Bedeutet dann b irgend einen auf $x_0 \ldots X$ gelegenen, dem Innern von B angehörigen Punkt, so hat man nach Nr. 1 des vorigen Paragraphen, Gleichung (III f):

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{X} f(x)\,dx,$$

und da auf Grund der Definitionsgleichung (III) des vorigen

[1]) Der allerdings denkbare Fall, daß ein Wegstück eine der beiden Grenzlinien von B unendlich oft durchsetzt, bietet keine Schwierigkeit, da ja *eine* der beiden Potenzreihen längs dieses ganzen Wegstückes konvergieren muß.

Paragraphen der Wert des Integrals $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ nur von den Zahlenwerten der Funktion $f(x)$, nicht aber von deren besonderer Darstellungsform abhängt, so kann man setzen:

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{b} \mathfrak{P}(x-a)\,dx + \int\limits_{b}^{X} \mathfrak{P}_1(x-a_1)\,dx,$$

das fragliche Integral hat also einen bestimmten Wert.[1]) Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich folgendes: Ist längs irgend eines stetigen und rektifizierbaren Weges $x_0 \ldots X$ eine analytische Funktion regulären Verhaltens $f(x)$ durch ein System von Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu(x-a_\mu)$ mit ineinander greifenden Konvergenzkreisen definiert, so hat das über diesen Weg erstreckte Integral $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ einen bestimmten, durch eine Summe von Integralen der Form $\int\limits_{b_\mu}^{b_{\mu+1}} \mathfrak{P}_\mu(x-a_\mu)\,dx$ darstellbaren Wert.

2. Nun sei $f(x)$ *regulär* zum mindesten für alle Innenpunkte eines gewissen Bereiches B und es bedeute B' einen zusammenhängenden, von einer oder mehreren stetigen und rektifizierbaren Randkurven begrenzten Bereich, der nur aus Innenpunkten von B besteht. Wird dann mit (B') die gesamte Begrenzung von B' und mit $\int\limits_{+(B')} f(x)\,dx$ das Integral über den

---

[1]) Daß dieser Wert nicht etwa von der Wahl des Punktes b abhängt, ersieht man, wenn b' einen anderen in (B) gelegenen Punkt des Weges $x_0 \ldots X$ bedeutet, aus der Beziehung:

$$\int\limits_{b}^{b'} f(x)\,dx \left\{ \begin{aligned} &= \int\limits_{b}^{b'} \mathfrak{P}(x-a)\,dx \\ &= \int\limits_{b}^{b'} \mathfrak{P}_1(x-a_1)\,dx. \end{aligned} \right.$$

Weg B' in einem bestimmten Richtungssinne, dem sogenannten positiven, bezeichnet, so soll gezeigt werden, daß:

$$\int\limits_{+(B')} f(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Beweis. Da $f(x)$ im Innern und auf der Begrenzung von B' regulär ist, so existiert für jede Stelle x' von B' eine Umgebung $|x - x'| < r'$, innerhalb deren eine Entwickelung von der Form $f(x) = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{\varkappa}\, c_\varkappa (x - x')^\varkappa$ besteht. Dabei besitzen nach einem bekannten Satze die positiven Zahlen r' ein von Null verschiedenes Minimum, das mit ϱ bezeichnet werden möge. Zerlegt man nun den Bereich B' durch horizontale und vertikale Gerade im Abstande $\sqrt{\frac{1}{2}}\,\varrho$ in eine endliche Anzahl von Teilbereichen (Quadraten und Bruchstücken von Quadraten) B_λ, so ist die *größte* Entfernung zweier Punkte, von denen einer *im Innern*, der andere *auf der Grenze* eines solchen Teilbereiches B_λ liegt, *kleiner* als die Diagonale eines Quadrats mit der Seite $\sqrt{\frac{1}{2}}\,\varrho$, d. h. *kleiner als* ϱ. Wird also ein Punkt x_λ ganz beliebig *im Innern* von B_λ angenommen, so liegt die *gesamte Begrenzung* von B_λ noch *innerhalb* des Konvergenzbereiches einer Entwickelung von der Form

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa}\, c_\varkappa^{(\lambda)} (x - x_\lambda)^\varkappa.$$

Infolgedessen ergibt sich nach Nr. 3 des vorigen Paragraphen, daß für jedes λ:

$$\int\limits_{+(B_\lambda)} f(x) \cdot dx = 0. \tag{2}$$

Ferner besteht für $f(x)$ insbesondere längs der Begrenzung von B' ein System in einander greifender Potenzreihen-Entwickelungen, und es besitzt daher das Integral von $f(x)$ erstreckt über die Begrenzung (B'), etwa in positivem Richtungssinne, nach Nr. 1 *einen bestimmten Wert.* Andererseits ist aber dieses Integral gleich der *Summe* aller über die einzelnen (B_λ) in entsprechendem Sinne erstreckten Integrale, da ja bei der Addition dieser letzteren alle von den (zweimal in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufenden) Hilfsgeraden herrührenden Bestandteile sich herausheben. Somit ergibt sich mit Berücksichtigung von Gleichung (2) die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung (1).

