Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1932. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1932

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Die Theorie der zweiten Variation beim Problem von Lagrange.

Von C. Carathéodory.

Vorgetragen in der Sitzung vom 2. Juli 1932.

1. Einleitung. Seit den grundlegenden Arbeiten von A. Clebsch[1] und von G. v. Escherich[2] ist die Theorie der zweiten Variation beim Problem von Lagrange außerordentlich vereinfacht worden. Eine wesentliche Lücke blieb aber immer noch auszufüllen, weil sämtliche Autoren, die sich bisher mit dieser Frage beschäftigt haben, die betreffenden Sätze nur unter Vorsichtsmaßregeln gewonnen haben, durch welche der berühmte Ausnahmefall, den v. Escherich entdeckt hat, ausgeschlossen wurde. Es ist aber unerläßlich, auch diese Singularität zu berücksichtigen, wenn man eine einigermaßen in sich geschlossene Theorie zu entwickeln wünscht. Tritt doch der Ausnahmefall von Escherich schon bei recht einfachen Problemen auf, wie z. B. bei den Mayerschen Variationsproblemen, bei den gewöhnlichen Variationsproblemen mit höheren Ableitungen, oder sogar beim Problem der geodätischen Linien, wenn man diese beiden letzten Probleme als spezielle Lagrangesche Probleme ansetzen will.

Nun zeigt sich, daß man ohne große Mühe die Theorie der konjugierten Punkte sowie die Verallgemeinerung der Sturmschen Oszillationstheoreme ganz allgemein für Lagrangesche Variationsprobleme gewinnen kann, und daß die Scheu, mit der man bisher dem v. Escherichschen Ausnahmefall aus dem Wege gegangen ist, nicht gerechtfertigt war. Dies folgt leicht aus den Resultaten einer Arbeit, die Herr J. Radon vor einigen Jahren unserer Akademie vorgelegt hat[3], wenn man noch die Einteilung

---

[1] A. Clebsch, Über die Reduktion der zweiten Variation auf ihre einfachste Form (Crelle, Bd. 55, 1858, S. 254).

[2] G. v. Escherich, Die zweite Variation der einfachen Intregale (Wiener Sitzungsber. Mathem.-Naturw. Klasse 107, 108, 110 [1898, 1899, 1901]).

[3] J. Radon, Über die Oscillationstheoreme der konjugierten Punkte beim Problem von Lagrange. Münchener Sitzungsber. Mathem.-Naturw. Abt. 1927, S. 243—257.

der Extremalen der Lagrangeschen Variationsprobleme in verschiedenen Klassen beachtet, die ich kürzlich angegeben habe.[4]

Diese Einteilung gewinnt man folgendermaßen: sind

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \dot{x}_i = b_{ki}(t)\, x_k + c_{ik}(t)\, y_k \\ \dot{y}_i = -a_{ik}(t)\, x_k - b_{ik}(t)\, y_k \end{cases} \quad (i, k = 1, \ldots, n)$$

die kanonischen Differentialgleichungen des akzessorischen Problems, das einer Extremalen e^0 eines Lagrangeschen Variationsproblems zugeordnet ist, so sagen wir, daß e^0 von der Klasse q ist, wenn die Differentialgleichungen

$$\text{(1.2)} \qquad \dot{y}_i = -b_{ik}(t)\, y_k$$

q linear unabhängige Lösungssysteme besitzen, welche noch die n Gleichungen

$$\text{(1.3)} \qquad c_{ik}(t)\, y_k = 0$$

identisch befriedigen.

Selbstverständlich muß man noch voraussetzen, daß längs der Extremalen e^0 die Legendresche (oder, wie man zuweilen sagt, die Clebschsche) Bedingung erfüllt ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die quadratische Form $c_{ji}\, y_i\, y_j$ positiv semidefinit ist, d. h. wenn die Gleichung in σ

$$\text{(1.4)} \qquad \left| c_{ij} - \delta_{ij}\sigma \right| = 0$$

keine negativen Wurzeln besitzt. Bezeichnet man mit p die Anzahl der verschwindenden Wurzeln von (1.4), oder, was dasselbe ist, mit $(n - p)$ den Rang der Matrix (c_{ij}), so besteht zwischen der Klasse q und der Zahl p immer die Relation

$$\text{(1.5)} \qquad 0 \leqq q \leqq p.$$

2. Normierung der Basis einer feldartigen Schar von Extremalen.

Wir ordnen einem beliebig gewählten Punkt t_0 der t-Achse $2n$ Partikularlösungen

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} x_i = \xi_{ij}(t), \quad y_i = \eta_{ij}(t) \\ x_i = \bar{\xi}_{ij}(t), \quad y_i = \bar{\eta}_{ij}(t) \\ \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

[4] C. Carathéodory, Über die Einteilung der Lagrangeschen Variationsprobleme nach Klassen: Commentar. Mathem. Helvet. Vol. **5** p. 1—19 (1932).

der Differentialgleichungen (1. 1) zu, die durch ihre Anfangswerte für $t = t_0$

$$(2.\ 2) \qquad \begin{cases} \xi_{ij}(t_0) = 0, & \eta_{ij}(t_0) = \delta_{ij} \\ \bar{\xi}_{ij}(t_0) = \delta_{ij}, & \bar{\eta}_{ij}(t_0) = 0 \end{cases}$$

eindeutig festgelegt sind; hierbei bedeutet δ_{ij} das bekannte Kroneckersche Symbol. Jede weitere Lösung der Differentialgleichungen (1. 1) kann dann als lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten der Partikularlösungen (2. 1) dargestellt werden.

