Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1932. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1932
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Struktur gewisser abgeschlossener Punktmengen.

Von Otto Haupt, Erlangen.

Vorgelegt von Herrn G. Faber in der Sitzung vom 7. Mai 1932.

In einer früheren Arbeit[1] wurde unter anderem gezeigt, daß ein beschränktes Kontinuum, welches in bezug auf ein gegebenes Ebenenbüschel endliche Relativordnung[2] besitzt und welches mit der Büschelachse keinen Punkt gemeinsam hat, als Bogensumme[3] darstellbar ist. Die Betrachtung nur solcher Kontinua, deren Durchschnitt mit der Büschelachse leer ist, geschah im Hinblick auf ein Beispiel[4] eines nicht als Bogensumme darstellbaren Kontinuums, welches mit der Büschelachse unbegrenzt viele Punkte gemeinsam hat. Nun ist aber im genannten Beispiel der Durchschnitt des betrachteten Kontinuums mit der Büschelachse eine (lineare, nirgends dichte) perfekte Punktmenge, also überabzählbar. Daher bleibt die Frage zu erörtern, ob etwa auch noch im Falle eines *höchstens abzählbaren Durchschnittes mit der Büschelachse* jedes Kontinuum von endlicher Relativordnung als Bogensumme darstellbar ist oder nicht, und ob das auch für

---

[1] Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Crelles Journal 167 (1932), S. 20ff.

[2] Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ heißt hierbei „von endlicher Relativordnung bezüglich des Ebenenbüschels B", wenn $\mathfrak{M}$ mit jeder Ebene von B keine oder endlich viele *nicht der Büschelachse angehörige* Punkte gemeinsam hat. Im Gegensatz zu dieser letzteren Festsetzung wird bei Herrn Rosenthal[6] (a. a. O. S. 270, insbesondere Fußnote[1]), der Durchschnitt der Büschelachse mit $\mathfrak{M}$ bei Bestimmung der Relativordnung mitgezählt. Unsere, auch oben im Texte stets gebrauchte Festsetzung ist bedingt durch die im Text nachstehend angegebenen Sätze.

[3] Unter einer „Bogensumme" $\mathfrak{S}$ verstehen wir eine Summe von (höchstens) abzählbar vielen einfachen, abgeschlossenen Bogen, von denen je zwei höchstens Endpunkte gemeinsam haben. Die Darstellung von $\mathfrak{S}$ als Bogensumme ist natürlich nicht eindeutig. Wird eine bestimmte Darstellung zugrunde gelegt, so ist in ihr jeder Punkt P von $\mathfrak{S}$ entweder innerer Punkt eines Bogens und liegt auf keinem anderen Bogen, oder P ist Endpunkt eines oder mehrerer Bogen.

[4] Vgl. [1], a. a. O. Nr. 2, 2.

nicht beschränkte Kontinua gilt. Diese Frage soll in den folgenden Zeilen beantwortet werden, und zwar — wie vorweg bemerkt sei — im bejahenden Sinne. Dabei ergibt sich, daß man sogar noch einen Schritt weitergehen und allgemein *abgeschlossene Punktmengen* $\mathfrak{A}$ *von endlicher Relativordnung* und höchstens abzählbarem Durchschnitt mit der Achse des Bezugsbüschel zulassen kann. Wir werden nämlich zeigen, daß eine solche abgeschlossene Menge höchstens abzählbar viele, mehr als einen Punkt enthaltende Komponenten besitzt. Da nun diese Komponenten (zufolge der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$) Kontinua sind und da letztere, wie vorhin angedeutet, als Bogensummen dargestellt werden können, so folgt schließlich die *Darstellbarkeit von* $\mathfrak{A}$ *als Vereinigung der Menge ihrer einpunktigen Komponenten mit einer Bogensumme.*

Das hiermit skizzierte Ergebnis legt die Frage nahe, ob die Darstellbarkeit als Bogensumme auch dann noch immer möglich ist, wenn die Voraussetzung endlicher Relativordnung der betrachteten Punktmenge $\mathfrak{A}$ (oder wenn die Annahme der Abzählbarkeit des Durchschnittes mit der Büschelachse) ersetzt wird durch die weniger starke, daß $\mathfrak{A}$ von höchstens abzählbarer Relativordnung ist (bzw. daß $\mathfrak{A}$ einen überabzählbaren Durchschnitt mit der Büschelachse besitzt); das Beispiel des Urysohnschen Baumes zeigt,[5] daß die Frage (wenigstens in dieser Allgemeinheit) zu verneinen ist.