3. Im vorstehenden ist also der *Cauchysche Integralsatz* bewiesen für die lediglich als *stetig und rektifizierbar* vorausgesetzte Begrenzung eines zusammenhängenden Bereiches B unter der Voraussetzung, daß die zu integrierende Funktion $f(x)$ sich im Innern und auf der Begrenzung *regulär* verhält. Da aber andererseits ohne Benützung der komplexen Integration, nämlich mit Hilfe der wesentlich einfacher gearteten *Mittelwerte* gezeigt werden kann[1]), daß jede in irgend einem Bereich B *eindeutige* und *stetig-differenzierbare* (d. h. mit einem stetigen Differentialquotienten $f'(x)$ versehene, nach der Cauchyschen Terminologie *synektische*) Funktion $f(x)$ daselbst *regulären Verhaltens* ist, so ist damit der fragliche Satz in dem bezeichneten Umfange zugleich für solche *stetig-differenzierbare* Funktionen bewiesen, d. h. in genau demselben Umfange, wie ihn der Beweis von C. Jordan[2]) gibt, der ja bis zum Erscheinen des Goursatschen Beweises mit dem „Lemma“[3]) als der am weitesten reichende zu gelten hatte.

4. Will man schließlich dem Cauchyschen Integralsatze (immer bei Zulassung von Integrationswegen, die lediglich *stetig* und *rektifizierbar* zu sein brauchen) bezüglich der Voraussetzungen über $f(x)$ denjenigen Grad von Allgemeinheit geben, wie der (übrigens auf eine *speziellere* Gattung von *Integrationswegen* sich beschränkende) Goursatsche Beweis ihn besitzt, d. h. fordert man für $f(x)$ lediglich die *Existenz* eines für jedes einzelne x *endlichen* Differentialquotienten $f'(x)$, *nicht*

---

[1]) s. Math. Ann. 47 (1896), S. 147 und besonders diese Berichte, Bd. 26 (1896), S. 167 ff.

[2]) Cours d'Analyse 1 (1893), No. 193—198.

[3]) Amer. Math. Soc. Transact. 1 (1900), S. 14. Vgl. auch 2 (1901), S. 413.

aber dessen *Stetigkeit*, so läßt sich dies sehr einfach in folgender Weise bewerkstelligen. Man braucht dazu die Beziehung $\int f(x)\,dx = 0$ nur für den Fall zu beweisen, daß die Integration sich über den Umfang eines *Dreiecks* erstreckt[1]), woraus dann unmittelbar die Gültigkeit der analogen Beziehung für den Umfang eines *Polygons* resultiert. Wird dann in irgend einem einfach zusammenhängenden Bereiche, in welchem $f(x)$ differenzierbar ist, ein beliebiger Punkt x_0 fest angenommen, so ist für jedes dem Bereiche angehörige x bei Zulassung beliebiger *polygonaler* Integrationswege $F(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ vom Wege *unabhängig*, also eine *eindeutige* Funktion von x. Man hat sodann:

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(z)\,dz = \int_{x}^{x+h} (f(z) - f(x))\,dz + f(x)\cdot h,$$

(wo bei hinlänglich kleinem $|h|$ die Integration von x bis $x+h$ *geradlinig* vollzogen werden kann) und daher:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{x}^{x+h} |f(z) - f(x)|\,|dz|$$

$$< \frac{\varepsilon}{|h|}\int_{x}^{x+h} |dz| = \varepsilon,$$

wenn eine obere Schranke δ für $|h|$ so bestimmt wird, daß:

$$|f(z) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für:} \ |z - x| \leq |h| < \delta,$$

was wegen der (aus der Differenzierbarkeit folgenden) *Stetigkeit* von $f(x)$ allemal möglich ist. Man findet also:

$$\left|\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = 0$$

---

[1]) Eine sehr einfache und kurze Fassung dieses Beweises habe ich in Bd. 33 (1903) dieser Berichte S. 681 angegeben.

und zwar *gleichmäßig* für alle h, wenn $x + h$ *geradlinig* nach x konvergiert.

