

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen  
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
zu München

---

1932. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

---

München 1932

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



# Über die konforme Abbildung durch die Besselfunktionen.

Von Josef Lense in München.

Vorgelegt von Herrn G. Faber in der Sitzung vom 7. Mai 1932.

In den vielen Abhandlungen und Büchern über die Besselfunktionen wird nirgends auf die konforme Abbildung eingegangen, welche durch diese Funktion vermittelt wird. Die genannte Lücke soweit zu schließen, als es nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis über die Besselfunktionen möglich ist, soll das Ziel dieser Arbeit sein. Wir befolgen dabei eine Methode, die sich schon bei der Gammafunktion als fruchtbar erwiesen hat.<sup>1</sup> Zuerst stellen wir alle für das genannte Ziel wichtigen Eigenschaften der Besselfunktionen zusammen.<sup>2</sup>

## § 1. Konvergenzwerte.

Die allgemeine Besselfunktion ist durch die Formel gegeben (W. S. 40)

$$(1) \quad J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für sämtliche Werte von  $z$  und  $\nu$ ,  $z = 0$  gegebenenfalls ausgenommen, stellt also eine analytische Funktion von  $z$  und  $\nu$  dar (W. S. 44). Spalten wir den Faktor  $z^\nu$  ab, so bleibt eine ganze transzendente, gerade Funktion von  $z$  übrig, die wir mit

$$(2) \quad F_\nu(z) = z^{-\nu} J_\nu(z)$$

bezeichnen wollen. Aus der Verteilung der Nullstellen und ihrer Weierstraßschen Produktentwicklung (W. S. 497—498) ergibt sich:

<sup>1</sup> J. Lense, Über die konforme Abbildung durch die Gammafunktion, Münch. Ber. 1928, S. 267—283.

1. Ginzl, Die konforme Abbildung durch die Gammafunktion, Acta math. 56 (1931), S. 273—353.

<sup>2</sup> Man vergleiche hierzu G. N. Watson, A Treatise of the Theory of Bessel Functions, Cambridge, University Press 1922. Dieses Buch wird im folgenden mit W. bezeichnet.

$F_\nu(z)$  hat das Geschlecht 1, den Grad 0, den Grenzexponenten (er ist Divergenzexponent) 1, die Ordnung 1 und ist vom Normaltypus.<sup>1</sup>

Wir setzen im folgenden immer:

$$(3) \quad \begin{aligned} z &= x + iy = |z| e^{i\varphi}, \\ w &= J_\nu(z) = u + iv = |w| e^{i\psi}. \end{aligned}$$

Für  $|\varphi| < \pi$  und genügend große  $|z|$  gilt die asymptotische Darstellung (W. S. 201):

$$(4) \quad J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

daher für reelle  $\nu$  (auf die wir uns im folgenden beschränken wollen)

$$(5) \quad \begin{aligned} |w| &= \frac{e^{|\nu|}}{\sqrt{2\pi|z|}} [1 + \eta(x, y)], \\ \psi &= \arg \operatorname{tg} \left[ \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \operatorname{tg} \left( \frac{2\nu + 1}{4} \pi - x \right) \right] - \frac{1}{2} \varphi + \tau, \end{aligned}$$

dabei werden  $|\eta|$  und  $|\tau|$  beliebig klein für alle genügend großen  $|z|$ .

Aus den Formeln (5) können wir folgende Schlüsse ziehen:

$$(6) \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} J_\nu(z) = \infty, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} F(z) = \infty,$$

daher

$$(7) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi = 0, \pi \text{ auf den Kurven } |w| = \text{const.},$$

ferner

$$(8) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi = \pm \infty$$

(oberes Zeichen für den 2. und 4., unteres für den 1. und 3. Quadranten),

daher

$$(9) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \text{ auf den Kurven } \psi = \text{const.}$$

<sup>1</sup> Bezüglich dieser Bezeichnungen siehe L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Veränderlichen, Enzykl. der math. Wiss. II C 4.