Will man nur die schwächere Forderung erfüllt sehen, daß *ein (beschränktes) Kontinuum* $\mathfrak{K}$ *von endlicher Relativordnung eine reguläre Kurve im Sinne der topologischen Kurventheorie*[5] sei, so genügt dafür, wie wir zeigen, daß *der Durchschnitt von* $\mathfrak{K}$ *mit der Büschelachse nulldimensional ist.*

Diese Regularität von $\mathfrak{K}$ bildet für uns ein Hilfsmittel beim Beweise der Darstellbarkeit von $\mathfrak{K}$ als Bogensumme, zunächst im

[5] Unter „topologischer Kurventheorie" verstehen wir die Theorie der Kurven im Sinne der Dimensionstheorie. „Kurve" ist also hier gleichbedeutend mit eindimensionalem, kompaktem Kontinuum. Ein Punkt P einer Kurve heißt in dieser Theorie „regulär", wenn beliebig kleine Umgebungen von P existieren, deren Durchschnitt mit der Kurve endlich ist. Sind sämtliche Punkte einer Kurve regulär, so heißt die Kurve selbst regulär, vgl. Menger, K., Grundzüge einer Theorie der Kurven, Mathematische Annalen 95 (1925) S. 277 ff.

Falle beschränkter Kontinua $\mathfrak{K}$ (Nr. 1); die weiteren, oben bereits genannten Verallgemeinerungen auf nicht beschränkte Kontinua und auf abgeschlossene Mengen (Nr. 2 und 3) bieten dann keine besonderen Schwierigkeiten mehr. Übrigens würde es für unseren Beweis der Darstellbarkeit als Bogensumme genügen, statt der Regularität die Tatsache des *lokalen Zusammenhangs* von $\mathfrak{K}$ heranzuziehen, welche ihrerseits einem inzwischen von Herrn Rosenthal[6] bewiesenen Satze bzw. seiner einschlägigen Verallgemeinerung entnommen werden kann (vgl. Nr. 1 Zusatz).

Zur Vereinfachung wird allen unseren Betrachtungen der *dreidimensionale euklidische Raum zugrunde gelegt*; die Betrachtungen behalten aber Gültigkeit *allgemein für n Dimensionen* ($n \geqq 2$), sowie für den Fall, daß an Stelle der benutzten Ebenenbüschel topologische Bilder von solchen treten.[7]

Schließlich sei bemerkt, daß Herr Whyburn[8] inzwischen — als Spezialfall eines allgemeinen Satzes — notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben hat dafür, daß eine Punktmenge Bogensumme ist. Die nachstehenden Erörterungen machen aber von dem Whyburnschen Kriterium keinen Gebrauch.[9]

---

[6] Rosenthal, A., Über Kontinua von endlicher Ordnung, Crelles Journal 167 (1932) S. 270ff.

[7] Vgl. [1], a. a. O. Nr. 0,8.

[8] Whyburn, G. T., On the decomposability of closed sets into a countable number of simple sets of various types. Amer. J. math. 54 (1932) S. 169ff.

