Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1933. Heft I
Januar-März-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über das Problem der mehrfachen Kommensurabilitäten im Sonnensystem.

Von A. Wilkens.

Vorgetragen in der Sitzung vom 4. Februar 1933.

Genäherte niedrigzahlige Kommensurabilitäten der mittleren Bewegungen bei zwei großen Planeten z. B. Jupiter und Saturn, oder bei einem großen Planeten und einem Planetoiden oder endlich bei zwei Satelliten der großen Planeten wie Jupiter und Saturn sind wohlbekannte und schwierige Fälle der Mechanik des Himmels, die bis heute für größere Zeiträume im Hinblick auf Stabilitäts- und kosmogonische Fragen ungelöst geblieben sind. Das einzige bisher bekannte Beispiel einer bei mehr als zwei Körpern stattfindenden Kommensurabilität ist der Fall der drei inneren der vier klassischen Monde des Jupiter, der einen der reinsten und schönsten Typen für eine periodische Lösung darstellt; erst ganz neuerdings nach der Entdeckung des großen Planeten Pluto hat sich gezeigt, daß die drei großen Planeten Uranus, Neptun und Pluto durch eine außerordentlich bemerkenswerte niedrigzahlige Kommensurabilität der mittleren Bewegungen aneinander gebunden sind, indem (s. meinen Artikel hierüber in den Astr. Nachr. Bd. 240, Nr. 5741 und Sitzungsber. der Bayer. Akademie der Wissenschaften vom 10. Januar 1931)

$$n : n' : n'' = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \text{ bzw. } n = 2n' = 3n'', \text{ also } n - 4n' + 3n'' = 0.$$

Die so bestehenden mehrfachen und niedrigzahligen Kommensurabilitäten führen wie die einfachen Kommensurabilitäten zu einer sehr schwierigen Darstellung der Bewegungstheorie, weil sie, wenn auch erst in der 2. Ordnung der Massen, zu kritischen Ungleichheiten führen, falls überhaupt eine Anordnung nach Potenzen der Massen zulässig ist; bei den Jupitermonden und der Plutogruppe kommt aber noch entscheidend und erschwerend hinzu, daß infolge der niedrigzahligen Kommensurabilität zwischen bereits zweien der drei kritischen Massen schon bei der 1. Ordnung der Massen grundsätzliche Schwierigkeiten bei der Integration bestehen, indem bei den Jupitermonden die Differenz $n - 2n' = n' - 2n'' = m$ und ebenso bei der Plutogruppe $n - 2'$ und $2n' - 3n''$ kleine Größen sind, so daß also infolge der kleinen Divisoren für die einfache wie für die mehrfache Kommensurabilität, insbesondere bei der Plutogruppe, schwere Kalamitäten für die Integration vorliegen. Vom Standpunkt der Mechanik des Himmels wie auch von kosmogonischem Gesichtspunkt aus, speziell mit Rücksicht auf die Frage nach einer etwaigen Analogie der kosmogonischen Entwickelung der Satelliten der großen Planeten und der großen Planeten selbst, ist es von Interesse zu wissen, ob außer der dreifachen Kommensurabilität bei den Jupitermonden und der Plutogruppe noch weitere den Jupitermonden analoge bzw. weitere Fälle mehrfacher Kommensurabilität im Sonnensystem existieren, insbesondere zwischen zweien der großen Planeten und einem Planetoiden, die einen so großen Spielraum in bezug auf die mittleren Bewegungen bieten, daß wertvolle und bemerkenswerte Fälle mehrfacher Kommensurabilität von vorneweg möglich erscheinen. Da die Jupitermonde das hervorragendste Beispiel der praktischen Existenz einer mehrfachen periodischen Lösung sind, bedeutet die anzuschneidende Frage die Suche nach analogen periodischen Lösungen des Vierkörperproblems unter den Planeten des Sonnensystems.

Als erste Frage ergibt sich dementsprechend, ob die zunächst für die Jupitermonde gültige Relation (1) $N = n - 3n' + 2n'' = 0$ in direkt übertragener Form genähert oder strenge in bezug auf das aus einem Planetoiden, Jupiter und Saturn bestehende Triplett praktisch erfüllt ist, wobei in diesem wie in analogen Fällen für die spätere theoretische Bearbeitung entscheidend ist, ob die aus (1) folgende Relation $n - 2n' = n' - 2n'' = m$ eine nicht kleine Größe ist, da, wie oben gezeigt, der Fall eines kleinen Betrages von m schon in der 1. Ordnung der Masse zu wesentlichen Schwierigkeiten in der Integration führen würde, so daß wir nur solche Fälle bearbeiten können, bei denen erst bei größerem Betrage von m infolge der mehrfachen Kommensurabilität gemäß (1) erst in den Gliedern der 2. Ordnung der Masse Integrationsschwierigkeiten entstehen können. Hätten wir in Anlehnung an die zwischen Jupiter und Saturn bestehende nahe Kommensurabilität, wonach $n' : n'' = 5 : 2$ ist, denjenigen

Planeten gesucht, bei dem $2n - 5n' = 2n' - 5n''$, also $N = 2n - 7n' + 5n''$ wäre, so würden bereits bei der 1. Ordnung der Masse infolge der Eigenschaften der Störungsfunktion beim Argument $2l - 5l'$ kritische Glieder entstanden sein, wenn sie auch von dem 3. Grade der Exzentrizitäten sind, während im Falle des Analogons zu den Jupitermonden bei der 1. Ordnung der Masse keine kritischen Glieder auftreten können, indem die numerische Rechnung für die mittlere Bewegung nach (1) ergibt: $n - 2n' = n' - 2n'' = 58''\!.218$, also $n = 656''\!.474$; da diese Stelle von dem kritischen, dem doppelten Werte von n' entsprechenden Betrage $598''\!.27$ um $58''$ entfernt ist, so können also in der 1. Ordnung der Masse keine kritischen Glieder auftreten. Die statistische Untersuchung des bis heute vorliegenden Materials der Planetoiden zeigt, daß, worauf ich noch weiter unten zurückkommen muß, innerhalb des Intervalles $n_0 = 656''\!.474 \pm 10''\!.$ 69 Planeten vorhanden sind, so daß sich die Untersuchung des Analogons der Jupitermonde im Sonnensystem auch praktisch lohnt, mit dem Ziele, ob bei diesen Planeten wie bei den Jupitermonden für das der Funktion N nach (1) entsprechende kritische Argument $K = l - 3l' + 2l''$ in Analogie zur Pendelbewegung eine Libration oder Rotation besteht, womit für kosmogonische Fragen der erste Fingerzeig gegeben wäre. Bei den Jupitermonden ist bemerkenswerterweise $K = l - 3l' + 2l'' = 180^0$ abgesehen von kurzperiodischen Störungen; bei der Übertragung auf das System eines Planetoiden, Jupiter und Saturn, ist, wie die Berechnung von K auf Grund der Statistik der Bahnelemente der 69 genannten Planetoiden zeigt, das oskulierende $K \neq 180^0$. Das Argument $K = l - 3l' + 2l''$ ist, was hier schon hervorgehoben werden mag, eine von jedem Längenanfangspunkt unabhängige Größe, da die algebraische Summe der Koeffizienten von l, l' und l'' in dem Ausdruck für K verschwindend ist.

Die nächste Folgerung aus der letzteren Tatsache des Verschwindens der algebraischen Summe der Koeffizienten der Längen in K ist die, daß bei der Zerlegung von K in zwei Teile, wie es zur Ermittelung der das Argument K hauptsächlich in bezug auf den Grad der Exzentrizität zusammensetzenden Teilargumente notwendig ist, jeder Teil von dem gleichen Grade in bezug auf die Exzentrizitäten ist. Wir können nämlich das kritische Argument

K in folgender Art zerlegen (1) in: $K = l - l' - (2l' - 2l'')$, (2) in: $K = l - l'' - (3l' - 3l'')$ und (3) in $K = 3(l - l') - 2(l - l'')$. Bezeichnen wir die Teilargumente mit α und β, so daß $K = \alpha - \beta$, so erkennt man, daß in den genannten drei Fällen der Zerlegung von K sämtliche α- und β-Glieder für sich in der Störungsfunktion vom 0. Grade in bezug auf die Exzentrizitäten sind, da die algebraische Summe der Koeffizienten in den Teilargumenten 0 ist. Der Algorithmus, der für ein beliebiges Bahnelement in dessen Differentialgleichung zur Erzeugung von Gliedern mit dem Argumente K führt, ist dann also der folgende. Ist E ein beliebiges Bahnelement, so lautet die entsprechende Differentialgleichung dieses Elementes nach der Methode der Variation der Konstanten, wenn wir grade nach den soeben genannten vier verschiedenen l enthaltenden Argumenten α bzw. β entwickeln, weil sie als vom 0. Grade die Hauptglieder fixieren, folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = {} & m' \, E_1(a, e \ldots, a', e' \ldots) \cos(l - l') \\ & + m'' \, E_2(a, e \ldots, a'', e'' \ldots) \cos(l - l'') \\ & + m' \, E_3(a, e \ldots, a', e' \ldots) \cos 3(l - l') \\ & + m'' \, E_4(a, e \ldots, a'', e'' \ldots) \cos 2(l - l''),\end{aligned}$$

wo die Koeffizienten E_i, entsprechend dem Argument des trigonometrischen Terms, von den eingeklammerten Elementen abhängig sind und wo die vier Argumente $l - l'$, $l - l''$, $3(l - l')$ und $2(l - l'')$ einerseits die einzigen Argumente 0. Grades sind, die bei Kombination zum Argumente K führen, wie man leicht übersieht, und deshalb andererseits teilweise, wenigstens in bezug auf die Glieder in $l - l'$ und $l - l''$, numerisch zu den größten Gliedern führen, weil sie den Anfang der Fourier-Reihe für die Entwickelung der Störungsfunktion bilden. Werden nun in E_1 die Jupiterelemente a', e', ... von den Störungen durch Saturn, und zwar speziell von denen mit dem Argumente $2l' - 2l''$ abhängig gemacht, analog in E_2 die a'', e'', ... von der Jupiterstörung des Argumentes $3l' - 3l''$, ebenso in E_3 die a, e, ... von der Saturnstörung des Argumentes $2(l - l'')$ und schließlich in E_4 die a, e, ... von der Jupiterstörung des Argumentes $3(l - l')$, so führen die Produkte cos α

$\cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ im ersten Gliede der rechten Seite zum Argumente $K = l - 3l' + 2l''$ und die Koeffizienten sind jedesmal von der 2. Ordnung der störenden Masse. Wesentlich ist dabei, daß diese Koeffizienten in allen 4 Fällen von dem 0. Grade der Exzentrizitäten werden, weil die Teilglieder der genannten Argumente vom 0. Grade sind, so daß also auch das gesuchte kritische Glied des Argumentes K vom niedrigstmöglichen, nämlich 0. Grade der Exzentrizitäten, ist.