Nun betrachten wir eine lineare n-dimensionale, feldartige Schar, die aus Extremalen von (1. 1) besteht. Als Basis dieser Schar wählen wir n Lösungen von (1. 1), die wir mit Benutzung von (2. 1) folgendermaßen schreiben:

$$(2.\ 3) \qquad \begin{cases} X_{ij}(t) = A_{jk}\,\xi_{ik}(t) + B_{jk}\,\bar{\xi}_{ik}(t) \\ Y_{ij}(t) = A_{jk}\,\eta_{ik}(t) + B_{jk}\,\bar{\eta}_{ik}(t) \\ (i, j, k = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Für $t = t_0$ haben wir dann nach (2. 2) die Anfangswerte

$$(2.\ 4) \qquad X_{ij}(t_0) = B_{ji}, \quad Y_{ij}(t_0) = A_{ji}.$$

Die n Lösungen (2. 3) müssen nun, dafür, daß sie die Basis einer feldartigen Schar darstellen, erstens linear unabhängig und zweitens paarweise konjugiert sein. Die erste dieser Bedingungen ist nach (2. 4) dann und nur dann erfüllt, wenn der Rang der Matrix

$$(2.\ 5) \qquad (A_{ji},\ B_{jk}),$$

die aus n Zeilen und $2n$ Kolonnen besteht, gleich n ist.

Die zweite Bedingung wird bekanntlich durch das Bestehen der $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Gleichungen

$$(2.6) \qquad A_{ik}\,B_{jk} - A_{jk}\,B_{ik} = 0$$

ausgedrückt, die, wie man leicht sieht, bei Änderung der Basis unserer Schar in Bedingungen derselben Gestalt übergeführt werden.

3. Unser Ziel ist die Basis (2. 3) unserer feldartigen Extremalenschar durch eine andere zu ersetzen, bei welcher die Matrix (2. 5) möglichst einfach ist. Die Operationen, denen die Matrix (2. 5) bei solchen Änderungen der Basis (2. 3) unterworfen wird, können alle erhalten werden, indem man eine der Zeilen der Matrix mit einer von Null verschiedenen Konstante multipliziert und ihr eine lineare Kombination der übrigen Zeilen hinzufügt. Wir haben schon bemerkt, daß die Bedingungen (2. 6) auch nach Ausführung derartiger Operationen erhalten bleiben.

Wir bezeichnen mit $(n-r)$ den Rang der Determinante

$$\begin{vmatrix} B_{11}, \ldots, B_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ B_{n1}, \ldots, B_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3. 1}$$

Falls $r < n$ ist, können wir dann immer die Numerierung der Indizes der Variablenpaare (x_i, y_i) sowie die Reihenfolge, in welcher die Gleichungen (2. 3) geschrieben sind, so wählen, daß die Relation

$$|B_{\varkappa\lambda}| \neq 0 \qquad (\varkappa, \lambda = (r+1), \ldots, n) \tag{3. 2}$$

erfüllt ist. Man kann demnach die $(n-r)$ letzten Zeilen der Matrix (2. 5) mit Hilfe von Transformationen, der Art, wie wir sie besprochen haben, auf die Gestalt

$$(A'_{\varkappa k}, B'_{\varkappa\gamma}, \delta_{\varkappa\lambda}) \tag{3. 3}$$
$$(k = 1, \ldots n;\ \gamma = 1, \ldots r;\ \varkappa, \lambda = (r+1), \ldots, n)$$

bringen. Da ferner nach Voraussetzung der Rang von (3. 1) gleich $(n-r)$ ist, so kann man durch lineare Kombination der Zeilen der Matrix (3. 3) mit den r ersten Zeilen von (2. 5) in diesen die B_{jk} zum Verschwinden bringen, und schließlich die Matrix (2. 5) auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A'_{\alpha\beta}, & A'_{\alpha\mu}, & 0, & 0 \\ A'_{\varkappa\beta}, & A'_{\varkappa\mu}, & B'_{\varkappa\gamma}, & \delta_{\varkappa\lambda} \end{pmatrix} \tag{3. 4}$$
$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots r;\ \varkappa, \lambda, \mu = (r+1), \ldots n)$$

zurückführen.