[9] Es sei hier nur noch hingewiesen auf Marchaud, A., Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné. C. r. Acad. Sci. Paris 193 (1931) S. 807—809 und 1050—1051 (vgl. auch dazu P. Alexandroff im Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 3 (1932) S. 77—78). Die a. a. O. (S. 808) von Herrn Marchaud aufgestellte Proposition 1, derzufolge ein Kontinuum von punkthafter Relativordnung eindimensional ist, ergibt sich, worauf Herr Nöbeling aufmerksam macht, ohne weiteres mit Hilfe der (in [1], a. a. O. Nr. 2,1 Abs. 1 [S. 30]) für den Fall *endlicher* Relativordnung benutzten Überlegungen. Zur Proposition 2 (S. 808) sei noch bemerkt: Ein Kontinuum, welches von endlicher Relativordnung bezüglich eines Büschels, *abgesehen von einer nirgends dichten Menge von Büschelebenen*, ist, braucht nicht lokal zusammenzuhängen. Beispiel: Man betrachte das ebene, nicht lokal zusammenhängende Kontinuum $y = \sin \frac{1}{x}$ 0, $< x \leqq 1$; $-1 \leqq y \leqq 1$, $x = 0$. Dieses Kontinuum ist bezüglich der zur y-Achse parallelen und auf der x, y-Ebene senkrechten Ebenen von endlicher Relativordnung, wenn die Ebene $x = 0$ ausgenommen wird.

1. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, nämlich mit der Betrachtung eines *beschränkten Kontinuums*, dessen Durchschnitt mit der Büschelachse nulldimensional bzw. abzählbar ist.

Zunächst beweisen wir den

1. *Satz: Vor.: Es sei* $\mathfrak{K}$ *ein beschränktes Kontinuum von endlicher Relativordnung bezüglich des Ebenenbüschels B. Ferner sei der Durchschnitt von* $\mathfrak{K}$ *mit der Büschelachse* $\mathfrak{b}$ *nulldimensional.*

Beh.: $\mathfrak{K}$ *ist eine reguläre Kurve im Sinne der topologischen Kurventheorie*[5] *(also insbesondere zusammenhängend im kleinen).*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß zu jedem Punkt P von $\mathfrak{K}$ beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen je nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{K}$ enthalten. Für die Punkte von $\mathfrak{K} - (\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b})$ wurde dies bereits früher bewiesen.[10] Für jeden Punkt P von $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b}$ konstruieren wir die gewünschten Umgebungen wie folgt: P sei in $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b}$ enthalten, $\mathfrak{U}$ sei eine beliebig kleine Umgebung von P. Wir gehen nun aus von einer in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Umgebung $\mathfrak{S}$. Da $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b}$ nulldimensional ist, kann und soll $\mathfrak{S}$ so gewählt werden, daß ihre Begrenzung $\mathfrak{s}$ keinen Punkt von $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b}$ enthält. Somit liegen alle Punkte P' von $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s}$ außerhalb $\mathfrak{b}$, sind also sämtlich regulär, d. h. zu jedem P' gibt es eine beliebig kleine, keinen Punkt von $\mathfrak{b}$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}(P')$, deren Begrenzung nur endlich viele Punkte mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam hat. Und da $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s}$ kompakt und abgeschlossen ist, so kann $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s}$ mit endlich vielen solchen Umgebungen $\mathfrak{U}'$ etwa $\mathfrak{U}'_1, \ldots, \mathfrak{U}'_n$, völlig überdeckt werden. Bildet man nun die Vereinigung $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}'_1, \ldots, \mathfrak{U}'_n$, so ist $\mathfrak{U}^*$ eine beliebig kleine Umgebung von P, deren Begrenzung einen endlichen Durchschnitt mit $\mathfrak{K}$ besitzt. Mithin ist P regulär, wie behauptet.

Zusatz: Jede Punktmenge von endlicher Relativordnung und mit nulldimensionalem Achsendurchschnitt ist höchstens regulär eindimensional.

Mit Hilfe von Satz 1 ergibt sich nunmehr der

2. *Satz: Vor.: Es sei* $\mathfrak{K}$ *ein beschränktes Kontinuum von endlicher Relativordnung bezüglich des Ebenenbüschels B. Ferner sei der Durchschnitt von* $\mathfrak{K}$ *mit der Büschelachse* $\mathfrak{b}$ *höchstens abzählbar.*

Beh.: $\mathfrak{K}$ *ist darstellbar als Bogensumme.*

[10] Siehe [1], a. a. O. Nr. 2,1 Abs. 1 (S. 30).