Würde man in weitergehender Zerlegung $K = l - 2l' - (l' - 2l'')$, also $\alpha = l - 2l'$ und $\beta = l' - 2l''$ setzen, so entsprechen α und β gemäß den Eigenschaften der Störungsfunktion Glieder 1. Grades der Exzentrizitäten, so daß die K-Glieder in $\frac{dE}{dt}$ vom 2. Grade der Exzentrizitäten werden, also gegenüber den den früheren Argumenten entsprechenden Hauptgliedern in erster Näherung zu vernachlässigen sind. In derselben Weise sind die weiteren Glieder zu vernachlässigen, bei denen α und β zu Gliedern 2. und höheren Grades in den Exzentrizitäten führen.

Verlassen wir vorübergehend den K-Typ der Jupitermonde, um im Anschluß an diesen nach den Typen zu suchen, bei denen im niedrigsten Grade Exzentrizitäten bei niedrigstem Argument der Fourier-Reihen die maximale Größe der Koeffizienten überhaupt eintritt, so muß dies stattfinden bei dem Typus, bei dem die Teilargumente $\alpha = l - l'$ und $\beta = l' - l''$ nur mit dem einfachen Vielfachen der Längen auftreten, so daß also $K = l - l' - (l' - l'') = l - 2l' + l''$ unter der Annahme, daß den Anfangsgliedern $\alpha = l - l'$ und $\beta = l' - l''$ der Fourier-Reihen die absolut größten Koeffizienten entsprechen. Aus der entsprechenden Beziehung für die mittleren Bewegungen, nämlich $N = n - 2n' + n''$ ergibt sich $n = 477''.801$; unter allen bisher entdeckten Planetoiden bis Nr. 1223 (Kl. Planeten Jhrg. 1933) ist auffallenderweise nicht ein einziger Planet mit diesem Werte der mittleren Bewegung bzw. nicht einmal im Intervall $n \pm 10''$ vorhanden, vielleicht als Kriterium für die an dieser Stelle stattfindende und störungstheoretisch bedingte Sorte von Lösungen. Es möge noch bemerkt werden, daß K in der Weise zerlegt werden kann, daß $\alpha = l - l''$ und $\beta = 2l' - 2l''$, d. h.

in zwei Teile, die beide von dem 0. Grade der Exzentrizitäten sind wie bei der ersten Zerlegung, wobei aber wegen des doppelten Argumentes $\beta = 2\ (l' - l'')$ ein Glied mit absolut kleinerem Koeffizienten entsteht, entsprechend etwa der Zunahme des Koeffizienten um einen Grad der Exzentrizität. Der Typ der Jupitermonde unterscheidet sich von unserem neuen Typ dadurch, daß an Stelle von $\beta = l' - l''$ des neuen Typs bei den Jupitermonden das doppelte Argument $\beta = 2\ (l' - l'')$ tritt, so daß beim Jupitertyp der entsprechende Koeffizient von $\cos 2\ (l' - l'')$ absolut kleiner ist, auch deshalb, weil der gestörte Körper eine größere mittlere Bewegung n hat, also näher zur Sonne gelegen ist, so daß $\frac{a}{a'} = \alpha$ und $\frac{a}{a''} = \bar{\alpha}$ kleiner als beim neuen Typ ist; dann sind aber auch beim Jupitertyp die Störungen 2. Ordnung der Masse kleiner als beim neuen Typ.

Ganz allgemein folgen die sukzessiven Typen, soweit die den α und β entsprechenden Störungsglieder von dem 0. Grade der Exzentrizitäten bleiben, aus der Relation:

$$K = i\ (l - l') - k\ (l' - l''),$$

worin sukzessive k und $i = 1, 2, 3, \ldots$ zu substituieren sind; die Fälle $i = 1$ neben $k = 1$ und 2 sind oben bereits behandelt worden; die folgende Tabelle 1 gibt zu jedem i und k die zugehörige mittlere Bewegung bis i und $k = 4$.

Tabelle 1.

i \ k	1	2	3	4
1	$477''.8$	$656''.5$	$835''.1$	$1013''.8$
2	388.5	477.8	567.1	656.5
3	358.7	418.2	477.8	537.4
4	343.8	388.5	433.1	477.8

Ist $k = i$, so entspricht das zugehörige n immer dem oben behandelten Haupttyp mit $n = 477''.801$. Ist ferner $k = 2i$, so entsteht immer wieder der obige Typ der Jupitermonde usw. Je größer k bzw. i werden, desto kleiner werden die Absolutbeträge der zugehörigen Koeffizienten der Fourier-Reihen und um so kleiner wird der Betrag der Störungen 2. Ordnung auch bei den kritischen Gliedern.

Gegenüber diesen Hauptfällen, wo die Teilargumente zu Gliedern 0. Grades der Exzentrizitäten führen, haben die Fälle, wo α oder β, oder wo α und β zu Gliedern 1. oder höheren Grades führen, entsprechend geringere Bedeutung bzw. sie entsprechen bei niederem Grade der Exzentrizitäten den obigen Typen der Tabelle, wo zwar α und β zu Gliedern 0. Grades in den Exzentrizitäten führen, wo aber k und i weiter von 1 entfernt liegen; wie schon erwähnt, kann man annehmen, daß dem Anwachsen von i oder k um eine Einheit eine Zunahme des Grades der Exzentrizitäten ebenfalls um eine Einheit entspricht.

Weiter ist es noch von besonderem Interesse zu untersuchen, ob analog zu Jupiter und Saturn als störenden Körpern ähnliche Fälle einer mehrfachen Kommensurabilität in einem System zwischen Mars, Jupiter und einem Planetoiden existieren und beachtlich sind. Ist jetzt also n die mittlere Bewegung des Mars, n' die des Planetoiden und n'' die des Jupiter, so folgt im Analogiefalle zu den Jupitermonden aus der Relation $n - 3n' + 2n'' = 0$, daß $n' = 828''.258$. In der Nähe dieser Stelle gibt es eine große Zahl von Planetoiden, die diesen Spezialwert annehmen, insbesondere kommen die Planeten Nr. 524, 945 und 971 der kritischen Stelle bis auf $1''$ nahe. Im kritischsten Falle, wo $n - 2n' + n'' = 0$ ist, ergibt sich $n'_0 = 1092''.824$, d. h. ein Fall, wo der Planet speziell vom Saturn weiter entfernt ist, so daß dessen Störungen weniger in Frage kommen, gar nicht in bezug auf eine einfache oder mehrfache Kommensurabilität. Sucht man alle Planetoiden heraus, deren mittlere Bewegung in die Grenzen $n' = n'_0 \pm 10''$ eingeschlossen ist, so ergeben sich 29 Fälle, wobei in 9 Fällen $|n' - n'_0| < 2''$, d. h. bei $1/3$ aller Fälle, und auch innerhalb der Grenzen, wo $|n' - n'_0| < 5''$, ergeben sich 16 Fälle, d. h. mehr als die Hälfte aller vorhandenen Fälle. Die Nummern der betreffenden 29 Planetoiden nebst ihren mittleren Bewegungen sind in der folgenden Tabelle 2 zusammengestellt, wo allerdings zu berücksichtigen ist, daß die mittleren Bewegungen oskulierende, keine mittleren sind und noch zu prüfen ist, ob die n_0 den späteren Grenzbedingungen 5a) bzw. 5b) für n_0 genügen. Alle anderen Fälle ergeben sich wie bei der Kombination von Jupiter und Saturn nach denselben Formeln, wobei aber nur zu beachten ist, daß dem Planetoiden die mittlere Bewegung n' zukommt.

Tabelle 2.

Plan.-Nr.	n	Plan.-Nr.	n
8	1086″3	802	1087″9
43	1085.0	810	1097.8
228	1086.0	819	1088.7
255	1091.1	836	1094.6
270	1088.6	857	1094.1
281	1096.4	913	1093.0
341	1087.7	1037	1098.5
352	1091.4	1055	1087.2
453	1099.8	1088	1086.0
496	1103.4	1133	1099.4
512	1095.4	1150	1093.8
707	1102.1	1153	1090.5
736	1085.8	1188	1094.0
782	1102.4		
800	1092.7		

Die Differentialgleichung des kritischen Argumentes K.