Da nun die Matrix (3. 4) den Rang n haben soll, muß die Matrix

$$(A'_{\alpha\beta}, A'_{\alpha\mu}) \tag{3. 5}$$

den Rang r haben. Nun bemerke man, daß die Bedingungen (2. 6) für die Elemente von (3. 4) erhalten bleiben, und daher die Gleichungen

$$(A'_{\alpha\beta} B'_{\varkappa\beta} + A'_{\alpha\varkappa}) = 0 \tag{3.6}$$

alle bestehen müssen. Der Rang von (3. 5) kann demnach nur dann gleich r sein, wenn die Determinante

$$|A'_{\alpha\beta}| \neq 0 \tag{3.7}$$

ist. Jetzt kann man die Matrix (3. 4) durch ganz ähnliche Operationen, wie oben, auf die Form bringen

$$\begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}, & A''_{\alpha\mu}, & 0, & 0 \\ 0, & A''_{\varkappa\mu}, & B'_{\varkappa\gamma}, & \delta_{\varkappa\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots r;\ \varkappa, \lambda, \mu = (r+1), \ldots n)$$

und die Gleichungen (2. 6) haben dann die Gestalt

$$A''_{\alpha\varkappa} = -B'_{\varkappa\alpha},\quad A''_{\varkappa\mu} = A''_{\mu\varkappa}.$$

Wir können also ganz allgemein folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. Als Basis einer n-dimensionalen feldartigen Extremalenschar kann man immer ein System von Lösungen der Differentialgleichungen (1. 1) wählen, die folgende Gestalt haben:

$$\left\{ \begin{aligned} X_{i\alpha} &= \xi_{i\alpha} + A_{\alpha\mu}\xi_{i\mu} \\ X_{i\varkappa} &= \qquad A_{\varkappa\mu}\xi_{i\mu} - A_{\gamma\varkappa}\xi_{i\gamma} + \xi_{i\varkappa} \\ Y_{i\alpha} &= \eta_{i\alpha} + A_{\alpha\mu}\eta_{i\mu} \\ Y_{i\varkappa} &= \qquad A_{\varkappa\mu}\eta_{i\mu} - A_{\gamma\varkappa}\eta_{i\gamma} + \eta_{i\varkappa} \\ A_{\varkappa\mu} &= A_{\mu\varkappa} \end{aligned} \right. \tag{3.9}$$

$$(\alpha, \gamma = 1, \ldots r;\ \varkappa, \mu = (r+1), \ldots, n).$$

Hierbei bedeutet r eine gewisse natürliche Zahl zwischen Null und n; im Falle $r = 0$ wird die Basis durch die $(X_{i\varkappa}, Y_{i\varkappa})$ allein, im Falle $r = n$ aber durch die $(X_{i\alpha}, Y_{i\alpha})$ allein dargestellt. Umgekehrt verifiziert man sofort, daß jedes System von Lösungen (3. 9) eine Basis einer n-dimensionalen feldartigen Schar darstellt.

4. Eine allgemeine Extremale der betrachteten feldartigen Schar erhält man durch lineare Kombination der Lösungen (3. 9); ihre Gleichungen haben also die Gestalt

$$\left\{ \begin{aligned} x_i &= \rho_\alpha X_{i\alpha} + \rho_\varkappa X_{i\varkappa} \\ y_i &= \rho_\alpha Y_{i\alpha} + \rho_\varkappa Y_{i\varkappa}. \end{aligned} \right. \tag{4.1}$$

Für $t = t_0$ lauten die Anfangswerte dieser Extremalen nach (2. 2) und (3. 9)

$$
(4.\ 2) \qquad \begin{cases} x_i{}^0 = \rho_\varkappa(-A_{\gamma\varkappa}\,\delta_{i\gamma} + \delta_{i\varkappa}) \\ y_i{}^0 = \rho_\alpha(\delta_{i\alpha} + A_{\alpha\mu}\,\delta_{i\mu}) + \rho_\varkappa A_{\varkappa\mu}\,\delta_{i\mu}. \end{cases}
$$

Setzt man in diese letzten Gleichungen nacheinander für i einen Wert β zwischen 1 und r und einen Wert λ zwischen $(r + 1)$ und n, so erhält man

$$
(4.\ 3) \qquad \begin{cases} x_\beta{}^0 = -A_{\beta\varkappa}\,\rho_\varkappa, & y_\beta{}^0 = \rho_\beta \\ x_\lambda{}^0 = \rho_\lambda, & y_\lambda{}^0 = A_{\alpha\lambda}\,\rho_\alpha + A_{\lambda\varkappa}\,\rho_\varkappa. \end{cases}
$$

Die feldartige Extremalenschar schneidet also, wie es sein soll, auf der n-dimensionalen Ebene $t = t_0$ ein $(n - r)$-dimensionales lineares Gebilde aus, das von den $(n - r)$ Parametern ρ_λ abhängt.

Viel wichtiger für das Folgende ist aber, daß der Ausdruck

$$
(4.\ 4) \qquad x_i{}^0 y_i{}^0 = x_\beta{}^0 y_\beta{}^0 + x_\lambda{}^0 y_\lambda{}^0 = A_{\lambda\varkappa}\,\rho_\varkappa\,\rho_\lambda
$$

eine Funktion der $x^0{}_i$ allein ist.

Aus (4. 3) und (4. 4) folgt nämlich

$$
(4.\ 5) \qquad x_i{}^0 y_i{}^0 = A_{\lambda\mu}\, x_\lambda{}^0\, x_\mu{}^0,
$$

und diese Relation stellt eine Tatsache dar, die wir nur dadurch so leicht beweisen konnten, daß wir die Basis unseres feldartigen Gebildes normiert haben.