Bleibt  $|y|$  beschränkt, so ist

$$(10) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} J_\nu(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F_\nu(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu > -\frac{1}{2}, \\ \infty & \text{für } \nu < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bleibt dagegen  $|y|$  nicht beschränkt, so kommt man immer in Gebiete mit  $\infty$  als Konvergenzwert, daher können bei Annäherung von  $z$  an  $\infty$  nur 0 und  $\infty$  als Konvergenzwerte in Frage kommen. (Auch für  $\nu = -\frac{1}{2}$ , weil dann  $F_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z$  ist). Die ganze Funktion  $F_\nu(z)$  hat also nur 0 und  $\infty$  zu Konvergenzwerten, für  $\nu \leq -\frac{1}{2}$  nur  $\infty$ , ihre Umkehrungsfunktion daher nur diese Werte zu transzendenten Verzweigungspunkten.

## § 2. Nullstellen.

Sämtliche Nullstellen von  $J_\nu(z)$ ,  $F_\nu(z)$  und  $F'_\nu(z)$  sind einfach,  $z = 0$  gegebenenfalls ausgenommen. Denn die Funktion  $J_\nu(z)$  genügt der Differentialgleichung

$$z^2 J''_\nu(z) + z J'_\nu(z) + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0.$$

Daraus erschließt man in bekannter Weise (W. S. 479) das genannte Ergebnis. Sie lehrt auch, daß eine mehrfache Nullstelle von  $J'_\nu(z)$  außer  $z = 0$  höchstens für  $z = \pm \nu$  eintreten kann. Für  $F_\nu(z)$  ergibt sich die Gleichung

$$z F''_\nu(z) + (2\nu + 1) F'_\nu(z) + z F_\nu(z) = 0$$

und daraus ebenso wie früher die Behauptung:  $F_\nu(z)$  und  $F'_\nu(z)$  haben außer  $z = 0$  nur einfache Nullstellen.

Wegen

$$(11) \quad J_\nu(-z) = (-1)^\nu J_\nu(z)$$

liegen sie spiegelbildlich zum Nullpunkt, ebenso die der Ableitungen. Während für  $\nu < -1$   $J_\nu(z)$  auch komplexe Nullstellen hat (negative ganzzahlige Werte von  $\nu$  ausgenommen), ist dies für  $\nu \geq -1$  nicht mehr der Fall (W.S. 482—483). Für negative ganzzahlige Werte von  $\nu$  wird das Verhalten durch die Beziehung

$$(12) \quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

geregelt. Diese wollen wir also im folgenden außer acht lassen. Da die Reihe in (1) lauter reelle Koeffizienten hat, ergibt sich beim Übergang zum konjugiert komplexen Wert, der durch einen Querstrich angedeutet wird,

$$(13) \quad J_\nu(z) = \overline{J_\nu(\bar{z})}.$$

Sämtliche Nullstellen liegen also spiegelbildlich zur X- und Y-Achse, ebenso infolge (11) und (13) die Kurven  $|w| = \text{const.}$  und ihre orthogonalen Trajektorien. Immer gibt es unendlich viele reelle Nullstellen von  $J_\nu(z)$  und  $F_\nu(z)$  (W. S. 478). Sie häufen sich nur im Unendlichen. Da zwischen zwei aufeinanderfolgenden solchen Nullstellen immer mindestens eine Nullstelle der Ableitung liegen muß, haben auch die Ableitungen dieser Funktionen unendlich viele reelle Nullstellen. Sie häufen sich ebenfalls nur im Unendlichen, da auch die Ableitungen, von der Verzweigung im Nullpunkt abgesehen, nur  $\infty$  zur wesentlich singulären Stelle haben.

Wir beschränken uns jetzt auf die Werte von  $\nu > -1$ . Schen wir immer von  $z = 0$  ab, so gilt folgendes (W. S. 480, 482):  $J_\nu(z)$  und  $F_\nu(z)$  haben ebenso wie ihre ersten Ableitungen lauter einfache, reelle, spiegelbildlich zum Nullpunkt gelegene Nullstellen. Diejenigen der Ableitung trennen die zur Funktion gehörigen. Für  $-1 < \nu < 0$  kommen bei  $J'_\nu(z)$  noch zwei einfache konjugiert rein imaginäre Nullstellen hinzu.