Mithin ist $F(x)$ in allen (geradlinigen) Richtungen *gleichmäßig* differenzierbar, also *schlechthin* differenzierbar und schließlich, wegen:

$$F'(x) = f(x),$$

stetig differenzierbar, also nach dem oben gesagten *regulär*. Gleichzeitig mit $F(x)$ ist aber auch $F'(x)$, d. h. $f(x)$ *regulär*, und es gilt also für die zunächst nur als *eindeutig* und *differenzierbar* vorausgesetzte Funktion $f(x)$ der Cauchysche Integralsatz in dem oben für *reguläre* Funktionen festgestellten Umfange.

§ 4. Das Integral von x^{-1} für einen geschlossenen Weg um den Nullpunkt. — Der Cauchysche Randintegral- und Residuensatz.

1. Aus dem Cauchyschen Integralsatze folgt in entsprechendem Umfange und nach bekannten Methoden die Unabhängigkeit des Integrals $\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ vom Integrationswege, die Differenzierbarkeit nach der oberen Grenze und der Zusammenhang mit dem unbestimmten Integral. Hierauf braucht also nicht weiter eingegangen zu werden. Dagegen bleibt noch eine Frage offen, die sich auf das Integral von x^{-1} bezieht. Da x^{-1}, abgesehen von der Stelle $x = 0$, sich *regulär* verhält, so *existiert* $\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ für jeden die Stelle $x = 0$ vermeidenden Integrationsweg und *verschwindet*, falls der letztere ein *geschlossener* ist und die Stelle $x = 0$ auch nicht *im Innern* enthält. Es bleibt also nur das Integral $\int x^{-1}\,dx$ für einen die Stelle $x = 0$ umlaufenden geschlossenen Weg auszuwerten, wobei es auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes freisteht, jeden (in dem angegebenen Umfange) *beliebigen* Weg durch einen nach Bedarf gewählten *speziellen* zu ersetzen. Wir wählen, um die Berechnung ohne die Benützung der üblichen Trans-

formationsmethoden der Integralrechnung durchzuführen, als Integrationsweg das Quadrat mit den Eckpunkten:

$$1-i,\quad 1+i,\quad -1+i,\quad -1-i.$$

Man hat also, wenn mit $+(Q)$ den in positiver Integrationsrichtung zu durchlaufenden Umfang des betreffenden Quadrats bezeichnet:

$$(1)\qquad \int_{+(Q)} \frac{dx}{x} = \int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} + \int_{1+i}^{-1+i} \frac{dx}{x} + \int_{-1+i}^{-1-i} \frac{dx}{x} + \int_{-1-i}^{1-i} \frac{dx}{x}.$$

Das erste der rechts stehenden Integrale zerlegen wir folgendermaßen:

$$\int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{1+i} \frac{dx}{x} - \int_{1}^{1-i} \frac{dx}{x}$$

und, da die Existenz dieser Integrale bereits feststeht und es demgemäß ausreicht, die betreffenden Grenzwerte mit Hilfe einer Teilung in *gleiche* Intervalle zu berechnen, so findet man:

$$\int_{1}^{1+i} \frac{dx}{x} = i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{1+\frac{\nu}{n}i} \qquad \left(\text{für: } x_\nu = 1 + \frac{\nu}{n} i\right)$$

$$\int_{1}^{1-i} \frac{dx}{x} = -\, i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{1-\frac{\nu}{n}i} \qquad \left(\text{für: } x_\nu = 1 - \frac{\nu}{n} i\right)$$

und daher:

$$(2)\qquad \int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} = 2\, i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2}.$$

Für das zweite der in Gleichung (1) rechts stehenden Integrale hat man zunächst:

$$\int_{1+i}^{-1+i} \frac{dx}{x} = -\int_{i}^{1+i} \frac{dx}{x} + \int_{i}^{-1+i} \frac{dx}{x}$$

und sodann:

$$\int_{i}^{1+i} \frac{dx}{x} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{i + \frac{\nu}{n}} \quad \left(\text{für: } x_{\nu} = i + \frac{\nu}{n}\right),$$

$$\int_{i}^{-1+i} \frac{dx}{x} = - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{i - \frac{\nu}{n}} \quad \left(\text{für: } x_{\nu} = i - \frac{\nu}{n}\right),$$

also:

$$\int_{1+i}^{-1+i} \frac{dx}{x} = 2\,i \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}. \tag{3}$$