Da für den auf das Sonnensystem übertragenen Fall der Jupitermonde die kritische Beziehung zwischen den Längen die Form hat: $K = l - 3\,l' + 2\,l''$, wobei das System Planetoid—Jupiter—Saturn betrachtet wird, so ist, da $l = \varepsilon + \int n\,dt$, wo ε die mittlere Länge der Epoche, die Differentialgleichung für K:

$$\frac{d^2K}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{dn}{dt} - 3\,\frac{d^2l'}{dt^2} + 2\,\frac{d^2l''}{dt^2}, \tag{2}$$

wo wir die 2. Ableitungen von l' und l'' nicht weiter auf solche nach ε' bzw. ε'' zu reduzieren brauchen, weil die Jupiter- wie

Saturnlängen l' und l'' bereits von Le Verrier in den Annalen der Pariser Sternwarte als bekannte Funktionen der Zeit gegeben sind, so daß nur eine zweimalige Differentiation nach der Zeit erforderlich ist. Setzen wir

$$R = -3\frac{d^2 l'}{dt^2} + 2\frac{d^2 l''}{dt^2} = e \sin[\alpha \cdot t + \beta],$$

so erhält die Gleichung (2) die Form:

$$\frac{d^2K}{dt^2} = c \sin K + e \sin[\alpha \cdot t + \beta], \tag{4}$$

wo das Glied $e \cdot \sin(\alpha \cdot t + \beta)$ etwa der großen Ungleichheit zwischen Jupiter und Saturn entspricht, um diese zu berücksichtigen, oder einer der wesentlichen langperiodischen Störungen 2. Ordnung der Masse zwischen Jupiter und Saturn, deren beliebig viele, auch neben der großen Ungleichheit, berücksichtigt werden können. Wäre es gestattet, bei vorausgesetztem kleinem $\sin K$, wo also K in der Nähe von 0 oder 180 gelegen wäre, $\sin K = K$ oder $\pi - K$ zu setzen, so wäre (4) mit der Gleichung für erzwungene Schwingungen identisch und leicht lösbar, sonst ist (4) allgemein die strenge Gleichung mit erzwungener Schwingung, deren allgemeine Lösung durch den inhomogenen Teil sehr erschwert wird. Wird $e = 0$ angenommen, so wird in diesem homogenen Falle

$$t - t_0 = \int \frac{dK}{\sqrt{C - 2c\cos K}}, \tag{5}$$

so daß die Lösung für K eine Libration ergibt, falls der Absolutbetrag $\left|\frac{2c}{C}\right| > 1$, so daß K zwischen zwei Grenzwerte eingeschlossen bleibt, fixiert durch $\cos K_0 = \frac{C}{2c}$, so daß K um 0^0 oder 180^0 libriert; ist $c < 0$, so ist, wenn $c = -c'$ gesetzt wird, wobei $c' > 0$ ist, das Radikal im Integral (5) nur dann reell, wenn:

$$C + 2c' \cdot \cos K \geqq 0,$$

so daß $\cos K \geqq -\frac{C}{2c'}$, und folglich K um 0^0 librieren muß. Ist $c > 0$, so folgt aus $C - 2c \cdot \cos K \geqq 0$, daß $\cos K \leqq \frac{C}{2c}$, also Libration um 180^0 stattfindet.

Die zu einem beliebigen Werte von K_0 gehörige Grenze der mittleren Bewegung n für die Bedingung einer Libration folgt aus der für $t = t_0$ geltenden Differentialgleichung nach (5):
$\left(\frac{dK}{dt}\right)_0^2 = K_0'^2 = C - 2\cos K_0$, wo $K_0 = \left|K\right|_{t_0}$; folglich ist
$\frac{C}{2c} = \cos K_0 + \frac{1}{2c} K_0'^2$, oder, da im Librationsfalle $\left|\frac{C}{2c}\right| < 1$ sein muß:
$\left|\frac{1}{2c} K_0'^2 + \cos K_0\right| < 1$; bei $c < 0$, also $c = -c'$, wo $c' > 0$, muß also sein, entweder α) $\frac{1}{2c} K_0'^2 - \cos K_0 \leqq 1$, also $\frac{1}{2c'} K_0'^2 \leqq 2\cos^2 \frac{1}{2} K_0$, d. h.

5 a) $\left|K_0'\right| = \left|n_0 - 3n_0' + 2n''\right| \leqq 2\sqrt{c'} \cos \frac{1}{2} K_0$, womit die obere und untere Grenze von n_0 festgesetzt ist; es ist also an den Grenzen
$n_0 = 3n' - 2n'' \pm 2\sqrt{c'} \cos \frac{1}{2} K_0$; oder es muß sein

$$\beta)\ \cos K_0 - \frac{K_0'^2}{2c'} \leqq 1, \text{ also } \frac{1}{2c'} K_0'^2 \geqq -2\sin^2 \frac{1}{2} K_0,$$

was zu einem imaginären, also unbrauchbaren Grenzwerte führt.

Ist $c > 0$, also $K = 180^0 + L$ um 180^0 librierend, so wird wegen $\frac{d^2L}{dt^2} = -c \sin L$ für L dieselbe Form des Ausdruckes für die Grenze von n_0 bzw. L_0' wie oben im Falle $c < 0$ erhalten, es ist nur c' mit c zu vertauschen, so daß

$$\text{(5b)} \qquad \left|L_0'\right| = \left|n_0 - 3n' + 2n''\right| \leqq 2\sqrt{c} \cos \frac{1}{2} L_0$$

bzw., da $L_0 = K_0 - 180^0$:

$$\left|L_0'\right| = \left|n_0 - 3n' + 2n''\right| \leqq 2\sqrt{c} \sin \frac{1}{2} K_0.$$

Soll K bzw. L als Funktion der Zeit dargestellt werden, so ist in (5) zu substituieren: $\cos K = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} K$ und dann $\sin \frac{1}{2} K = x$, so daß:

$$(5\,c)\ t - t_0 = \frac{2}{\sqrt{C - 2c}} \int \frac{d\left(\frac{1}{2}K\right)}{\sqrt{1 - \frac{4c}{2c - C}\sin^2\frac{1}{2}K}}$$

$$= 2\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(C - 2c + 4cx^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)\left(\frac{2c - C}{4c} - x^2\right)}}, \text{ falls } c < 0;$$

damit ist scheinbar die Normalform der elliptischen Integrale erlangt, es ist aber zu beachten, daß der Modul $k^2 = \frac{4c}{2c - C} > 1$, da $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{C}{2c}\right) < 1$, weil $\left|\frac{C}{2c}\right| < 1$ nach Voraussetzung für den Fall einer Libration. Ist $c > 0$, so gilt auch dann die letzte der Formeln (5c), wobei nur c mit $-c$ zu vertauschen ist und die Lösung für $L = K - 180$ gültig ist, während die beiden anderen Formeln unverändert bleiben. Setzen wir in die letzte Form von (5 c) einen neuen Modul $k^2 = \frac{2c - C}{4c} < 1$, so entsteht die bekannte Normalform, bei der der Modul kleiner als 1 ist, und zuerst $c = -c' < 0$, also $c' > 0$ angenommen sei, so daß der Faktor $\sqrt{-c} = \sqrt{c'}$ reell ist, wenn wir die lineare Substitution $x = k \cdot z$ verwenden, indem alsdann erhalten wird:

$$\sqrt{-c}\,(t - t_0) = u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

folglich wird dann also nach der Theorie der elliptischen Funktionen $z = \sin \operatorname{am} u = \frac{2\pi}{kK_1}\left[\frac{\sqrt{q}}{1 - q}\sin\frac{\pi}{2K_1}u + \frac{\sqrt{q^3}}{1 - q^3}\sin\frac{3\pi}{2K_1}\cdot u + \dots\right]$ und folglich $x = k \cdot z = \frac{2\pi}{K_1}\left[\frac{\sqrt{q}}{1 - q}\sin\frac{\pi}{2K_1}u + \dots\right]$, wobei die Periode in bezug auf u den Betrag $4K_1$, in bezug auf t den Betrag $\frac{4K_1}{\sqrt{-c}}$ hat und wobei t_0 in $u = \sqrt{-c}\,(t - t_0)$ die Integrationskonstante ist, so daß auch gesetzt werden kann: $u = \sqrt{-c} + D$ mit D als Integrationskonstante. Das elliptische Normalintegral 1. Gattung: $K_1 = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$ ist mit dem Argumente k, ebenso wie $K_1' = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}}$ mit dem Modul $k'^2 = 1 - k^2$ den Tafeln der elliptischen Integrale zu entnehmen, um dann die in den Reihen auftretende Größe $q = e^{-\pi \frac{K_1'}{K_1}}$ berechnen bzw. ebenfalls den Tafeln entnehmen zu können. Liegt der Fall $c > 0$ vor, also Libration um $K = 180^0$, so daß $K = 180^0 + L$ und also $\frac{d^2 L}{dt^2} = -c \sin L$, so ist also nur c mit $-c$ in allen Formeln zu vertauschen, wobei also $k = \sqrt{\frac{2c + C}{4c}}$ wird. Da die Periode $P = 4 K_1$ ist, so wird bei $k = 0$ die Periode 2π, so daß bei kleinem Betrage von k die Periode sehr nahe mit der Periode 2π bei kleiner Schwingung übereinstimmt.

Die Integrationskonstanten t_0 bzw. D in u und C in k und K_1 ergeben sich auf Grund der vorgelegt gedachten Werte von K_0 und n_0 für den beliebigen Zeitpunkt $t = 0$ folgendermaßen. Zuerst folgt C aus $\left(\frac{dK}{dt}\right)^2 = (n_0 - 3n' + 2n'')^2 = C - 2c \cos K_0$, so daß damit auch $k^2 = \frac{2c - C}{4c}$ bekannt wird.