### § 3. Konforme Abbildung durch Besselfunktionen mit ganzzahligen Zeigern.

Die durch (3) vermittelte konforme Abbildung der  $z$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene erkennen wir am besten, wenn wir in der  $z$ -Ebene die Kurven  $|w| = \text{const.}$  und  $\psi = \text{const.}$  verfolgen. Wir wollen jene einfach die Höhenlinien, diese die Stromlinien der Abbildungsfunktion nennen. Da  $J_\nu(z)$  nur für ganzzahlige Werte des Zeigers eine eindeutige Funktion ist, sonst endlich oder unendlich vieldeutig, je nachdem  $\nu$  rational oder irrational ist, genügt nur im ersten Fall die schlichte  $z$ -Ebene zur Darstellung. Im zweiten Fall muß die  $z$ -Ebene mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Blättern überdeckt werden.

Wir untersuchen zuerst die Abbildung für ganzzahlige Werte von  $\nu$  und können uns dabei nach (12) auf nichtnegative Werte

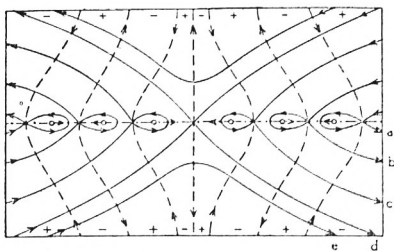


Abb 1

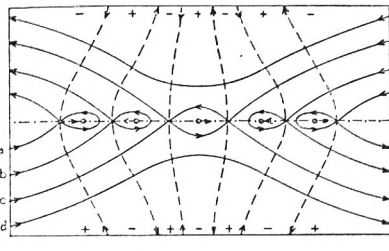


Abb 2

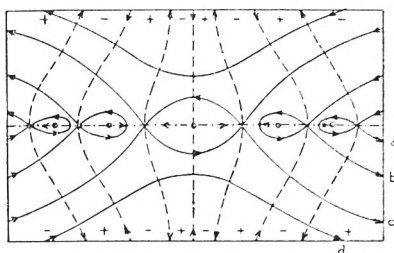


Abb 3

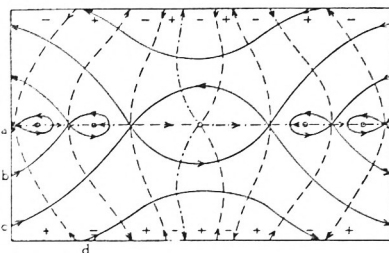


Abb 4

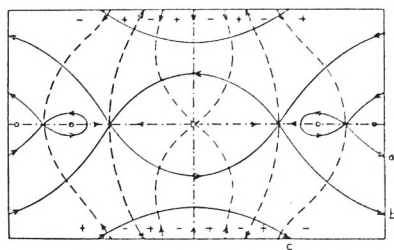


Abb 5

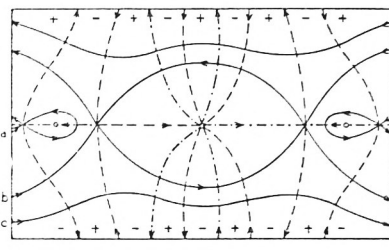


Abb 6

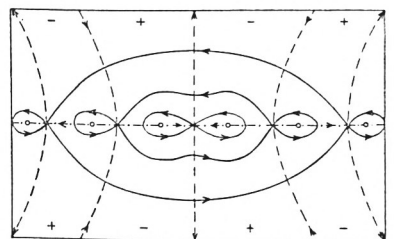


Abb 7

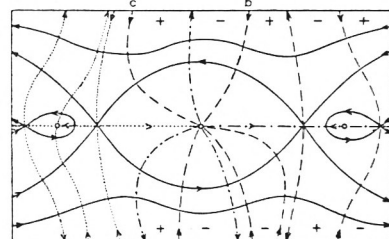


Abb 8

beschränken. Wie schon erwähnt, sind die Höhenlinien spiegelbildlich zu beiden Koordinatenachsen gelegen. Zwei Höhenlinien, die zu verschiedenen Werten von  $|w|$  gehören, können sich niemals schneiden. Die Nullstellen werden von den Höhenlinien in geschlossenen Kurven ohne Doppelpunkte umschlungen. In den Kreuzungspunkten (den Nullstellen der Ableitung), die den Verzweigungspunkten der  $w$ -Ebene entsprechen, durchsetzt sich die hindurchgehende Höhenlinie senkrecht in Gestalt einer Lemniskate (die beiden Zweige sind unter  $45^0$  gegen die X-Achse geneigt), gemäß der Tatsache, daß diese Nullstellen einfach sind. Eine Ausnahme davon bildet nur der Nullpunkt der  $z$ -Ebene für  $v = n \geq 1$ . In diesem Fall ist er Bild des Nullpunktes der  $w$ -Ebene und als solcher ebenfalls von den Höhenlinien kreisartig umschlossen. So ergeben sich die Abbildungen 1—6, entsprechend den Fällen  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Die ausgezogenen Kurven bedeuten die Höhenlinien, die darin angebrachten Pfeile den positiven Umlaufssinn der  $w$ -Ebene, die bei den einzelnen Höhenlinien stehenden Buchstaben weisen auf die zugehörigen Werte von  $|w|$  hin. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Abb. 1.