In ganz analoger Weise ergibt sich, daß auch:

$$\begin{aligned} \int_{-1+i}^{-1-i} \frac{dx}{x} &= 2\,i \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}, \\ \int_{-1-i}^{1-i} \frac{dx}{x} &= 2\,i \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

mithin schließlich:

$$\int_{+(Q)} \frac{dx}{x} = 8\,i \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}. \tag{5}$$

Durch Entwickelung der rechts auftretenden Summe nach Potenzen von $\left(\frac{\nu}{n}\right)^2$ findet man:

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2} \begin{cases} > \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \sum_{0}^{2k-1} {}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2\lambda} = \sum_{0}^{k-1} {}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{\nu^{2\lambda}}{n^{2\lambda+1}} \\ < \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \sum_{0}^{2k} {}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2\lambda} = \sum_{0}^{2k} {}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \frac{\nu^{2\lambda}}{n^{2\lambda+1}}. \end{cases} \tag{6}$$

Nun ist bekanntlich[1]):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}_\nu \frac{\nu^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

und daher wird für jedes k:

$$(7)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2} \begin{cases} \geqq \sum\limits_0^{2k-1}{}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \dfrac{1}{2\lambda+1} \\ \leqq \sum\limits_0^{2k}{}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \dfrac{1}{2\lambda+1}, \end{cases}$$

also schließlich:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2} = \sum_0^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{2\lambda+1},$$

d. h. gleich der Leibnizschen Reihe für $\frac{\pi}{4}$, so daß nach Gleichung (5) sich ergibt:

$$(9)\qquad \int\limits_{+(Q)} \frac{dx}{x} = 2\pi i$$

und hieraus, wenn man mit (C) einen beliebigen den Nullpunkt umlaufenden geschlossenen Weg bezeichnet, etwas allgemeiner:

$$(9\,a)\qquad \int\limits_{+(C)} \frac{dx}{x} = 2\pi i.$$

2. Durch Substitution von $x - a$ für x findet man, analog wie früher bei der Herleitung von $\int\limits_{x_0}^{X} (x-a)^m\, dx$ aus $\int\limits_{x_0}^{X} x^m\, dx$ (s. § 2, (Gl. IV a), S. 167), daß auch:

[1]) Die Formel ergibt sich am einfachsten mit Hilfe des verallgemeinerten Cauchyschen (Stolzschen) Grenzwertsatzes, nach welchem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{M_n - M_{n-1}},$$

falls der rechts stehende Grenzwert für $M_n > M_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$, *existiert.*

(10) $$\int\limits_{+(C)} \frac{dx}{x-a} = 2\pi i,$$

falls der geschlossene Weg (C) die Stelle a im Innern enthält.

Ist nun $f(x)$ *regulär* im Innern und auf der Begrenzung eines Bereiches B von der Art, wie er beim Beweise des Cauchyschen Integralsatzes benützt wurde, und bezeichnet man mit x' jede beliebige Stelle *im Innern* von B, so ist auch $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ in demselben Umfange (insbesondere auch an der Stelle x') *regulär*, und man findet daher auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes und Gl. (10):

$$0 = \int\limits_{+(B)} \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\, dx = \int\limits_{+(B)} \frac{f(x)}{x-x'}\, dx - 2\pi i f(x'),$$

also:

(11) $$f(x') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{+(B)} \frac{f(x)}{x-x'}\, dx$$

(*Cauchyscher Randintegralsatz*).

Enthält der Bereich B im Innern die isolierte singuläre Stelle a und bezeichnet man mit (K) einen in B verlaufenden Kreis um a, so hat man zunächst:

$$\int\limits_{+(B)} f(x)\, dx = \int\limits_{+(K)} f(x)\, dx.$$

Da nun für die Umgebung von a auf Grund der Mittelwertmethode[1]) eine Laurentsche Entwickelung von der Form besteht:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\, c_{\varkappa}(x-a)^{\varkappa},$$

so findet man mit Benützung des in § 2 über die Integration von Reihen nach positiven bzw. negativen Potenzen gesagten, sowie von Gleichung (10):

$$\int\limits_{+(B)} f(x)\, dx = 2\pi i\, c_{-1} \quad (\textit{Cauchyscher Residuensatz}).$$

[1]) Vgl. diese Berichte, Bd. 25 (1895), S. 85 oder Math. Ann. 47 (1896) S. 147.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1920

Band/Volume: 1920

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration 145-182