Ebenfalls erlaubt die Darstellung (3. 9) der Basis eines feldartigen Gebildes ohne weiteres folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2. Eine Extremale, die zu allen Extremalen der Basis eines feldartigen Gebildes konjugiert ist, muß selbst dem feldartigen Gebilde angehören.

Ist nämlich die Extremale

$$
x_i = a_\beta\,\xi_{i\beta} + a_\mu\,\xi_{i\mu} + b_\gamma\,\bar{\xi}_{i\gamma} + b_\lambda\,\xi_{i\lambda}
$$

zu allen Extremalen (3. 9) konjugiert, so gilt dasselbe von der Extremalen

$$
(4.\ 6) \qquad (x_i - a_\beta X_{i\beta} - b_\lambda X_{i\lambda}) = a'_\mu\,\xi_{i\mu} + b'_\gamma\,\xi_{i\gamma},
$$

und man berechnet sofort, indem man die Bedingung (2. 6) für die Extremalenpaare (3. 9) und (4. 6) aufschreibt, daß alle Gleichungen

$$
a'_\mu = 0, \quad b'_\gamma = 0
$$

erfüllt sein müssen.

5. Ein Hilfssatz. Jede Lösung $x(t)$, $y(t)$ des Gleichungssystems (1. 1) kann als Extremale eines Variationsproblems angesehen werden, dessen Hamiltonsche Funktion H der Gleichung

$$(5.1) \qquad 2H = a_{ij}(t)\, x_i\, x_j + 2\, b_{ij}(t)\, x_i\, y_j + c_{ij}(t)\, y_i\, y_j$$

genügt. Das Integral

$$(5.2) \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} (-H + y_i \dot{x}_i)\, dt$$

des Variationsproblems längs einer solchen Extremale kann bekanntlich leicht ausgewertet werden. Da nämlich H eine quadratische Form in (x_i, y_i) ist, hat man längs einer solchen Extremalen

$$(5.3) \qquad 2H = x_i H_{x_i} + y_i H_{y_i} = -x_i \dot{y}_i + y_i \dot{x}_i$$

und daher

$$(5.4) \qquad -H + y_i \dot{x}_i = \frac{1}{2}(y_i \dot{x}_i + x_i \dot{y}_i).$$

Setzt man diesen Wert in (5. 2), so erhält man

$$(5.5) \qquad J = \frac{1}{2}\left(x_i^{(1)} y_i^{(1)} - x_i^{(0)} y_i^{(0)}\right).$$

Wir nehmen nun an, daß die zu untersuchende Extremale dem oben betrachteten feldartigen Gebilde angehört, und daß sie im Punkte $t = t_1$ die t-Achse schneidet, so daß alle $x_i^{(1)}$ gleich Null sind. Dann folgt aus der Vergleichung von (5. 5) mit (4. 5) die Relation

$$(5.6) \qquad J + \frac{1}{2} A_{\lambda\mu}\, x_\lambda^0\, x_\mu^0 = 0.$$

6. Nun betrachten wir die eindeutig bestimmte Lösung $S(t, x)$ der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$(6.1) \qquad S_t + H\left(t, x_i, S_{x_i}\right) = 0,$$

die für $t = t_0$ den Anfangsbedingungen

$$(6.2) \qquad \begin{cases} S(t^0, x_i) = \frac{1}{2} A_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda \\ (i = 1, \ldots, n;\ \varkappa, \lambda = (r+1), \ldots, n) \end{cases}$$

genügt. Es gibt eine Umgebung

$$(6.3) \qquad |t - t^0| < \varepsilon, \quad |x_i| < \varepsilon$$

des Punktes t_0 auf der t-Achse, in welcher die konstruierte Lösung $S(t, x_i)$ regulär ist. Für jede Kurve γ, die einen Punkt (t_0, x_i^0) mit einem Punkt $(t_1, x_i^{(1)} = 0)$ der t-Achse verbindet, innerhalb des ein für allemal gewählten Gebietes (6. 3) verläuft, und die außerdem, nach Angabe von geeigneten Funktionen $\varphi_j(t)$, als Lösung der Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = H_{y_i}(t, x_i, \varphi_j(t)) \tag{6. 4}$$

dargestellt werden kann, hat das Integral (5. 2) des Variationsproblems einen Wert J, für welchen

$$J + \frac{1}{2} A_{\varkappa\lambda} x_\varkappa^0 x_\lambda^0 < 0 \tag{6. 5}$$

ist, falls nicht γ mit der t-Achse zusammenfällt. Dieses wohlbekannte Resultat ist eine Folge der üblichen Sätze aus der Variationsrechnung, bei denen man wesentlich benutzt, daß die quadratische Form $c_{ij} y_i y_j$ positiv semidefinit ist.[5]

Die Vergleichung von (6. 5) mit (5. 6) liefert nun unmittelbar den

Satz 3. Zu jeder gegebenen feldartigen Schar (4. 1) kann man auf der t-Achse ein Intervall δ zuordnen, das den Punkt t_0 in seinem Inneren enthält, von der Eigenschaft, daß keine Extremale der feldartigen Schar (4. 1), die nicht mit der t-Achse selbst zusammenfällt, einen von t_0 verschiedenen, im Inneren von δ liegenden Schnittpunkt mit der t-Achse besitzt.