Alsdann folgt t_0 aus:

$$\sin \frac{1}{2} K = \frac{2\pi}{K_1} \left[\frac{\sqrt{q}}{1-q} \sin \frac{\pi}{2 K_1} u + \cdots \right],$$

wenn noch $K = K_0$ und $u = u_0$ gesetzt werden; berücksichtigt man in 1. Näherung nur das 1. Glied rechter Hand, so erhält man eine 1. Näherung für u_0, die dann mit Rücksicht auf die höheren Glieder differentiell oder durch Versuche interpolatorisch verbessert wird. Die Größe t_0 selbst folgt dann mittels

$$u_0 = \sqrt{-c}\,(t - t_0) = -\sqrt{-c} \cdot t_0,$$

weil $t = 0$ war.

Beschränken wir uns vorübergehend auf kleine Schwingungen, und zwar um den beliebigen Wert K_0, so daß (7a) $K = K_0 + L$, wo L als kleine Größe vorausgesetzt wird, so erhalten wir mit Rücksicht auf die erzwungene Schwingung nach (4) die neue Gleichung:

$$(7) \qquad \frac{d^2L}{dt^2} = c' \sin L + c'' \cos L + e \sin(\alpha t + \beta),$$

wobei $c' = c \cos K_0$ und $c'' = c \sin K_0$, so daß, wenn L^2 usw. gegen L vernachlässigt und $L + \frac{c''}{c'} = M$ gesetzt wird, die neue Gleichung entsteht:

$$(8) \qquad \frac{d^2M}{dt^2} = c' M + e \cdot \sin(\alpha \cdot t + \beta).$$

Die Lösung dieser Gleichung im Falle der Libration, also bei $c' < 0$, zusammengesetzt aus der allgemeinen Lösung M des homogenen Teiles: $M_1 = A \sin(\sqrt{-c'}\, t + B)$ und der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung: $M_2 = x \sin(\alpha t + \beta)$ mit x als zu bestimmender Konstanten lautet:

$$M = M_1 - \frac{e}{\alpha^2 + c'} \sin(\alpha t + \beta),$$

so daß alsdann

$$(9) \qquad K = l - 3\, l' + 2\, l'' = K_0 + L = K_0 - \frac{c''}{c'} + A \sin(\sqrt{-c'}\, t + B) - \frac{e}{\alpha^2 + c'} \sin(\alpha t + \beta),$$

wobei sich die Konstanten A und B aus den für $t = 0$ gültigen Werten von K und $\frac{dK}{dt}$ ergeben mittelst der Gleichungen:

$$\text{a)} \qquad A \sin B = \frac{c''}{c'} + \frac{e}{\alpha^2 + c'} \sin \beta$$

$$\text{b)} \qquad \sqrt{-c'}\, A \cos B = n_0 - 3\, n_0' + 2\, n_0'' + \frac{e\alpha}{\alpha^2 + c'} \cos \beta + \left(\frac{dK}{dt}\right)_0.$$

Liegt der Sonderfall $c' = -\alpha^2$ vor, so daß der Nenner $\alpha^2 + c'$ der partikulären Lösung verschwindet, so ist die Lösung M_2 in das gemischt säkulare Glied abzuändern: $M_2 = x \cdot t \cdot \cos(\alpha t + \beta)$, wo man bei Substitution $x = -\frac{e}{2\alpha}$ erhält, so daß in diesem Falle

$$\text{(10)} \quad \begin{aligned} K = l - 3l' + 2l'' = K_0 - \frac{c''}{c'} + A \sin(\alpha t + B) \\ - \frac{e}{2\alpha} t \cos(\alpha t + \beta). \end{aligned}$$

Da im Sonnensystem, falls das Zusatzglied in (4): $e \sin(\alpha t + \beta)$ der großen Ungleichheit zwischen Jupiter und Saturn entspricht, $\alpha = \operatorname{arc}(-4,''0) = -\frac{20}{10^6} = -20\, m'^2 \left(m' = \frac{1}{10^3}\right)$, andererseits aber c' von der Ordnung $m' \cdot m'' = {}^1/_3\, m'^2$, so ist $\alpha^2 = 400\, m'^4$ verschwindend klein gegen c', so daß im Sonnensystem der Divisor $\alpha^2 + c'$ immer $\neq 0$ bleibt und nahe gleich c' ist.

Aus (7) folgt noch, daß, da die Bedingungen einer Libration in bezug auf c und K_0 bei kleinem L an die Bedingung $c' = c \cdot \cos K_0 < 0$ gebunden sind:

(10a) entweder (1): $c > 0$ und zugleich $90^0 < K_0 < 270^0$
oder (2): $c < 0$ und zugleich $90^0 > K_0 > 270^0$, d. h. auch, wenn bei $c \gtrless 0$ zugleich $|K_0| \gtrless 90^0$ sein muß.

Ableitung der Koeffizienten des kritischen Gliedes.

Zufolge der Differentialgleichung

$$\text{(11)} \qquad \frac{d^2K}{dt^2} = \frac{d^2l}{dt^2} - 3\frac{d^2l'}{dt^2} + 2\frac{d^2l''}{dt^2}$$

ist zunächst $\frac{d^2l}{dt^2}$ als Funktion von K darzustellen, indem die 2. Ableitungen von l' und l'' den Annalen der Pariser Sternwarte entnommen werden. Da nun $l = \varepsilon + \int n \cdot dt$, wo ε = mittlere Länge der Epoche, so folgt:

$$\text{(12)} \qquad \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{dn}{dt},$$

so daß zuerst $\frac{dn}{dt}$ und dann $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ als Funktion von K darzustellen ist und dabei der Hauptkoeffizient c in $\frac{d^2K}{dt^2} = c \cdot \sin K$ für den von uns behandelten Fall des Analogons zu den Jupitermonden festzustellen ist.

Sind a, a', a'' die großen Halbachsen der Bahnen, so lauten die Differentalgleichungen für a und ε:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}, \tag{13}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial \Omega}{\partial a} + \text{Gliedern}, \tag{14}$$

die von der Exzentrizität und Bahnneigung abhängen, wobei Ω die Störungsfunktion fixiert. Aus dem dritten Keplerschen Gesetz, wonach $a^3n^2 = k^2(1+m)$ (k^2 = Gaußsche Konstante) folgt alsdann

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}; \tag{15}$$

zur Abtrennung der Glieder 2. Ordnung der Masse mit dem Argument K sind die schon fixierten Terme der Störungsfunktion Ω bei der Bewegung unseres Planetoiden zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \frac{1}{2} k^2 m' A^0 + \frac{1}{2} k^2 m'' \overline{A}^0 + D_1' \cos(l - l') \\ & + D_3' \cos 3(l - l') + D_1'' \cos(l - l'') + D_2'' \cos 2(l - l''), \end{aligned} \tag{16}$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben, und zwar unter Benutzung der Entwicklung der Störungsfunktion im 10. Bande der Annalen der Pariser Sternwarte, wobei die von den Exzentrizitäten und Bahnneigungen abhängigen Glieder vernachlässigt werden:

$$D_1' = k^2 m' \left(A^1 - \frac{\alpha}{\alpha'}\right),\quad D_1'' = k^2 m'' \left(\overline{A}^1 - \frac{\bar{\alpha}}{a''}\right) \tag{17a}$$

$$D_3' = k^2 m' \, A^3$$
$$D_2'' = k^2 m'' \, \overline{A}^2$$

wo m' und m'' die Jupiter bzw. Saturnmasse, $\alpha = \frac{a}{a'}$, $\bar{\alpha} = \frac{a}{a''}$ und die $\overline{A}^i$ die A^i für das Argument $\bar{\alpha} = \frac{a}{a''}$ fixieren. Da $k^2 = a^3 \cdot n^2$, abgesehen von dem Faktor $1 + m$, und die $a' \cdot A^i = b^i$ bzw.

$a'' \bar{A}^i = \bar{b}^i$, wo die b^i die nur von α bzw. $\bar{\alpha}$ abhängigen Laplaceschen Koeffizienten sind, so wird auch:

$$\text{(17b)} \quad \left\{\begin{array}{lcl} D_1' & = & m' \; n^2 a^2 \cdot \alpha \, (b^1 - \alpha) \\ D_1'' & = & m'' \; n^2 a^2 \cdot \bar{\alpha} \, (\overline{b^1} - \bar{\alpha}) \\ D_3' & = & m' \; n^2 a^2 \; \alpha \; b^3 \\ D_2'' & = & m'' \; n^2 a^2 \; \bar{\alpha} \; \overline{b^2} \end{array}\right\}$$

Um die Glieder in $K = l - 3\,l' + 2\,l''$ zur expliziten Erscheinung zu bringen, ist die Abhängigkeit der folgenden Koeffizienten (18) und ihrer Differentialquotienten nach a, a', a'', nämlich:

$$\text{(18)} \quad \left\{\begin{array}{lll} D_1' & \text{von} & 2\,l' - 2\,l'' \\ D_1'' & \text{von} & 3\,l' - 3\,l'' \\ D_3' & \text{von} & 2\,l - 2\,l'' \\ D_2'' & \text{von} & 3\,l - 3\,l' \end{array}\right\}$$

zu erweisen, indem diese Koeffizienten nach Potenzen der Störungen von $a, a', a'', \Delta l$, usw. zu entwickeln sind; sind die entsprechenden Störungen Δa, $\Delta a'$, $\Delta a''$, so ist: $a = a_0 + \Delta a$, $a' = a'_0 + \Delta a'$, $a'' = a_0'' + \Delta a''$, ferner $l = l_0 + \Delta l$, usw. wo a_0, a_0', a_0'' die Mittelwerte und l_0 usw. die ungestörten Längen sein mögen. Die Potenzentwicklung ist aber bis nach Aufstellung der Differentialgleichung für $\frac{dn}{dt}$ und $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ aufzuschieben. Die Differentialgleichung für $\frac{dn}{dt}$ ergibt zunächst nach (15) und (16):

$$\text{(18)} \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2}\Big[D_1' \sin (l' - l) + 3\,D_3' \sin 3\,(l' - l)$$
$$+ D_1'' \sin (l'' - l) + 2\,D_2'' \sin 2\,(l'' - l)\Big],$$

wonach abkürzend gesetzt werde:

$$\text{(19)} \quad \frac{1}{a^2} D_1' = D', \; \frac{1}{a^2} D_1'' = D'', \; \frac{3}{a^2} D_3' = D''', \; \frac{2}{a^2} D_2'' = D^{\text{IV}}.$$