Kurve	$ w $
<i>a</i>	0,25
<i>b</i>	0,30
<i>c</i>	0,40
<i>d</i>	1,00
<i>e</i>	3,30

Abb. 2.

Kurve	$ w $
<i>a</i>	0,27
<i>b</i>	0,35
<i>c</i>	0,58
<i>d</i>	2,09

Abb. 3.

Kurve	$ w $
<i>a</i>	0,25
<i>b</i>	0,30
<i>c</i>	0,49
<i>d</i>	2,25

Abb. 4.

Kurve	$ w $
<i>a</i>	0,23
<i>b</i>	0,29
<i>c</i>	0,43
<i>d</i>	3,34

Abb. 5.

Kurve	$ w $
<i>a</i>	0,27
<i>b</i>	0,39
<i>c</i>	5,11

Abb. 6.

Kurve	$ w $
<i>a</i>	0,24
<i>b</i>	0,36
<i>c</i>	2,15

Nach (7) werden die Höhenlinien von allen Geraden getroffen, die einen wenn auch noch so kleinen Winkel mit der X-Achse einschließen.

Von den Stromlinien sind nur die Bilder der U-Achse, und zwar gestrichelt, gezeichnet. Die Pfeile bedeuten hier den positiven Durchlaufungssinn der U-Achse. Sämtliche Stromlinien müssen die Höhenlinien senkrecht durchsetzen, die Kreuzungspunkte ausgenommen. Stromlinien, die zu verschiedenen Werten von  $\psi$  gehören, können einander nur in den Bildpunkten von 0 und  $\infty$  schneiden. Die Zeichen + — in den Abbildungen bedeuten: Der von der betreffenden Stromlinie eingeschlossene Bereich ist Bild der positiven, beziehungsweise der negativen  $w$ -Halbebene. Zwei solche Bereiche schließen sich immer zum Bild der Gesamtebene zusammen. Um das äußerlich zu kennzeichnen, ist der betreffende Teil der Stromlinie, der zwei derartige zusammengehörige Bereiche voneinander scheidet, strichpunktiert gezeichnet. Die Nullstellen sind durch kleine Kreise angedeutet. Dem Faktor  $z^n$  gemäß ist  $z = 0$  für  $n \geq 2$  ein  $(n-1)$ facher Kreuzungspunkt der Funktion  $J_n(z)$  und zugleich Bild des Punktes  $w = 0$ . Die durch ihn hindurchgehenden Bilder der U-Achse schließen daher einen Winkel von  $\frac{\pi}{n}$  miteinander ein. Aus (9) folgt: Die Stromlinien werden schließlich von jeder Geraden getroffen, die einen wenn auch noch so kleinen Winkel mit der V-Achse einschließt.

Gemäß (2) und (10) ergeben sich für die konforme Abbildung durch  $F_\nu(z)$  für alle Werte von  $\nu > -\frac{1}{2}$  Bilder von der Art der Abbildung 1, dagegen für  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$  solche von der Art der Abbildung 7, mit anders gewendeten Höhenlinien, da in diesem Fall der absolute Betrag von  $F_\nu(z)$  über alle Schranken wächst, wenn man auf der X-Achse ins Unendliche geht. Für  $\nu > -\frac{1}{2}$  hat, wie erwähnt, die Umkehrfunktion von  $F_\nu(z)$  die transzendenten Verzweigungspunkte 0 und  $\infty$  und außerdem noch unendlich viele reelle algebraische Verzweigungspunkte erster Ordnung (entsprechend den Nullstellen der Ableitung), die sich bei  $w = 0$  häufen. In der Bezeichnung von P. Boutroux und F. Iversen<sup>1</sup> ist 0 indirekt kritisch,  $\infty$  direkt