7. Der Satz von Radon. Wir sind jetzt imstande, einen Satz zu beweisen, den v. Escherich zwar ausgesprochen, der aber zuerst von Radon in der oben erwähnten Abhandlung einwandfrei bewiesen worden ist. Wir betrachten die Determinante

$$\Delta(t) = |X_{ij}|, \tag{7. 1}$$

deren Elemente X_{ij} die Basis einer feldartigen Extremalenschar (3. 9) darstellen. Der Satz, um den es sich handelt, lautet:

Satz 4. Ist die Klasse des vorgelegten Problems gleich Null, so ist in einer gewissen Umgebung von t_0 immer

$$\Delta(t) \neq 0, \tag{7. 2}$$

außer vielleicht im Punkte t_0 selbst.

---

[5] Für den Beweis dieser Tatsache siehe z. B. C. Carathéodory, Die Methoden der geodätischen Äquidistanten und das Problem von Lagrange. Acta Mathem. **47** (1925) p. 199—235. Insbes. p. 215 u. 220.

Würde es nämlich einen Punkt t_1 geben, für welchen

$$\Delta(t_1) = 0 \tag{7.3}$$

ist, so könnte man Parameter ρ_j bestimmen, die nicht alle verschwinden, und für welche alle

$$x_i = \rho_\alpha X_{i\alpha}(t_1) + \rho_\varkappa X_{i\varkappa}(t_1) = 0 \tag{7.4}$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

wären. Würde nun der Punkt t_1 im Inneren des Intervalls δ fallen, dessen Existenz im Satze 3 des § 7 bewiesen worden ist, so hätte man nach diesem Satze

$$\rho_\alpha X_{i\alpha}(t) + \rho_\varkappa X_{i\varkappa}(t) \equiv 0. \tag{7.5}$$

Nun soll aber unser Problem von der Klasse Null sein, und es folgt hieraus, daß auch

$$\rho_\alpha Y_{i\alpha}(t) + \rho_\varkappa Y_{i\varkappa}(t) \equiv 0 \tag{7.6}$$

ist, denn sonst würden die Gleichungen (1. 2) mindestens eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzen, für welche die Bedingungen (1. 3) erfüllt wären. Setzen wir nun in (7. 5) und (7. 6) die Größe $t = t_0$, so folgt aus (4. 3), daß, entgegen der Voraussetzung, alle ρ_j verschwinden müssen, womit der Satz von Radon bewiesen ist.

Verfolgt man nun die Werte der Determinante $\Delta(t)$ längs der ganzen Extremalen e^0, so besagt unser Satz 4, daß die Punkte, in welchen $\Delta(t) = 0$ ist, und die man die Brennpunkte des betrachteten feldartigen Gebildes nennt, immer isoliert sein müssen, falls die Klasse des Problems gleich Null ist.

8. Transformation der kanonischen Gleichungen.

Wir haben dem Beweise des Satzes von Radon eine Wendung gegeben, aus der man vermuten kann, daß die Übertragung dieses Satzes auf Probleme von nicht verschwindender Klasse keine großen Schwierigkeiten machen wird. Um die hier eintretenden neuen Verhältnisse vollständig zu übersehen, ist es aber bequem, die kanonischen Gleichungen (1. 1) noch in geeigneter Weise zu vereinfachen.

Zu diesem Zweck führen wir neue Koordinaten x'_j durch die Gleichungen

$$x_i = \varphi_{ij}(t)\, x'_j \tag{8.1}$$

ein; wir erhalten dann eine erweiterte Punkttransformation, die die Differentialgleichungen (1. 1) wieder in kanonische Differentialgleichungen der Gestalt

$$\dot{x}'_j = H'_{y'_j} \qquad \dot{y}'_j = -H'_{x'_j} \tag{8. 2}$$

transformiert, wenn wir nur die y'_j und H' so wählen, daß die Relation

$$-H'(t, x'_j, y'_j)\, dt + y'_j\, dx'_j = -H(t, x_i, y_i)\, dt + y_i\, dx_i \tag{8. 3}$$

erfüllt wird. Dies führt zu den Gleichungen

$$y'_j = \varphi_{ij}(t)\, y_i \tag{8. 4}$$

und

$$H' = H - \dot{\varphi}_{ij}(t)\, x'_j y_i,$$

von denen die letzte auch geschrieben werden kann:

$$2H' = a_{ij}\, x_i\, x_j + c_{ij}\, y_i\, y_j + 2(b_{ik}\, \varphi_{ij} - \dot{\varphi}_{kj})\, x'_j\, y_k. \tag{8. 5}$$