Bew.: $\mathfrak{K}.\mathfrak{b}$ ist nach Voraussetzung höchstens abzählbar, also nulldimensional. Zufolge Satz 1 ist daher $\mathfrak{K}$ reguläre Kurve im Sinne der topologischen Kurventheorie. Und jetzt folgt die Darstellbarkeit als Bogensumme aus früheren Darlegungen[11] (bei welchen $\mathfrak{K}.\mathfrak{b}$ als leer vorausgesetzt war). In der Tat zeigt die Überprüfung dieser Darlegungen zunächst, daß $\mathfrak{K}$ auch unter den Voraussetzungen unseres Satzes 2 höchstens abzählbar viele Endpunkte besitzt[12], wenn man bedenkt, daß die etwa vorhandenen Kondensationspunkte von Endpunkten von $\mathfrak{K}$ niemals sämtlich auf $\mathfrak{b}$ liegen könnten. Ferner sieht man, daß die weiteren Überlegungen[13] fast wörtlich die gleichen bleiben; man muß nur zu der nirgends dichten Menge $\mathfrak{B}$ aller derjenigen Büschelebenen, auf welchen nicht zu $\mathfrak{K}.\mathfrak{b}$ gehörige Verzweigungspunkte von $\mathfrak{K}$ liegen, jetzt noch die nirgends dichte Menge $\mathfrak{B}'$ aller derjenigen Büschelebenen[14] hinzunehmen, in deren beliebiger Nachbarschaft Büschelebenen existieren, welche zu $\mathfrak{b}$ beliebig benachbarte Punkte aus $\mathfrak{K} - (\mathfrak{K}.\mathfrak{b})$ enthalten. Dann kann man $\mathfrak{K}$ wieder als abgeschlossene Hülle einer Folge von gewissen abgeschlossenen Mengen darstellen, deren jede fremd zu $\mathfrak{b}$ ist, usw.

Zusatz: Wie in der Einleitung bemerkt, braucht man zum Beweise von Satz 2 nicht notwendig Satz 1 heranzuziehen, sondern es genügt die folgende Verallgemeinerung eines von Herrn Rosenthal[15] aufgestellten Satzes:

Satz 1: Vor.: Es sei $\mathfrak{K}$ ein (nicht notwendig beschränktes) Kontinuum von endlicher Relativordnung. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit der Büschelachse $\mathfrak{b}$ sei nulldimensional.*

Beh.: $\mathfrak{K}$ ist zusammenhängend im kleinen.

---

[11] Vgl. [1], a. a. O. Nr. 2,3—2,5.

[12] Vgl. [1], a. a. O. Nr. 2,4.

[13] Vgl. [1], a. a. O. Nr. 2,5.

[14] Vgl. [1], a. a. O. Nr. 1,16.

[15] Satz 1* ist von Herrn Rosenthal ([6], a. a. O. S. 271/72) bewiesen worden, und zwar für den Fall, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit der Büschelachse $\mathfrak{b}$ endlich ist. Sein Beweis gilt aber fast wörtlich auch für den Fall eines nulldimensionalen Durchschnittes $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b}$; man braucht nur im zweiten Teile des Beweises (a. a. O. S. 272 Abs. 1) zu beachten, daß die dort benutzten Kugeloberflächen auch im Falle der Voraussetzungen unseres Satzes 1* stets fremd zu $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b}$ gewählt bzw. durch, zu $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{b}$ fremde, Umgebungsbegrenzungen ersetzt werden können.

Will man nun Satz 2 mit Hilfe von Satz 1* beweisen, so bedarf es nur einer kleinen Umstellung der oben (beim Beweise mittels Satz 1) angegebenen Überlegungen. Man entnimmt zunächst aus Satz 1*, daß $\mathfrak{K}$ stetig durchlaufbar ist, und zeigt sodann,[13] daß $\mathfrak{K}$ darstellbar ist als Vereinigung einer Bogensumme mit einem, kein topologisches Kreisbild enthaltenden (beschränkten) Kontinuum $\mathfrak{C}$. Nun ist $\mathfrak{C}$, weil von endlicher Relativordnung und von höchstens abzählbarem Achsendurchschnitt, wiederum stetig durchlaufbar (Satz 1*), also[16] insbesondere eine reguläre Kurve (und zwar eine Baumkurve). Damit ist der Anschluß an den früheren Beweis von Satz 2 erreicht.