Um die Glieder 2. Ordnung der Masse in den Produkten (18) der D mit den Sinusgliedern der Längendifferenzen festzustellen, ergibt zunächst die Potenzentwicklung der nur von a, a' und a''

abhängenden Koeffizienten $D^{(i)}$, die schon explizit von der 1. Ordnung der störenden Massen m' oder m'' sind, die Reihe:

$$(20) \qquad D^{(i)} = D_0^{(i)} + \left(\frac{\partial D^{(i)}}{\partial a}\right)_0 \Delta a + \left(\frac{\partial D^{(i)}}{\partial a'}\right) \Delta a' + \left(\frac{\partial D^{(i)}}{\partial a''}\right) \Delta a'',$$

wobei die von den Exzentrizitäten und Neigungen der Bahnen abhängigen Terme vernachlässigt sind und wo nur der erste Term $D_0^{(i)}$ von der 1. Ordnung, alle anderen Glieder in (13) aber von der 2. Ordnung der Masse sind. Analog ist zu setzen:

$$(21)\left\{\begin{aligned}
\sin\,(l-l') &= \sin\,(l_0-l_0') + (\Delta l - \Delta l')\cos\,(l_0-l_0')\\
\sin\,(l-l'') &= \sin\,(l_0-l_0'') + (\Delta l - \Delta l'')\cos\,(l_0-l_0'')\\
\sin 3\,(l-l') &= \sin 3\,(l_0-l_0') + (3\Delta l - 3\Delta l')\cos 3\,(l_0-l_0')\\
\sin 2\,(l-l'') &= \sin 2\,(l_0-l_0'') + (2\Delta l - 2\Delta l')\cos 2\,(l_0-l_0')
\end{aligned}\right\}$$

so daß alsdann die Produkte auf der rechten Seite von (18) unter Mitnahme nur der Glieder 2. Ordnung der Massen die Form erhalten:

$$\begin{aligned}
(22)\quad D' \sin\,(l-l') &= D_0' \,(\Delta l - \Delta l') \cos\,(l_0-l_0')\\
&\quad + \sin\,(l_0-l_0') \left[\left(\frac{\partial D'}{\partial a}\right)\Delta a + \left(\frac{\partial D'}{\partial a'}\right)\Delta a'\right]\\
D'' \sin\,(l-l'') &= D_0'' \,(\Delta l - \Delta l'') \cos\,(l_0-l_0'')\\
&\quad + \sin\,(l_0-l_0'') \left[\frac{\partial D''}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial D''}{\partial a''}\Delta a''\right]\\
D''' \sin\,(3l-3l') &= D_0'' \,(3\Delta l - 3\Delta l_0') \cos\,(3l_0-3l_0')\\
&\quad + \sin\,(3l_0-3l_0') \left[\frac{\partial D'''}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial D'''}{\partial a'}\Delta a'\right]\\
D^{\mathrm{IV}} \sin\,(2l-2l'') &= D_0^{\mathrm{IV}} \,(2\Delta l - 2\Delta l'') \cos\,(2l_0-2l_0'')\\
&\quad + \sin\,(2l_0-2l_0'') \left[\frac{\partial D^{\mathrm{IV}}}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial D^{\mathrm{IV}}}{\partial a''}\Delta a''\right]
\end{aligned}$$

wobei zu beachten war, daß D' und D''' nur von a und a', aber D'' und D^{IV} nur von a und a'' abhängig sind.

Zur Gewinnung der in K kritischen Glieder nach (18) und (22) sind einmal die Ableitungen der $D^{(i)}$ nach a, a', a'' zu bilden und ferner die Störungen 1. Ordnung von Δa, $\Delta a'$, $\Delta a''$, ferner von Δl, $\Delta l'$, $\Delta l''$ in Abhängigkeit von den unter (17c) genannten vier Argumenten der trigonometrischen Funktionen. Dabei folgt zunächst in bezug auf die Differentialquotienten nach a, a' und a'' nach (19) und (17b):

$$(23\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} a\frac{\partial D'}{\partial a} &= m'n^2\alpha\,(\alpha - 2b^1 + b_1{}^1)\\ a'\frac{\partial D'}{\partial a'} &= m'n^2\alpha\,(2\alpha - b^1 - b_1{}^1)\end{aligned}\right\}$$

für deren Richtigkeit die Homogenität der D^i von der -3. Ordnung in a und a' die Kontrolle bietet, indem alsdann:

$a\frac{\partial D'}{\partial a} + a'\frac{\partial D'}{\partial a'} = -3\,D'$ sein muß, also gemäß (19) und (17b): $= -3\,m'n^2\alpha\,(b^1 - \alpha)$, was auch die Summation der beiden Gleichungen (23) zu deren Kontrolle richtig ergibt. Ferner wird:

$$(23\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} a\frac{\partial D''}{\partial a} &= m''n^2\bar{\alpha}\,(\bar{\alpha} - 2\bar{b}^1 + \bar{b}_1{}^1)\\ a''\frac{\partial D''}{\partial a''} &= m''n^2\bar{\alpha}\,(2\bar{\alpha} - \bar{b}^1 - \bar{b}_1{}^1)\end{aligned}\right\}$$

wobei die Kontrolle der von (23a) ähnlich ist. Ferner wird in bezug auf D''':

$$(23\,c)\qquad \left\{\begin{aligned} a\frac{\partial D'''}{\partial a} &= 3\,m'\,n^2\alpha\,(-2\,b^3 + b_1{}^3)\\ a'\frac{\partial D'''}{\partial a} &= -3\,m'\,n^2\alpha\,(b^3 + b_1{}^3)\end{aligned}\right\}$$

wobei auch hier die Kontrolle auf Grund der Homogenität erfüllt ist, indem sich nach (19) und (17b) ergibt, daß:

$$a\frac{\partial D'''}{\partial a} + a'\frac{\partial D'''}{\partial a'} = -3\,D''' = -9\,m'\,n^2\,\alpha\,b^3.$$

Endlich wird in bezug auf D^{IV}:

$$(23\,d)\qquad \left\{\begin{aligned} a\frac{\partial D^{\text{IV}}}{\partial a} &= 2\,m''\,n^2\,\bar{\alpha}\,(-2\,\bar{b}^2 + \bar{b}_1{}^2)\\ a''\frac{\partial D^{\text{IV}}}{\partial a''} &= 2\,m''\,n^2\,\bar{\alpha}\,(\bar{b}^2 + \bar{b}_1{}^2)\end{aligned}\right.$$

wobei auch hier die Kontrolle, daß in analoger Weise auch hier die entsprechende Homogenitätsbedingung:

$$a\frac{\partial D^{IV}}{\partial a}+a''\frac{\partial D^{IV}}{\partial a''}=-3\,D^{IV}=-6\,m''\,n^2\alpha\bar{b}.$$

erfüllt sein muß, stimmt.

Weiterhin sind nun die Störungen 1. Ordnung für Δa, $\Delta a'$, $\Delta a''$, Δl, $\Delta l'$, $\Delta l''$ zu ermitteln. Aus (13) folgt zunächst:

$\Delta a=\int\frac{2}{na}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}dt$, so daß wir erhalten:

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}&\Delta a=E'\cos(l-l'+E''\cos(l-l'')+E'''\cos(3l-3l')\\&\qquad\qquad+E^{IV}\cos(2l-l''),\\&\text{wo }E'=\frac{2}{na(n-n')}D_1',\ E'''=\frac{2}{na(n-n')}D_3'\\&\qquad E''=\frac{2}{na(n-n'')}D_1'',\ E^{IV}=\frac{2}{(na\,n-n'')}D_2'.\end{aligned}\right.$$

Die Störungen der großen Halbachsen von Jupiter und Saturn mit Rücksicht auf die oben fixierten, allein in Betracht zu ziehenden Argumente lauten nach Bd. 10 der „Annales de l'observatoire de Paris":

$$(25)\qquad\left.\begin{aligned}\Delta a'&=H''\cos(2l'-2l'')\\\Delta a''&=G'''\cos(3l'-3l'')\end{aligned}\right\}\text{ wo }\begin{aligned}H''&=+143''.71\\G'''&=-298''.20\end{aligned}$$

Die Störung Δl des Planetoiden folgt mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$\frac{dl}{dt}=\frac{d\varepsilon}{dt}+n,\text{ so daß:}\qquad(26)\ l=\int\frac{d\varepsilon}{dt}dt+\int n\cdot dt,$$

$$\text{oder da }n=n_0+\Delta n,\text{ mittels }\Delta l=\int\frac{d\varepsilon}{dt}dt+\int\Delta n\cdot dt.$$

Nach doppelter Integration ist dann zuerst nach (18):