Bestimmen wir also die $\varphi_{ij}(t)$ als Lösungen der linearen Differentialgleichungen

$$\dot{\varphi}_{kj} = b_{ik}\, \varphi_{ij} \tag{8. 6}$$

mit der Bedingung, daß für $t = t_0$ (und dann auch für jedes t) die Determinante

$$|\varphi_{ij}(t)| \neq 0 \tag{8. 7}$$

sei, so erhält H' die Form

$$2H' = a'_{kl}\, x'_k\, x'_l + c'_{kl}\, y'_k\, y'_l. \tag{8. 8}$$

Hierbei hat man zu setzen

$$a'_{kl} = a_{ij}\, \varphi_{ik}\, \varphi_{jl} \tag{8. 9}$$

$$c'_{kl}\, \varphi_{ik}\, \varphi_{jl} = c_{ij}. \tag{8. 10}$$

9. Nun bleibt selbstverständlich die Klasse des Problems bei der nirgends ausgearteten Transformation des vorigen Paragraphen erhalten. Nach den Ausführungen des § 1 muß es also q voneinander unabhängige Lösungssysteme der Differentialgleichungen

$$\dot{y}'_i = 0 \tag{9. 1}$$

geben, für welche die Gleichungen

$$c'_{ij} y_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{9.2}$$

identisch erfüllt sind. Es gibt daher q voneinander unabhängige lineare Kombinationen der Zeilen der Matrix (c'_{ij}) mit konstanten Koeffizienten, die identisch verschwinden. Man kann deshalb nach (8. 10) die Anfangswerte $\varphi_{ij}(t_0)$ so wählen, daß die Elemente in den q letzten Zeilen (und wegen der Symmetrie auch in den letzten q-Kolonnen) der Matrix (c'_{ij}) identisch verschwinden.

10. Der Einbettungssatz. Wir können und wollen uns also auf solche Lagrangesche Variationsprobleme von der Klasse q beschränken, für welche in der Hamiltonschen Funktion (5. 1) alle c_{ij} verschwinden und außerdem die Relationen

$$H_{y_j} \equiv 0 \qquad (j = (n - q + 1), \ldots, n) \tag{10.1}$$

befriedigt sind. Wir führen nun folgende Bezeichnung ein: Indizes, die von 1 bis $(n - q)$ laufen, sollen mit i', j', ... bezeichnet werden, Indizes dagegen, die von $(n - q + 1)$ bis n laufen, mit i'', j'', ... Setzt man demnach

$$2\,H^* = a_{i'j'}\, x_{i'}\, x_{j'} + c_{i'j'}\, y_{i'}\, y_{j'}, \tag{10.2}$$

so hat man

$$2\,H = 2\,H^* + 2\,a_{i'j''}\, x_{i'}\, x_{j''} + a_{i''j''}\, x_{i''}\, x_{j''}. \tag{10.3}$$

Die Funktion $2\,H^*$ ist die Hamiltonsche Funktion eines quadratischen Variationsproblems im $(n - q + 1)$ dimensionalen Raume der $(t, x_{i'})$, dessen Klasse gleich Null ist und das wir ein zugeordnetes reduziertes Variationsproblem nennen wollen.

Die kanonischen Differentialgleichungen für die Extremalen des gegebenen Problems lauten dann nach (10. 3)

$$\dot{x}_{i'} = H^*_{y_{i'}}, \qquad \dot{y}_{i'} = -H^*_{x_{i'}} - a_{i'j''}\, x_{j''} \tag{10.4}$$

$$\dot{x}_{i''} = 0, \qquad \dot{y}_{i''} = -a_{i''j'}\, x_{j'} - a_{i''j''}\, x_{j''}. \tag{10.5}$$

Die Gleichungen (10. 5) zeigen, daß für alle Extremalen die Koordinaten $x_{i''}$ konstant sind, und die Gleichungen (10. 4), daß alle Extremalen, für welche die $x_{i''} = 0$ sind, sich auf den Raum der (t, x'_i) als Extremalen des reduzierten Variationsproblems mit der Hamiltonschen Funktion H^* projizieren.

Da nun das reduzierte Problem von der Klasse Null ist, sind außerdem für alle Extremalen, für welche

$$(10.6) \qquad x_{i'} \equiv 0, \quad x_{i''} \equiv 0$$

sind, auch

$$(10.7) \qquad y_{i'} \equiv 0, \quad y_{i''} = \text{const.}$$

Diese letzten Extremalen sollen, falls nicht alle $y_{i''}$ verschwinden, die singulären Extremalen des Problems genannt werden.

Wir führen jetzt die Bezeichnungen des § 2 wieder ein und bemerken, indem wir die Relationen (2. 2) beachten, daß erstens die Extremalen $(\xi_{ij''}, \eta_{ij''})$ singuläre Extremalen sind, und daß wir zweitens schreiben können

$$(10.8) \qquad \xi_{i'j'} = \xi^*_{i'j'}, \quad \eta_{i'j'} = \eta^*_{i'j'},$$

$$(10.9) \qquad \bar{\xi}_{i'j'} = \bar{\xi}^*_{i'j'}, \quad \bar{\eta}_{i'j'} = \bar{\eta}^*_{i'j'},$$

wobei die Funktionen auf den rechten Seiten der letzten Gleichungen zum reduzierten Problem gehören sollen.