2. Um den Satz 2 von Nr. 1 auf *nicht beschränkte und abgeschlossene* Mengen (mit höchstens abzählbarem Achsendurchschnitt) auszudehnen, bemerken wir folgendes:

a) *Vor.: Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine abgeschlossene Menge von höchstens abzählbarer Relativordnung bezüglich eines Ebenenbüschels B. Mit der Büschelachse* $\mathfrak{b}$ *habe* $\mathfrak{A}$ *höchstens abzählbar viele Punkte gemeinsam.*

Beh.: $\mathfrak{A}$ *besitzt höchstens abzählbar viele „mehrpunktige“ (d. h. mehr als einen Punkt enthaltende) Komponenten.*

Bew.: Indirekt. Angenommen, es besitze $\mathfrak{A}$ überabzählbar viele mehrpunktige Komponenten. Da nun der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ mit der Büschelachse $\mathfrak{b}$ höchstens abzählbar ist, so können höchstens abzählbar viele unter den betrachteten (paarweise fremden) Komponenten Punkte mit $\mathfrak{b}$ gemeinsam haben. Unter unserer Annahme gibt es also überabzählbar viele, zur Achse fremde, mehrpunktige Komponenten $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ ist jede von diesen $\mathfrak{F}$ ein (achsenfremdes) Kontinuum. Damit kommen wir aber in Widerspruch mit der Voraussetzung höchstens abzählbarer Relativordnung von $\mathfrak{A}$. Wenn nämlich die Menge der $\mathfrak{F}$ überabzählbar ist, so gibt es eine reelle, positive Zahl η, von folgender Eigenschaft: Es existieren überabzählbar viele $\mathfrak{F}$, welche nicht ganz in einem geeignet gewählten Büschelkeil vom Winkel η enthalten sind.[17] Wählen wir

[16] Menger, K., Über reguläre Baumkurven, Math. Ann. 96 (1926/27) S. 573.

also die natürliche Zahl $n \geqq 2$ so, daß $\frac{\pi}{n} < \eta$ ist, und betrachten wir n verschiedene Büschelebenen $E_1, \ldots, E_n$, so daß der kleinste, von E_ν und $E_{\nu+1}$ gebildete Winkel gleich $\frac{\pi}{n}$ ist ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $E_{n+1} = E_1$), so muß mindestens eine der E_ν, etwa E_τ, mit überabzählbar vielen verschiedenen der Kontinuen $\mathfrak{F}$ Punkte gemeinsam haben. Diese Punkte müssen, da die $\mathfrak{F}$ paarweise fremd sind, sämtlich verschieden sein. Und damit haben wir den angekündigten Widerspruch vor uns.

b) *Es sei* $\mathfrak{S}$ *eine Bogensumme; ferner sei* P *irgendein Punkt des Raumes und* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(P)$ *eine Umgebung von* P. *Dann ist* $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}$ *entweder leer oder ebenfalls Bogensumme.*

Bew.: Ist $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}$ nicht leer und ist Q irgendein Punkt von $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}$, so gehört eine Umgebung von Q auch zu $\mathfrak{U}$. Da nun Q in $\mathfrak{S}$ Endpunkt von einfachen Bogen bzw. innerer Punkt eines einfachen Bogens ist, so auch in $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}$. Da es höchstens abzählbar viele solche einfache Bogen in $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}$ gibt, folgt die Behauptung.

c) *Vor.: Es sei* $\mathfrak{S}$ *der Limes einer aufsteigenden Folge von Bogensummen* $\mathfrak{S}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). *Und zwar soll zu jedem Punkte* P *von* $\mathfrak{S}$ *ein Index* $N = N(P)$ *und eine Umgebung* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(P; N)$ *gehören, so daß* $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}_\nu$ *für* $\nu \geqq N(P)$.