(27)

$$\begin{aligned}\int\Delta n dt=+3\Big[&\frac{D'}{(n'-n)^2}\sin(l'-l)+\frac{D''}{(n''-n)^2}\sin(l''-l)\\&+\frac{1}{9}\frac{D'''}{(n'-n)^2}\sin 3(l'-l)+\frac{1}{4}\frac{D^{IV}}{(n''-n)^2}\sin(2l''-2l)\Big]\\&=P'\sin(l'-l)+P''\sin(l''-l)+P'''\sin 3(l'-l)\\&+P^{IV}\sin 2(l''-l),\end{aligned}$$

wobei

$$P' = \frac{3\,D'}{(n'-n)^2},\; P'' = \frac{3\,D''}{(n''-n)^2},\quad P'''\,\frac{1 \quad D'''}{3\,(n'-n)^2},\quad P^{\mathrm{IV}} = \frac{3}{4}\,\frac{D^{\mathrm{IV}}}{(n''-n)^2}.$$

Ferner folgt nach (14) unter Vernachlässigung der Exzentrizitäten und Neigungen mit Rücksicht auf (19), wonach $D'_{1,1} = a^2\, D'$ usw.:

$$(28)\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{n\cdot a}\cdot\frac{\partial\cdot\Omega}{\partial a} = -\frac{2}{na}\Bigg[\frac{\partial\,(a^2 D')}{\partial a}\cos\,(l'-l)$$
$$+\frac{\partial\,(a^2 D'')}{\partial a}\cos(l''-l) + \frac{\partial\left(\frac{1}{3}a^2 D'''\right)}{\partial a}\cos 3\,(l'-l)$$
$$+\frac{\partial\left(\frac{1}{2}a^2 D^{\mathrm{IV}}\right)}{\partial a}\cos 2\,(l''-l) + \frac{1}{2}k^2 m'\frac{\partial A^0}{\partial a} + \frac{1}{2}k^2 m''\frac{\partial \overline{A}^0}{\partial a}\Bigg],$$

so daß (29): $\Delta\varepsilon = \int \frac{d\varepsilon}{dt}dt = F'\sin\,(l'-l) + F''\sin\,(l''-l)$
$+ F'''\sin 3\,(l'-l) + F^{\mathrm{IV}}\sin 2\,(l''-l)$

$$\text{wo}\left\{\begin{aligned} F' &= -\frac{2}{n\,(n'-n)}\left[a\,\frac{\partial D'}{\partial a} + 2\,D'\right],\\ F'' &= -\frac{2}{n\,(n''-n)}\left[a\,\frac{\partial D''}{\partial a} + 2\,D''\right],\\ F''' &= -\frac{2}{9\,(n'-n)}\left[a\,\frac{\partial D'''}{\partial a} + 2\,D'''\right],\\ F^{\mathrm{IV}} &= -\frac{1}{2\,n\,(n''-n)}\left[a\,\frac{\partial D^{\mathrm{IV}}}{\partial a} + 2\,D^{\mathrm{IV}}\right],\end{aligned}\right\}$$

und wo die nur von α und $\bar{\alpha}$ abhängigen Ableitungen $a\,\frac{\partial D^{(i)}}{\partial a}$ unter (23) für die direkte Anwendung gegeben sind und ferner in $\Delta\varepsilon$ der aus den reinen Säkulargliedern in A^0 und $\overline{A^0}$ entstehende säkulare Teil der Form $c\cdot t$ zu dem ungestörten Teil $n_0\cdot t$ hinzugezogen gedacht wird, so daß die Summe $(n_0 + c)\cdot t$ der aus den Beobachtungen folgenden mittleren Bewegung $n_0 + c$ entspricht.

Mithin ist schließlich die gesuchte Längenstörung:

$$(30)\qquad \Delta l = \mathrm{L}'\sin\,(l-l') + L''\sin\,(l-l'') + L'''\sin\,(3\,l-3\,l')$$
$$+ L^{\mathrm{IV}}\sin\,(2\,l-2\,l'')$$

wo

$$
\left\{
\begin{aligned}
L' &= -F' - P' = \frac{2}{n(n'-n)}\left[a\frac{\partial D'}{\partial a} + 2D'\right] - \frac{3}{(n'-n)^2}D' \\
L'' &= -F'' - P'' = \frac{2}{n(n''-n)}\left[a\frac{\partial D''}{\partial a} + 2D''\right] - \frac{3}{(n''-n)^2}D'' \\
L''' &= -F''' - P''' = \frac{2}{9n(n'-n)}\left[a\frac{\partial D'''}{\partial a} + 2D'''\right] \\
&\qquad - \frac{1}{3(n'-n)^2}D''' \\
L^{IV} &= -F^{IV} - P^{IV} = \frac{1}{2n(n''-n)}\left[a\frac{\partial D^{IV}}{\partial a} + 2D^{IV}\right] \\
&\qquad - \frac{3}{4(n''-n)^2}D^{IV}
\end{aligned}
\right\}
$$

Weiter ist nach dem 10. Bande der Annalen der Pariser Sternwarte in bezug auf Jupiter und Saturn für die allein in Frage kommenden Glieder:

$$
(31)\quad \left.\begin{aligned}
\Delta l' &= M'' \sin(2l' - 2l'') \\
\Delta l'' &= N''' \sin(3l' - 3l'')
\end{aligned}\right\}
\qquad \text{wo}\quad
\begin{aligned}
M'' &= -66''99 \\
N'' &= +55''96
\end{aligned}
$$

Die Substitution der Ausdrücke für Δa, $\Delta a'$, $\Delta a''$, Δl, $\Delta l'$ und $\Delta l''$ in die rechten Seiten von (22) liefert dann bei Auflösung der trigonometrischen Faktoren die gesuchten in $\sin K$ multiplizierten Teile von:

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
D' \sin (l-l') &= \sin K\left[\frac{1}{2} D_0' M'' + \frac{1}{2}\frac{\partial D'}{\partial a'}\cdot H''\right] \\
D'' \sin (l-l'') &= \sin K\left[\frac{1}{2} D_0'' N''' + \frac{1}{2}\frac{\partial D''}{\partial a''}\cdot G'''\right] \\
D''' \sin 3(l-l') &= \sin K\left[-\frac{1}{2} D_0''' L^{IV} + \frac{1}{2}\frac{\partial D'''}{\partial a} E^{IV}\right] \\
D^{IV} \sin (l-l'') &= \sin K\left[+1\cdot D_0^{IV} L''' - \frac{1}{2}\frac{\partial D^{IV}}{\partial a} E'''\right]
\end{aligned}
\right\}
$$

so daß nunmehr in der für $\frac{dn}{dt}$ gültigen Gleichung (18), umgeformt auf die Koeffizienten $D^{(i)}$:

$$(33)\quad \frac{dn}{dt} = +3\Big[D'\sin(l-l') + D''\sin(l-l'') + D'''\sin 3(l-l') + D^{\mathrm{IV}}\sin 2\,(l-l'')\Big]$$

mittels (32) die Glieder 2. Ordnung der Massen mit dem Argumente K gegeben vorliegen.

Es bleibt jetzt noch die Entwickelung von $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ nach den Gliedern in K. Auf Grund der Ausgangsformel $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial\Omega}{\partial a}$ folgt die die in Betracht kommenden Argumente enthaltende Darstellung:

$$(34)\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = C^0 + C'\cos(l-l') + C''\cos(l-l'') + C'''\cos 3(l-l') + C^{\mathrm{IV}}\cos 2\,(l-l''),$$

so daß, da nach (28) und (29) $C^0 = C^0(a, a', a'')$ (Jupiter- und Saturnstörungen) $= -\frac{k^2m'}{na}\frac{\partial A^0}{\partial a} - \frac{k^2m''}{na}\frac{\partial \overline{A}^0}{\partial a}$

$$(34)\quad \begin{aligned} C' &= F'\;(n'-n) = -\frac{2}{n}\left[a\frac{\partial D'}{\partial a} + 2\,D'\right] \\ C'' &= F''\;(n''-n) = -\frac{2}{n}\left[a\frac{\partial D''}{\partial a} + 2\,D''\right] \\ C''' &= 3F'''\;(n'-n) = -\frac{2}{3}\frac{1}{n}\left[a\frac{\partial D'''}{\partial a} + 2\,D'''\right] \\ C^{\mathrm{IV}} &= 2F^{\mathrm{IV}}\;(n''-n) = -\frac{1}{n}\left[a\frac{\partial D^{\mathrm{IV}}}{\partial a} + 2\,D^{\mathrm{IV}}\right] \end{aligned}$$

schließlich erhalten wird:

(35)

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{\partial C^0}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{\partial C^0}{\partial a'}\frac{da'}{\partial a'} + \frac{\partial C^0}{\partial a''}\frac{da''}{dt} + \left[\frac{\partial C'}{\partial a}\frac{da'}{dt} + \frac{\partial C'}{\partial a}\frac{da'}{dt}\right]\cos(l-l')$$

$$+\left[\frac{\partial C''}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial C''}{\partial a''}\frac{da''}{dt}\right]\cos(l-l'')+\left[\frac{\partial C'''}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial C'''}{\partial a'}\frac{da'}{dt}\right]\cdot$$

$$\cdot\cos 3(l-l')+\left[\frac{\partial C^{\mathrm{IV}}}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial C^{\mathrm{IV}}}{\partial a''}\cdot\frac{da''}{dt}\right]\cos 2(l-l'')$$

$$-C'\sin(l-l')\left[\frac{dl}{dt}-\frac{dl'}{dt}\right]-C''\sin(l-l'')\left[\frac{dl}{dt}-\frac{dl''}{dt}\right]$$

$$-C'''\sin 3(l-l')\left[3\frac{dl}{dt}-3\frac{dl'}{dt}\right]$$

$$-C^{\mathrm{IV}}\sin 2(l-l'')\left[2\frac{dl}{dt}-\frac{dl''}{dt}\right].$$

Die ersten 3 Terme rechter Hand scheiden sogleich aus, da die nur von a, a' und a'' abhängigen C^0 von der 1. Ordnung der Masse sind, ebenso also ihre von den Längen unabhängigen Ableitungen nach a, a' und a'', und da ferner die Ableitungen $\frac{da}{dt}$, $\frac{da'}{dt}$ und $\frac{da''}{dt}$ ebenfalls von der 1. Ordnung sind, so daß deshalb in ihnen keine Glieder in K auftreten können, also auch nicht in dem Produkte $\frac{\partial C^0}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt}$ und den analogen Ausdrücken in a' und a''.