11. Wir betrachten eine beliebige Basis einer n-dimensionalen feldartigen Schar von Extremalen des Problems. Nach dem § 2 wird diese Basis durch eine Matrix

$$(11.1) \qquad (A_{jk'}, B_{jk'}, A_{jk''}, B_{jk''})$$

bestimmt, deren Elemente den Bedingungen

$$(11.2) \qquad (A_{ik'} B_{jk'} - A_{jk'} A_{ik'}) + (A_{ik''} B_{jk''} - A_{jk''} B_{ik''}) = 0$$

genügen sollen.

Nun bemerke man, daß, wenn unter den Extremalen einer Basis unserer feldartigen Schar eine oder mehrere singuläre Extremalen auftreten, diese einfach weggestrichen werden können, ohne irgendeine Veränderung der Figur im Raume der (t, x_i) hervorzurufen, da für singuläre Extremalen nur höchstens Koordinaten $y_{i''}$ von Null verschieden sind. Unser Ziel ist zu zeigen, daß wir immer nach einer solchen Entfernung von singulären Extremalen die vorliegende Basis vervollständigen können, und zwar derart, daß die durch die erweiterte Basis erzeugte feldartige Extremalenschar keine singulären Extremalen mehr enthält.

Wir betrachten zunächst die Matrix

$$(11.3) \qquad (B_{jk''}),$$

die aus n Zeilen und q Kolonnen besteht, und bezeichnen mit s ihren Rang. Es ist dann sicher

$$0 \leqq s \leqq q. \tag{11.4}$$

Wir können dann unsere Matrix (11. 1) durch eine äquivalente ersetzen, die die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha k'}, B_{\alpha k'}, A_{\alpha k''}, & 0 \\ A_{\varkappa k'}, B_{\varkappa k'}, A_{\varkappa k''}, & B_{\varkappa k''} \end{pmatrix} \tag{11.5}$$
$$(\alpha = 1, \ldots, (n-s); \varkappa = (n-s+1), \ldots n)$$

besitzt. Bemerkt man, daß die Bedingung (11. 2) für zwei beliebige unter den $(n-s)$ ersten Zeilen der Matrix (11. 5) sich auf

$$A_{\alpha k'} B_{\beta k'} - A_{\beta k'} B_{\alpha k'} = 0 \tag{11.6}$$

reduziert, so folgt hieraus, daß zwei beliebige Extremalen des reduzierten Problems, die zu einer von der Matrix

$$(A_{\alpha k'}, B_{\alpha k'}) \tag{11.7}$$

erzeugten Schar gehören, zueinander konjugiert sein müssen. Wir wollen zeigen, daß der Rang der Matrix (11. 7) genau gleich $(n-q)$ ist, so daß die durch (11. 7) erzeugte Extremalenschar des reduzierten Problems eine feldartige Schar dieses Problems darstellt. Bezeichnet man nämlich mit s' den Rang von (11. 7), so folgt aus dem Satze 2 des § 7, daß

$$s' \leqq (n-q) \tag{11.8}$$

ist. Man kann nun die Matrix (11. 5) durch eine äquivalente ersetzen, bei der die $(n-s-s')$ ersten Zeilen die Gestalt

$$(0, 0, A_{\alpha k''}, 0) \tag{11.9}$$

besitzen.

Die Bedingung (11. 2) lautet nun, wenn man sie auf eine der Zeilen von (11. 9) und auf eine der Zeilen

$$(A_{\varkappa k'}, B_{\varkappa k'}, A_{\varkappa k''}, B_{\varkappa k''})$$

von (11. 5) anwendet,

$$A_{\alpha k''} B_{\varkappa k''} = 0. \tag{11.10}$$

Es gibt aber nur höchstens $(q-s)$ linear unabhängige Lösungen von (11. 10), wenn man diese Relationen als Gleichungen zur

Bestimmung der $A_{ak''}$ ansieht. Andererseits müssen die $(n-s-s')$ Zeilen von (11.9) linear unabhängig sein, weil die Determinante (11.5) den Rang n hat. Es ist also

$$(n-s-s') \leqq (q-s)$$

und die Vergleichung dieser letzten Relation mit (11.8) zeigt uns schließlich, daß

$$s' = n - q \tag{11.11}$$

ist.

12. Läßt man, wie wir es im vorigen Paragraphen angekündigt haben, alle $(q-s)$ Zeilen von (11.9) weg, so erhält man eine Matrix von $(n-q+s)$ Zeilen, die nach dem § 3 durch eine äquivalente von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \delta_{\alpha'\beta'}, & A_{\alpha'\mu'}, & 0, & 0, & A_{\alpha'k''}, & 0 \\ 0, & A_{\varkappa'\mu'}, & -A_{\gamma'\varkappa'}, & \delta_{\varkappa'\lambda'}, & A_{\varkappa'k''}, & 0 \\ 0, & A_{\varrho\mu'}, & B_{\varrho\gamma'}, & 0, & A_{\varrho k''}, & B_{\varrho m''} \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