Beh.: $\mathfrak{S}$ *ist Bogensumme.*

Bew.: Da $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}_N = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{S}$ Bogensumme ist (vgl. b), so läßt sich jedem Punkte P von $\mathfrak{S}$ (mindestens) ein mit ihm inzidierender abgeschlossener Bogen zuordnen, übrigens derart, daß verschiedene Bogen höchstens Endpunkte gemeinsam haben. Da überdies jeder solche Bogen ganz zu einem $\mathfrak{S}_\nu$ gehört, so gibt es höchstens abzählbar viele solche Teilbogen, w. z. b. w.

3. Nunmehr ergibt sich der

Satz: Vor.: Es sei $\mathfrak{A}$ *eine abgeschlossene Menge von endlicher Relativordnung bezüglich eines Büschels* B. *Der Durchschnitt von* $\mathfrak{A}$ *mit der Büschelachse* $\mathfrak{b}$ *sei höchstens abzählbar.*

---

[17] Unter einem „Büschelkeil vom Winkel η" verstehen wir die Menge der Punkte im Innern eines Winkels von der Größe η; dabei soll der Winkel gebildet sein von zwei durch die Büschelachse begrenzten Halbebenen des Bezugsbüschels.

Beh.: $\mathfrak{A}$ *ist darstellbar als Vereinigung der Menge ihrer einpunktigen Komponenten mit einer Bogensumme.*

Bew.: Zufolge Nr. 2a besitzt $\mathfrak{A}$ höchstens abzählbar viele mehrpunktige Komponenten, die wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ Kontinua sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können und werden wir daher $\mathfrak{A}$ *als Kontinuum voraussetzen.* Ist dann $\mathfrak{A}$ beschränkt, so folgt unsere Behauptung aus Nr. 1, Satz 2. Ist $\mathfrak{A}$ nicht beschränkt, so stelle man $\mathfrak{A}$ dar als Limes der aufsteigenden Folge $\mathfrak{D}_v = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{K}_v$ ($v = 1, 2, \ldots$), wobei die $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ... unbegrenzt viele konzentrische abgeschlossene Kugeln mit unbeschränkt wachsenden Radien bedeuten. Für die einzelnen $\mathfrak{D}_v$ ist die Behauptung dann richtig, wie soeben gezeigt. Nun ist aber ein Punkt P von $\mathfrak{A}$ einpunktige Komponente fast aller $\mathfrak{D}_v$ dann und nur dann, falls er einpunktige Komponente von $\mathfrak{A}$ ist. In der Tat: Ist P einpunktige Komponente von $\mathfrak{A}$, dann ist *jede* mehrpunktige, abgeschlossene, P enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{A}$ nicht zusammenhängend, also insbesondere jede solche in einem der $\mathfrak{D}_v$ enthaltene abgeschlossene Menge; mithin ist P einpunktige Komponente fast aller $\mathfrak{D}_v$. Ist umgekehrt P einpunktige Komponente fast aller $\mathfrak{D}_v$ und wäre P in einer mehrpunktigen Komponente $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{A}$ enthalten, so gehörte $\mathfrak{Q}$ nicht ganz zu einem der $\mathfrak{D}_v$. Somit hätte für fast alle v eine, P enthaltende, Komponente von $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{D}_v$ mit der Begrenzung von $\mathfrak{K}_v$ Punkte gemeinsam,[18] so daß P nicht einpunktige Komponente von $\mathfrak{D}_v$ sein könnte. — Beachtet man dies und zieht man Nr. 2c heran, so ergibt sich der zu beweisende Satz als richtig auch für *unbeschränkte* Kontinua bzw. abgeschlossene Mengen bei (höchstens) abzählbarem Durchschnitt mit der Büschelachse.

[18] Vgl. z. B. Rosenthal, [6], a. a. O. S. 270, Hilfssatz.