Da (36) $\left.\begin{aligned}\frac{dl}{dt}&=\frac{d\varepsilon}{dt}+n\\&=\frac{d\varepsilon}{dt}+n_0+\Delta n\end{aligned}\right\}$ und $\left\{\begin{aligned}\frac{dl'}{dt}&=\frac{d\varepsilon'}{dt}+n'=\frac{d\varepsilon'}{dt}+n'_0+\Delta n'\\\frac{dl''}{dt}&=\frac{d\varepsilon''}{dt}+n''=\frac{d\varepsilon''}{dt}+n''_0+\Delta n''\end{aligned}\right\}$

so treten in den letzten 4 Termen von (35) allgemein die Terme $n_0 C^{(i)}$ und $n' C^{(i)}$ auf, die also fortfallen, weil sie nicht zu K-Gliedern führen. Aus allen übrigen Termen von (35) können K-Glieder entstehen, und zwar zunächst aus dem 4. Gliede der rechten Seite von (35):

(35a) $$\frac{\partial C'}{\partial a}\frac{da}{dt}\cos(l-l'),$$

wo $\frac{\partial C'}{\partial a}$ die Masse m' als Faktor hat, so daß in $\frac{da}{dt}$ nur ebenfalls die Terme 1. Ordnung in m' bzw. m'' berücksichtigt zu werden brauchen; von den in $\frac{da}{dt}$ auftretenden 4 Argumenten $l - l'$, $l - l''$, $3\,(l - l')$ und $2\,(l - l'')$ gibt aber keine Kombination mit dem Faktor $\cos\,(l - l')$ einen Term in K, so daß (35a) wegfällt. Das nächste Glied:

$$\frac{\partial C'}{\partial a'} \cdot \frac{da'}{dt} \cos\,(l - l') \tag{35b}$$

gibt einen K-Term aus der Kombination des Termes $2\,l' - 2\,l''$ in $\frac{da'}{dt}$ mit $\cos\,(l - l')$. Ferner gibt

$$\frac{\partial C''}{\partial a}\,\frac{da}{dt} \cos\,(l - l'') \tag{35c}$$

keinen K-Term, wohl aber:

$$\frac{\partial C''}{\partial a''} \cdot \frac{da''}{dt} \cos\,(l - l''). \tag{35d}$$

Das nächste Glied

$$\frac{\partial C'''}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} \cos\,3\,(l - l') \tag{35e}$$

enthält ein K-Glied aus der Kombination des Argumentes $2\,(l - l'')$ in $\frac{da}{dt}$ mit $\cos\,3\,(l - l')$. Das weitere Glied

$$\frac{\partial C'''}{\partial a'}\,\frac{da'}{dt} \cos\,3\,(l - l') \tag{35f}$$

enthält kein K-Glied, aber

$$\frac{\partial C^{\mathrm{IV}}}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} \cos\,2\,(l - l'') \tag{35g}$$

enthält ein K-Glied aus der Kombination des Gliedes $3\,(l - l')$ in $\frac{da}{dt}$ mit $\cos\,2\,(l - l'')$; schließlich enthält das Glied

(35h) $$\frac{\partial C^{\mathrm{IV}}}{\partial a''}\cdot\frac{da''}{dt}\cos 2\,(l-l'')$$

keinen K-Term, so daß 4 der betrachteten Sorte von Gliedern verschieden von 0 und ebenso viele gleich 0 sind. Die restlichen 4 Gliederpaare in (35) sind:

(35i) $$C'\sin\,(l-l')\,\frac{dl}{dt},\ \text{wo}\ \frac{dl}{dt}=\frac{d\,(l_0+\Delta l)}{dt}=n_0+\frac{d\Delta l}{dt}$$

und wo Δl bzw. $\frac{d\Delta l}{dt}$ wieder von den 4 Haupt-Argumenten abhängen, so daß das Produkt $\sin\,(l-l')\,\frac{dl}{dt}$ keinen K-Term enthält.

(35k) $$C'\ \sin\,(l-l')\,\frac{dl}{dt}$$

gibt ein K-Glied mit Hilfe des Termes vom Argumente $2\,l'-2\,l''$ in $\frac{dl'}{dt}$.

(35l) $$C''\sin\,(l-l'')\,\frac{dl}{dt}$$

enthält kein K-Glied, weil das Argument $l-l''$ nur mit $3\,l'-3\,l''$ ein solches ergibt, das aber in $\frac{dl}{dt}$ in der 1. Ordnung nicht auftritt.

(35m) $$C''\sin\,(l-l'')\,\frac{dl''}{dt}$$

gibt ein K-Glied aus dem Term in $3\,l'-3\,l''$ in $\frac{dl''}{dt}$.

(35n) $$C'''\sin 3\,(l-l')\,\frac{dl}{dt}$$

gibt ein K-Glied mittels $2\,(l-l'')$ in $\frac{dl}{dt}$.

(35o) $$C'''\sin 3\,(l-l')\,\frac{dl'}{dt}$$

gibt kein K-Glied.

(35p) $$C^{\mathrm{IV}}\sin 2\,(l-l'')\,\frac{dl}{dt}$$

gibt ein K-Glied mittels $3\,(l-l')$ in $\frac{dl}{dt}$.

(35q) $$C^{\mathrm{IV}} \sin 2\,(l - l'')\,\frac{dl''}{dt}$$

gibt kein K-Glied.

Von den Gliedern rechter Hand in (35) geben also insgesamt 8 Terme einen von $\sin K$ abhängenden Anteil. Nach Ausführung der erforderlichen Produktbildungen unter Berücksichtigung der oben eingeführten Bezeichnungen der Koeffizienten der trigonometrischen Glieder in $\frac{da}{dt}\ldots, \frac{dl}{dt}\ldots$, unter Beachtung, daß

nach (30): $$\frac{dl}{dt} = n_0 + (n_0 - n'_0)\,L' \cos (l - l') + (n_0 - n''_0)\,L'' \cos (l - l'') + 3\,(n_0 - n'_0)\,L''' \cos 3\,(l - l') + 2\,(n_0 - n''_0)\,L^{\mathrm{IV}} \cos 2\,(l - l'')$$

ferner nach (31):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dl'}{dt} &= n'_0 + 2\,(n'_0 - n''_0)\,M'' \cos (2\,l' - 2\,l'') \\ \frac{dl''}{dt} &= n''_0 + 3\,(n_0 - n''_0)\,N''' \cos (3l' - 3l'') \end{aligned}\right\}$$

ferner nach (24) und (25):

$$\frac{da}{dt} = -(n_0 - n'_0)\,E' \sin (l - l') - (n_0 - n''_0)\,E'' \sin (l - l'') - 3\,(n_0 - n'_0)\,E''' \sin (3\,l - 3\,l') - 2\,(n_0 - n''_0)\,E^{\mathrm{IV}} \cdot \sin (2\,l - 2\,l'')$$

$$\frac{da'}{dt} = -2\,H''\,(n' - n'') \sin (2\,l' - 2l'')$$

$$\frac{da''}{dt} = -3\,G'''\,(n' - n'') \sin (3\,l' - 3\,l''),$$

erhält man schließlich den folgenden Ausdruck für $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ in Abhängigkeit von $\sin K$:

(37) $$\text{pars}\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \sin K \left[\frac{\partial C'}{\partial a'}\,H''\,(n' - n'') + \frac{3}{2}\,\frac{\partial C''}{\partial a''}\,G'''\,(n' - n'') + \frac{\partial C'''}{\partial a}\,E^{\mathrm{IV}}\,(n' - n'') - \frac{3}{2}\,\frac{\partial C^{\mathrm{IV}}}{\partial a}\,E'''\,(n - n') + C'M''\,(n' - n'') + \frac{3}{2}C''N''\,(n' - n'') - 3\,C'''\,L^{\mathrm{IV}}\,(n - n'') - 3\,C^{\mathrm{IV}}\,L'''\,(n - n')\right].$$

In (35) enthalten rechter Hand die Glieder $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}$ und $\frac{dl''}{dt}$ gemäß (36) noch die Einzelglieder n, n' und n'', die mit den Multiplikatoren $C^{(i)}$ niemals Glieder in $\sin K$ ergeben, während aber die Störung Δn in $n = n_0 + \Delta n$ in Verbindung mit den Termen der rechten Seite von (35) wohl zu solchen Gliedern in $\sin K$ führt; dabei ist aber zu beachten, daß die n selbst als von der Ordnung der störenden Masse zu betrachten sind, weil $n' = 300'' \sin 1'' = {}^3/_2 \times 10^{-3} = {}^3/_2$ Jupitermasse, ferner $n'' = 120'' \sin 1'' = {}^3/_5$ Jupitermasse, schließlich $n = 656 \sin 1'' = 3$ Jupitermasse und deshalb die Störungen Δn gemäß (18) und den Definitionsformeln (17b) der Koeffizienten von der Ordnung $m' \cdot n^2$ also, da $n - n'$ auch von der Ordnung der störenden Masse, von der Ordnung $m' \cdot n = 2$. Ordnung der Masse; die Kombination mit den Größen 1. Ordnung der Masse $C^{(i)}$ in (35) ergäbe also zu vernachlässigende Größen 3. Ordnung.