<sup>1</sup> F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Diss. Helsingfors 1914.



kritisch erster Art. Dagegen hat diese Umkehrungsfunktion für  $-1 < \nu \leq -\frac{1}{2}$  nur  $w = \infty$  zum transzendenten Verzweigungspunkt. Dort häufen sich auch die unendlich vielen reellen algebraischen Verzweigungspunkte erster Ordnung.  $\infty$  ist hier direkt kritisch zweiter Art. Da die Ausnahmewerte (jene, welche die Funktion nach dem Picardschen Satze nicht annimmt) Konvergenzwerte sein müssen, kommen für  $F_\nu(z)$  nur 0 und  $\infty$  in Frage. 0 fällt aus, weil die Funktion Nullstellen hat, und  $\infty$  ist selbstverständlich, weil sie als ganze transzendente Funktion keine Pole hat.

#### § 4. Konforme Abbildung durch Besselfunktionen vom Zeiger $\nu > -1$ .

In dem bis jetzt ausgeschlossenen Fall, daß  $\nu$  keine ganze Zahl ist, hat man, wie schon erwähnt, die  $z$ -Ebene mehrfach zu überdecken, entsprechend der durch die Potenz  $z^\nu$  gegebenen Verzweigung im Nullpunkt. Die den einzelnen Blättern der  $w$ -Ebene entsprechenden Bereiche, die sich um den Nullpunkt herum anordnen, können jetzt nicht mehr in der schlichten  $z$ -Ebene aneinandergereiht werden, sondern füllen eine endliche oder unendliche Anzahl von Blättern der  $z$ -Ebene aus, da  $2\pi$  kein Vielfaches von  $\frac{2\pi}{\nu}$  mehr ist. Sonst bleibt das Schaubild der Höhen- und Stromlinien in den einzelnen Blättern der  $z$ -Ebene von derselben Art wie im ganzzahligen Fall, wenigstens solange  $\nu > 0$  ist. Die Bilder der U-Achse liegen nicht mehr spiegelbildlich zur X- und Y-Achse.

In der Abbildung 8 ist der Fall  $\nu = \frac{18}{5}$  gezeichnet. Die Kurven  $a$  und  $b$  begrenzen das Bild des ersten Blattes der  $w$ -Ebene. Sie schließen mit der X-Achse je einen Winkel von  $50^\circ$ , miteinander also einen solchen von  $100^\circ$  ein. Die Kurven  $b$  und  $c$  begrenzen das Bild des zweiten Blattes,  $c$  und  $d$  das des dritten,  $d$  und  $e$  das des vierten. Da  $360^\circ$  kein Vielfaches von  $100^\circ$  ist, füllen hier die Bilder nicht mehr, schlicht einander gelegt, den ganzen Winkelraum von  $360^\circ$  aus, sondern man hat sich die  $z$ -Ebene selbst in mehreren Blättern zu denken. Wir schneiden

z. B. längs der Kurve  $a$  auf und fügen dort das zweite Blatt daran. Dann ist die Kurve  $e$  im zweiten Blatt zu zeichnen. Ähnlich ist das Verfahren fortzusetzen. Die Kurve  $e$  ist Bild der negativen U-Achse, also einer Geraden, die mit der positiven U-Achse einen Winkel von  $180^\circ$  einschließt. Die nächste punktierte Linie wird im Kreuzungspunkt um  $90^\circ$  geknickt und läuft dann in den Punkt  $z = 0$ , wobei sie mit der Kurve  $e$  einen Winkel von  $30^\circ$  einschließt. Die entsprechenden Geraden in der  $w$ -Ebene schließen daher einen Winkel von  $30 \cdot \frac{18^\circ}{5} = 108^\circ$  ein. Im Nullpunkt der  $z$ -Ebene werden ja die Winkel der  $w$ -Ebene wegen des Faktors  $z^{\frac{18}{5}}$  auf den  $\frac{5}{18}$ ten Teil herabgedrückt. Dasselbe gilt von den andern punktierten Linien, die zu den Kurven der rechten Halbebene spiegelbildlich liegen. Sie sind Bilder von gerichteten Geraden der  $w$ -Ebene, die mit der positiven U-Achse Winkel von  $108^\circ$  einschließen. Dagegen ist die punktierte Linie der linken  $z$ -Halbebene, welche durch die dort eingezeichnete Nullstelle geht, Bild der U-Achse, da sie die punktierte negative X-Achse unter einem Winkel von  $108^\circ$  schneidet. In der erwähnten Nullstelle ist ja die Abbildung konform, daher werden die Winkel durch die Abbildung nicht geändert. Die Pfeile auf den punktierten Linien bedeuten jene Richtung, die in der  $w$ -Ebene dem positiven Durchlaufungssinn jener Geraden entspricht, deren Bilder die punktierten Kurven sind. Die Abbildung ist so angelegt, daß der positiven X-Achse im ersten Blatt der  $z$ -Ebene der Hauptwert der Funktion zugeordnet ist.