$$(\alpha', \beta', \gamma' = 1, \ldots, r'),\ (\varkappa', p', \lambda' = (r'+1), \ldots, (n-q))$$
$$(\rho = (n-q+1), \ldots, (n-q+s)),\ (k'', m'' = (n-q+1), \ldots, n)$$

ersetzt werden kann. Dafür, daß die Bedingungen (11.2) erfüllt seien, sind jetzt folgende Relationen zu verifizieren:

$$\begin{cases} B_{\varrho\alpha'} = -B_{\varrho k''} A_{\alpha'\varkappa''} \\ A_{\varrho\varkappa'} = B_{\varrho k''} A_{\varkappa'k''} \end{cases} \tag{12.2}$$

$$(A_{\varrho k''} B_{\sigma k''} - A_{\sigma k''} B_{\varrho k''} = 0. \tag{12.3}$$

Man kann nun durch Hinzufügen von $(q-s)$ Zeilen zu der Matrix

$$(B_{\varrho k''})$$

eine neue quadratische Matrix q^{ter} Ordnung bilden, deren Determinante

$$|B_{j''k''}| \neq 0$$

ist. Hierauf kann man nacheinander die neuen Zahlen $A_{j''k''}$ so berechnen, daß alle Gleichungen (12.3) verifiziert seien, und dann die Zahlen $B_{j''\alpha'}$, $A_{j''\varkappa'}$ durch die Gleichungen (12.2) bestimmen.

Wir erhalten auf diese Weise die Basis einer feldartigen Extremalenschar, die nach den Überlegungen des § 11 keine einzige singuläre Extremale mehr enthält.

Nennt man eine feldartige Extremalenschar **vollständig**, wenn sie keine singulären Extremalen enthält, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 5. Die Extremalen einer beliebigen feldartigen Extremalenschar können stets in eine vollständige feldartige Schar eingebettet werden.

13. Die Brennpunkte einer feldartigen Extremalenschar. Die Basis einer beliebigen feldartigen Extremalenschar kann nach dem Vorhergehenden immer so gewählt werden, daß die Determinante der X_{ij} in der Form

$$\begin{vmatrix} X_{i'j'}, & 0 \\ X_{i'j''}, & X_{i''j''} \end{vmatrix} \tag{13. 1}$$

erscheint. Die $X_{i''j''}$ sind hierbei Konstanten und die Determinante

$$\left| X_{i''j''} \right| \tag{13. 2}$$

hat mit den Bezeichnungen des § 11 den Rang s. Man erhält den Rang von (13. 1), indem man zu s den Rang der Determinante

$$\left| X_{i'j'} \right| = \left| X^*_{i'j'} \right| \tag{13. 3}$$

addiert. Die Funktionen $X^*_{i'j'}(t)$ stellen aber nun eine feldartige Schar des betrachteten reduzierten Problems dar und nach dem Satze von Radon ist also die Determinante (13. 3) überall außer in gewissen isolierten Punkten von Null verschieden. Wir erhalten schließlich den

Satz 6. Der Rang der Determinante

$$\left| X_{ij} \right|$$

einer beliebigen feldartigen Extremalenschar ist für alle Werte von t, außer in gewissen isolierten Punkten, den Brennpunkten der Schar, konstant und immer gleich $(n - q + s)$.

Es fallen also die Brennpunkte unserer feldartigen Extremalenschar mit denjenigen der feldartigen Schar von Extremalen

$$x_{i'} = X^*_{i'j'}(t)$$

des betrachteten reduzierten Problems zusammen und dieses ist ein Variationsproblem von der Klasse Null. Die Oszillationstheoreme und die Theorie der konjugierten Punkte bestehen dahergenau aus denselben Sätzen für die allgemeinsten Lagrangeschen Variationsprobleme, wie für die längst behandelten Probleme von der Klasse Null.

Der Satz 6 erlaubt ferner am einfachsten die Tatsache einzusehen, daß die Zahl s, die in unseren Rechnungen vorgekommen ist, eine Invariante ist, die von der jeweiligen Wahl der Basis des betrachteten feldartigen Gebildes vollkommen unabhängig ist, und die sogar erhalten bleibt, wenn man die Transformation des § 8 rückgängig macht.

Aber auch die Theorie der zweiten Variation, d. h. die Feststellung der Bedingungen, unter welchen ein Minimum auftritt, kann keine Schwierigkeiten mehr bereiten, wenn man den Einbettungssatz des § 12 richtig anzuwenden versteht. Eine beliebige feldartige Extremalenschar kann nämlich auf unendlich verschiedene Arten in eine vollständige Schar eingebettet werden. Welche Wahl aber in jedem einzelnen Falle getroffen werden muß, hängt von der Frage ab, die man gerade behandelt will.

Das Hauptresultat der vorhergehenden Untersuchung besteht jedenfalls in der Erkenntnis, daß die Schwierigkeiten bei Variationsproblemen, bei welchen der v. Escherichsche Ausnahmefall vorkommt, mit der Lösung des Randwertproblems zusammenhängen, nicht aber, wie man bisher angenommen hat, mit der Theorie der zweiten Variation.