Folglich ist alsdann nach (12) und mittels (33), (32) und (37):

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{dn}{dt} = c \cdot \sin K, \text{ wo} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} c = {} & \frac{3}{2}\left[D'_0\, M'' + \frac{\partial D'}{\partial a'} H''\right] + \frac{3}{2}\left[D''_0\, N''' + \frac{\partial D''}{\partial a''} G'''\right] \\ & + \frac{3}{2}\left[-3\, D'''_0\, L^{\mathrm{IV}} + \frac{\partial D'''}{\partial a} E^{\mathrm{IV}}\right] \\ & + 3\left[D^{\mathrm{IV}}_0\, L''' - \frac{1}{2}\frac{\partial D^{\mathrm{IV}}}{\partial a} E'''\right] \\ & + (n' - n'')\frac{\partial C'}{\partial a'} H'' + \frac{3}{2}(n' - n'')\frac{\partial C''}{\partial a''} G''' \\ & + (n - n'')\frac{\partial C'''}{\partial a} \cdot E^{\mathrm{IV}} - \frac{3}{2}(n - n')\frac{\partial C^{\mathrm{IV}}}{\partial a} \cdot E''' \\ & + (n' - n'')\, C'\, M'' + \frac{3}{2}(n' - n'')\, C''\, N''' \\ & - 3\,(n - n'')\, C'''\, L^{\mathrm{IV}} - 3\,(n - n')\, C^{\mathrm{IV}}\, L''', \end{aligned} \tag{39}$$

wo c mit dem gleichbezeichneten Koeffizienten (4) identisch ist. Zur letzten Vervollständigung der Gleichung (11) bzw. (4) verbleibt jetzt noch die Darstellung von $R = -3\frac{d^2l'}{dt^2} + 2\frac{d^2l''}{dt^2}$ in Abhängigkeit von den großen Ungleichheiten zwischen Jupiter und Saturn, falls gerade deren Einfluß auf die Lösung untersucht wird. Nach den „Annales de l'observatoire de Paris", Bd. 12, S. 8 bzw. A. 8 ist:

$$\delta l' = +1205''.96 \sin(5l'' - 2l') + 13''.17 \cos(5l'' - 2l')$$
$$\delta l'' = -2988''.95 \sin(5l'' - 2l') - 23''.26 \cos(5l'' - 2l'),$$

so daß:

$$R = -3\frac{d^2l'}{dt^2} + 2\frac{d^2l''}{dt^2} = S\sin(5l'' - 2l') + C\cos(5l'' - 2l'),$$

wo $\lg C = (2.51403 - 10)_n$ und $\lg S = (4{,}56148 - 10)_n$.

Um schließlich für R die in (8) benutzte Form $R = e \cdot \sin(\alpha t + \beta)$ zu erhalten, sind, wenn $5l'' - 2l' = \alpha t + \gamma$ gesetzt wird, indem $\alpha = 5n'' - 2n' = +4''.019$ und $\gamma = 5l_0'' - 2l_0'$ aus den zur Zeit $t = 0$ gültigen Anfangswerten besteht, die Größen e und β zu berechnen aus:

$$\left\{\begin{aligned} e\sin\beta &= S\sin\gamma + C\cos\gamma \\ e\cos\beta &= S\cos\gamma - C\sin\gamma \end{aligned}\right\}$$

Die weitere Integration erfolgt dann nach den schon oben gegebenen Methoden.

In bezug auf die Anwendung auf die Planeten des Sonnensystems ist es nun von Interesse zu sehen, ob periodische Lösungen existieren, ob also die Bedingungen (10a) unter der Grundvoraussetzung, daß $c' < 0$ sein muß, erfüllt sind oder ob die Lösung von vorneweg dem Typ der rotierenden Pendelbewegung entsprechen. Die folgende Tabelle enthält alle zwischen $n = 656''.474 \pm 10''$ vorhandenen Planetoiden, 69 an Zahl, ihre mittlere Bewegung n_0, ferner $L_0 = M_0 + \omega + \Omega$ und endlich $K_0 = l_0 - 3l_0' + 2l_0'' = l_0 - 49^0$ ($t = 0$ entsprechend 1925.0).

Planet Nr.	n	L_0	K_0	Planet Nr.	n	L_0	K_0
48	647″.0	81°	32°	610	654″.1	150°	101°
49	656.5	144	95	621	643.1	178	129
52	650.8	241	192	634	665.7	12	323
95	659.3	277	228	663	662.3	289	240
100	649.6	83	34	671	652.2	4	315
133	661.7	175	126	676	663.0	142	93
137	644.9	304	255	681	648.2	190	141
159	650.3	53	4	704	663.6	258	209
202	656.2	152	103	718	659.7	169	120
211	665.7	251	202	740	664.0	233	184
212	645.7	202	153	746	648.4	227	178
223	654.4	112	63	774	665.8	83	34
241	667.2	201	152	784	646.8	190	141
245	653.7	213	164	791	645.5	258	209
257	646.2	220	171	867	660.6	311	262
268	650.9	203	154	885	651.2	127	78
274	668.2	166	117	893	665.0	339	290
276	645.9	88	39	894	645.8	331	282
283	666.2	43	354	936	647.9	270	221
285	656.0	144	95	964	663.8	250	201
303	643.0	80	31	972	660.6	280	231
328	647.0	163	114	981	651.7	124	76
368	660.1	218	169	982	656.0	70	21
373	646.4	247	198	996	651.8	289	240
399	666.0	15	326	1040	652.1	106	57
423	659.5	133	84	1041	662.0	176	127
451	661.7	313	264	1043	653.6	194	145
457	651.9	170	121	1049	654.2	316	267
465	654.4	289	240	1081	651.2	191	142
509	662.4	243	194	1113	649.4	105	56
514	666.2	349	300	1114	652.8	162	113
537	663.0	224	175	1115	647.4	203	154
543	660.2	303	254	1146	666.0	322	273
602	654.1	303	254	1200	663.8	259	210
609	654.1	137	88				

Gemäß der Tabelle befinden sich demnach unter den 69, d. h. 6% aller Planeten

21 Planeten, bei denen $|K_0| < 90^0$ ($^1/_3$ der 69 Planeten)

48 Planeten, bei denen $|K_0| > 90^0$ ($^2/_3$ der 69 Planeten)

Zugleich ist bei 29 Planeten: $n > 656''.47$, unter ihnen 8, wo $|K_0| < 90^0$, und 21, wo $|K_0| > 90^0$.

Analog ist bei 40 Planeten: $n < 656''.47$, unter ihnen 13, wo $|K_0| < 90^0$, und 27, wo $|K_0| > 90^0$.

Folglich ist der Fall $|K_0| > 90^0$ mit 48 Fällen auf beide Unterfälle $n \gtrless 656''.47$ ziemlich gleichmäßig verteilt, während der Fall $|K_0| < 90^0$ mit 21 Fällen ungleichmäßig verteilt erscheint, indem nur 8 Fälle bei $n > 656''.47$, aber 13 Fälle bei $n < 656''.47$ stattfinden.

Die Entscheidung, welche Fälle einer periodischen Lösung entsprechen, ist nach früherem noch von dem Vorzeichen von c in $c' = c \cdot \cos K_0$ abhängig; welches aber auch das Vorzeichen von c sein möge, immer gibt es, auch in der Natur in bezug auf die K-Werte, ein Gebiet, wo Libration, und ein Gebiet, wo K sich, abgesehen von kurzperiodischen Schwankungen, wie das ständig rotierende Pendel verhält. Es verbleibt im Einzelfalle zur Trennung der beobachteten Planetengruppen die numerische Berechnung von c und der Bedingungen (5a) bzw. (5b) nach der Formel (39).

Will man mit Rücksicht auf die großen Ungleichheiten zwischen Jupiter und Saturn und ohne L in $K = K_0 + L$ als eine kleine Größe zu betrachten, die strenge Integration der Gleichungen (4) bzw. (7) durchführen, so bleibt als einfachster Weg, wenn er allerdings auch mit längeren numerischen Rechnungen verbunden bleibt, der der mechanischen Quadratur; man erhält durch doppelte Quadratur nach (7):

$$L = \int\int [c' \sin L + c'' \cos L + e \sin(\alpha t + \beta)]\,(dt)^2;$$

um strenge Anfangswerte im Gaußschen Differenzenschema der numerischen Integration zu erhalten, ist zwecks Substitution in die rechte Seite der letzten Gleichung nach Taylors Satz zu setzen:

$$L = L_0 + t\left(\frac{dL}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2L}{dt^2}\right)_0 + \frac{1}{6}t^3\left(\frac{d^3L}{dt^3}\right) + \ldots$$

wo $L_0 =$ (Anfangswert für $t = 0) = 0$ und ebenso

$$\left(\frac{dL}{dt}\right) = n_0 - 3n_0' + 2n_0'', \text{ ferner: } \left(\frac{d^2L}{dt^2}\right)_0 = c' \sin L_0 + c'' \cos L_0$$

$+ e \sin \beta = c'' + e \sin \beta$ und wo die höheren Ableitungen von L durch Differentation von (7) erhalten werden, so daß die Anfangswerte der summierten Reihen des Differenzenschemas mit beliebiger Genauigkeit erhalten werden können und der Fortsetzung mittels numerischer Integration in der üblichen Art keine Schwierigkeiten mehr im Wege stehen.