Im Intervall  $-1 < \nu < 0$  wird der Nullpunkt der  $z$ -Ebene das Bild des Punktes  $\infty$  der  $w$ -Ebene, auf der imaginären Achse treten zwei konjugierte einfache Kreuzungspunkte auf, entsprechend den betreffenden Nullstellen von  $J'_\nu(z)$ , im übrigen bleibt die Gestalt der Höhen- und Stromlinien unverändert, so daß ein Bild von der Art der Abbildung 9 eintritt. Für diese wurde der Fall  $\nu = -\frac{1}{2}$  zugrunde gelegt. Die einzelnen Blätter sind hier so um den Nullpunkt  $z = 0$  angeordnet, daß wegen des Faktors  $z^{-\frac{1}{2}}$  einem ganzen Blatt der  $z$ -Ebene nur die halbe

$w$ -Ebene entspricht. Man hat also z. B. die  $z$ -Ebene längs der positiven  $X$ -Achse aufzuschneiden. Wir verzichten darauf, den Aufbau der Riemannschen Fläche über der  $w$ -Ebene im Fall eines nichtganzzahligen Zeigers näher zu besprechen. Seine Grundzüge sind klar, die Durchführung ist in den einzelnen Fällen manchmal sehr verwickelt, liefert aber grundsätzlich nichts Neues.

Da  $J_\nu(z)$  auch eine analytische Funktion von  $\nu$  ist, müssen die einzelnen Abbildungen stetig ineinander übergehen. Dabei rücken die Nullstellen und Kreuzungspunkte von  $J_\nu(z)$  mit wachsendem positiven  $\nu$  immer mehr ins Unendliche hinaus.

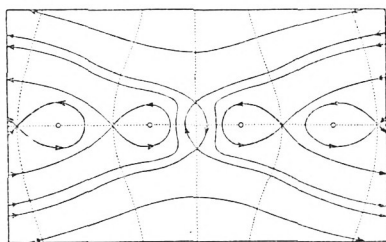


Abb 9

Beim Durchgang durch ein rationales  $\nu$  verwandelt sich die unendlichblättrige  $z$ -Ebene in eine endlichblättrige, ja sogar in die schlichte  $z$ -Ebene, sobald ein ganzzahliger  $\nu$ -Wert erreicht wird. Die beiden dem Nullpunkt zunächst gelegenen Kreuzungspunkte vereinigen sich für  $\nu = 0$  im Nullpunkt, dieser wird jetzt Bild des Punktes  $1$ . Sinkt der Zeiger  $\nu$  weiter, so spalten sich jetzt aus dem Nullpunkt die beiden konjugiert rein imaginären Kreuzungspunkte ab, der Nullpunkt selbst wird Bild des Punktes  $\infty$ . Inzwischen rücken die beiden nächsten reellen Nullstellen auf der  $X$ -Achse immer näher zum Nullpunkt und vereinigen sich dort für  $\nu = -1$ , es entsteht das Bild für  $J_{-1}(z) = -J_1(z)$ . (Siehe Abbildung 2.)

Weiterhin soll die konforme Abbildung durch die Besselfunktion nicht untersucht werden mangels genauerer Sätze über die Nullstellen der Ableitung für  $\nu < -1$ . Es sei noch bemerkt, daß in den Abbildungen die Kurven nicht zahlenmäßig genau gezeichnet sind, sondern nur so, daß die für den Aufbau der Riemannschen Fläche über der  $w$ -Ebene maßgebenden topologischen Verhältnisse klar zutage treten.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1932

Band/Volume: [1932](#)

Autor(en)/Author(s): Lense Josef

Artikel/Article: [Über die konforme Abbildung durch die Besselfunktionen 61-70](#)